V-7 - Déterminer l'entier maximal $s \geqslant 0$ tel que la fonction $F = T_\lambda(f)$ définie par :

$$F(x,y) = (x-\lambda)^{-s} g(x,y)$$

soit polynomiale.

Montrer que, si $r \geqslant 1$, alors $F(0,0) = 0$.

V-8 - Calculer en fonction de (n, v, r) le degré N de la fonction polynomiale F.

Démontrer l'inégalité $N \leqslant 2n$, et donner un exemple, où n est un entier donné strictement positif, tel que l'égalité soit atteinte.

V-9 - Calculer N pour $f(x,y) = x^a + (x+\lambda)^q y^q$ où a est un entier positif ou nul donné, et vérifier dans ce cas l'inégalité $N \geqslant \dfrac{n}{2}\cdot$

Montrer que, pour tout entier n strictement positif et tout entier m compris entre la partie entière de $\dfrac{n+1}{2}$ et n, il existe une fonction polynomiale f telle que $N = m$.

V-10 - Montrer que, si $f(x,y)$ n'est pas le produit d'une fonction polynomiale de la forme $x+k$ par une fonction polynomiale, il existe un réel non nul μ tel que :

$$f = T_\mu(F) = T_\mu \circ T_\lambda(f) = T_\lambda \circ T_\mu(f).$$

Que peut-on en déduire pour N ?

V-11 - Déterminer les fonctions polynomiales f telles que $T_\lambda(f) = f$.

4- Analyse de la deuxième épreuve

Le problème proposait l'étude de la transformée de Descartes d'une courbe : dans la première partie, on étudiait les propriétés des conchoïdes de droites, puis la deuxième partie traitait de quelques propriétés des hyperboles et paraboles. Dans la troisième partie, on définissait la transformée de Descartes d'une courbe paramétrée, et on proposait l'étude de la transformée de plusieurs courbes, dont celle d'un cercle de centre O privé de ses deux points d'abscisse nulle qui redonnait la conchoïde de Nicomède de la première partie.
La quatrième partie étudiait des propriétés de la transformée de Descartes de plusieurs courbes, puis la cinquième partie proposait de créer des courbes dont une équation annule un polynôme de degré quelconque, ce qui était l'un des objectifs poursuivis par Descartes lui-même au moment de la rédaction de son livre La Géométrie, paru en 1637.

Nous rappelons que les candidats doivent s'efforcer de ne pas être déroutés par la longueur, ou la supposée difficulté du problème. S'agissant d'un concours, il peut donc suffire de répondre soigneusement à une partie seulement des questions, pour être admissible.

En conclusion, nous conseillons aux candidats de traiter les questions le plus rigoureusement et le plus complètement possible quitte à en aborder moins, d'être exigeant avec leur rédaction comme ils le seraient vis à vis de celle de leurs élèves, et de ne pas se décourager à la première question un peu plus difficile rencontrée.

Commentaire sur les questions, les plus abordées :

Première partie

1.1 On s'attend ici à une étude assez détaillée de la conchoïde. Les variations de y sont souvent mal traitées.

1.2 Il convient de justifier un minimum la présence ou l'absence de points singuliers pour justifier l'allure des courbes.

En régle générale, dans ces deux premières questions, les candidats ayant accompagné leurs tracés d'une démonstration rigoureuse d'un résultat pertinent et utile à l'étude des courbes ont été plus gratifiés que ceux qui se sont contentés de recopier leurs calculatrices, souvent sans remarquer la présence de points singuliers.

1.3 Plusieurs candidats proposent des fonctions f non polynômiales.

1.4 L'équation polaire de Φ doit être simplifiée.

Deuxième partie

2.1 Il est toujours décevant de constater qu'un candidat à un poste d'enseignement en Mathématiques ne puisse donner un énoncé correct du théorème de Thalès, dans le cadre proposé par l'énoncé (c'est à dire hors de la configuration du triangle).

Parmi les rares candidats qui proposent une condition du type : $\dfrac{\overline{M'M}}{\overline{M'M''}} = \dfrac{\overline{P'P}}{\overline{P'P''}}$, il est dommage que certains oublient les hypothèses permettant d'assurer que les dénominateurs sont non nuls, et regrettable que d'autres ajoutent un troisième quotient sans lien avec les deux premiers.

Presque tous les futurs professeurs certifiés auront à enseigner ce théorème dans leur carrière, et même si ce sera sous une forme plus simple, on peut attendre du professeur un minimum de recul sur ce qu'il enseigne.

2.5 Pour pouvoir exiger plus tard de ses élèves, une rédaction précise mettant en évidence les propriétés utilisées, justifiant des égalités, équivalences, ou implications, il est indispensable que le futur enseignant rédige lui même de cette manière, notamment ce genre de question.

2.6 De nombreux candidats pensent, à tort, qu'une droite n'ayant qu'un point d'intersection avec une courbe, est nécessairement une tangente à la courbe. Très peu, ont compris comment la question précédente permettait de montrer que la droite était extérieure à la parabole.

2.7 Là encore, il faut faire ce qu'on attendrait sans doute de la part d'un élève : démontrer le résultat conjecturé par une figure.

2.8 Question souvent mal traitée, pour des résultats faisant explicitement partie du programme du CAPES, surtout la question a., où on lit trop rarement dans les copies l'indépendance de la définition par rapport au couple de points du cercle choisi.

Troisième partie

3.2 Il faut distinguer le cas des droites verticales.

3.3 Quand la réponse est donnée dans l'énoncé, le candidat est surtout jugé sur la justification de son raisonnement, et notamment ici, sur les raisons du retrait du point.

Signalons qu'un candidat ayant traité rigoureusement une bonne partie des questions précédentes, et n'abordant pas les deux parties suivantes, obtiendra déjà une excellente note.

Quatrième partie

4.1 Pour obtenir l'équation polaire, il faut démontrer qu'il y a *équivalence* entre l'appartenance à la courbe, et la satisfaction de l'équation par les coordonnées. De nombreux candidats se contentent (parfois à cause d'une rédaction très imprécise) d'une implication.

Cinquième partie

5.1 Comme dans la question 4.1, il faut déjà réaliser que cette question et la suivante nécessitent de démontrer une équivalence.