Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Oral
Année 2005–2006

Théorème de Thalès, etc.

Idées fortes

Le théorème de Thalès est *essentiellement équivalent* à la distributivité du produit d'un scalaire par un vecteur sur l'addition des vecteurs.
Une des difficultés de la leçon est de mettre en évidence son unité, et d'éviter d'avoir deux parties autonomes, Thalès d'un côté et projections de l'autre. On le fait de trois façons :
• en choisissant une preuve du théorème de Thalès dont l'idée sous-jacente est la projection, ce qui a pour avantage supplémentaire la concision ; (noter la similitude entre les preuves de 1°a), 3°c) (première version)
• en démontrant le caractère affine des projections grâce au théorème de Thalès, via la conservation du barycentre ;
• en reformulant le théorème de Thalès en termes de projections (2°c)).

Approches possible et impossible

On a en gros deux approches envisageables :
• soit on part d'un système d'axiomes faible, dans la lignée d'Euclide, et on se retrouve avec des preuves incomplètes ou inextricables ; c'est l'approche de Bettinelli-Schubnel, qui au passage ne prennent pas des axiomes assez forts pour démontrer leurs théorèmes...
• soit on s'autorise l'algèbre linéaire, auquel cas le théorème de Thalès est une banalité ; la situation est comparable à la relation de Bezout avec le PGCD.

Au bilan, afin que la leçon ne soit pas insurmontable, et pour lui donner une validité plus grande (on pourrait prendre d'autres corps que $\mathbb{R}$), je préconise sans hésiter l'approche vectorielle, mâtinée de remarques qui montrent qu'on voit l'hypocrisie de la manœuvre.
Evidemment, du point de vue historique ou pédagogique, cette approche est absurde. Cependant, au plan conceptuel, elle sert au moins à se convaincre qu'un système d'axiomes abstrait comme celui de l'algèbre linéaire est, selon le mot de Daniel Perrin, un "elixir de pensée".

0° Prérequis

- notion d'espace vectoriel, base, dimension :
  - on sait additionner deux vecteurs, multiplier un réel par un vecteur, et on sait que ce produit est distributif sur la somme ;
  - une droite est un sev engendré par un vecteur non nul ; sa dimension est 1 ;
  - conséquences : position relative deux deux droites vectorielles dans un plan (supplémentaires ou égales), d'une droite et d'un plan vectoriels dans l'espace (ils sont supplémentaires ou la droite est contenue dans le plan) ;
- notion d'espace affine, d'application affine ;
- mesure algébrique
  - étant donné une droite affine dirigée par u, la mesure algébrique d'un couple de points (A, B) de cette droite dans la base u est l'unique scalaire k tel que $\overrightarrow{AB} = ku$; on la note $\overline{AB}$;
  - il est intéressant de noter qu'un rapport de deux mesures algébriques $\overline{AB}/\overline{CD}$ ne dépend pas du vecteur directeur de référence (on suppose $C \neq D$).

On fixe une fois pour toutes un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par un espace vectoriel (réel) E, qu'on suppose le plus souvent de dimension 2 ou 3.

1° Théorème de Thalès

a) Enoncé direct dans le plan : $\dim \mathcal{E} = 2$

Théorème *Soit (d) et (d') deux droites affines, (δ_a), (δ_b) et (δ_c) trois droites distinctes coupant respectivement (d) en A, B, C et (d') en A', B', C'. On suppose les droites (δ_a), (δ_b) et (δ_c) parallèles. Alors :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Démonstration. Les hypothèses font que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, si bien que les rapports écrits sont bien définis. Soit k l'unique réel tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Il suffit de montrer que $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Pour cela, on calcule $\overrightarrow{A'C'} - k\,\overrightarrow{A'B'}$ "en passant par les points non primés" ;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'C'} - k\,\overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} - k\left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\\
\overrightarrow{A'C'} - k\,\overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{AC} - k\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'} - k\overrightarrow{A'A} - k\overrightarrow{BB'}\\
(*) \qquad \underbrace{\overrightarrow{A'C'} - k\,\overrightarrow{A'B'}}_{\in \text{ direction de } (d')} &= \underbrace{\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'} - k\overrightarrow{A'A} - k\overrightarrow{BB'}}_{\in \text{ direction de } (\delta_a)}.
\end{aligned}$$

Comme (d') et (δ_a) ne sont pas parallèles, l'intersection de leurs directions est réduite au vecteur nul. On en déduit : $\overrightarrow{A'C'} - k\,\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{0}$.□

b) Digression relative à la distributivité

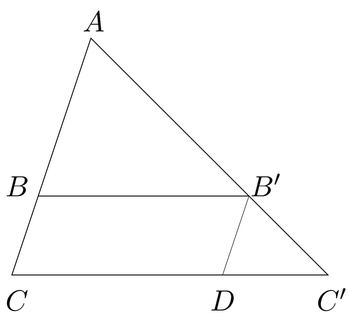
Remarque *Le point-clé de la preuve précédente est la distributivité du produit d'un scalaire par un vecteur sur l'addition des vecteurs. On va voir une espèce de réciproque.*

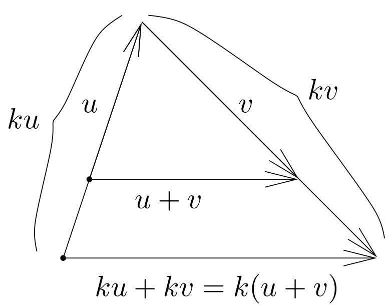
Corollaire *Avec les hypothèses du théorème de Thalès, on suppose de plus $A = A'$. Alors :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}}.$$

Démonstration. Cela a un sens de comparer $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$, car les quatre points B, B', C et C' sont situés sur deux droites parallèles.
Il suffit alors de reprendre la preuve ci-dessus à $(*)$: comme $A = A'$, on a : $\overrightarrow{CC'} = k\,\overrightarrow{BB'}$.
<u>Variante</u> : Introduisons le point D, intersection de (CC') et de la parallèle à (AB) passant par B'. Comme $BB'DC$ est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CD}$, donc $\overline{BB'}/\overline{CC'} = \overline{CD}/\overline{CC'}$
Deux applications du théorème de Thalès donnent alors :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}}.$$





On réinterprète le corollaire de façon “structurelle”. Supposons disposer d'un système d'axiomes, à la Euclide, qui permettrait de définir et d'additionner les vecteurs, et de multiplier un scalaire par un vecteur.
Fixons deux vecteurs u et v, non colinéaires (s'ils le sont, on considèrera que la situation est claire), et un scalaire $k \neq 0$. Fixons un point B, soit A tel que $\overrightarrow{BA} = u$, soit B' tel que $\overrightarrow{AB'} = v$, soit C tel que $\overrightarrow{AC} = -ku$ et soit C' tel que $\overrightarrow{AC'} = kv$. Alors, par construction, on a :

$$\overrightarrow{BB'} = u + v, \quad \overrightarrow{CC'} = ku + kv.$$

Or, le corollaire exprime que :

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = k, \qquad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{BB'}.$$

En d'autres termes :

$$ku + kv = k(u + v).$$

Interprétation *Ceci signifie que le théorème de Thalès est essentiellement équivalent à la distributivité : le théorème de Thalès rend naturels les axiomes de l'algèbre linéaire.*

c) Une réciproque dans le plan : $\dim \mathcal{E} = 2$

Remarque *Noter que l'hypothèse du théorème de Thalès est double :* $(\delta_a) /\!/ (\delta_b)$ *et* $(\delta_a) /\!/ (\delta_c)$*. Si on énonçait “la réciproque” sans réfléchir, on dirait que l'égalité des rapports entraîne ces deux parallélismes : c'est bien sûr faux. Ainsi, appeler la proposition qui suit* la *réciproque du théorème de Thalès est un abus de langage consacré par l'usage.*

Proposition *Soit (d) et (d') deux droites affines, (δ_a), (δ_b) et (δ_c) trois droites distinctes coupant respectivement (d) en A, B, C et (d') en A', B', C'. On suppose que les droites (δ_a) et (δ_b) sont parallèles, et que :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Alors, la droite (δ_c) est parallèle à (δ_a) et (δ_b).

Démonstration. Soit (δ_1) la parallèle à (δ_a) passant par C. Comme (δ_a) et (d') ne sont pas parallèles, (δ_1) coupe (d') en un point C_1. Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que $C_1 = C'$. Or, une application du théorème de a) et l'hypothèse donnent :

$$\frac{\overline{A'C_1}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

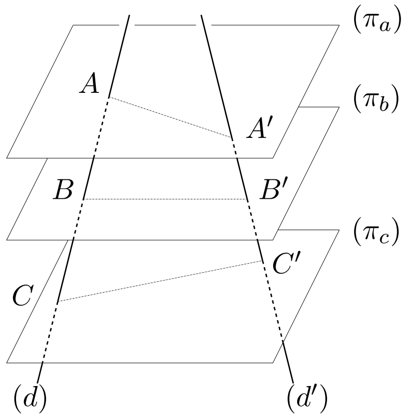
On en tire $\overline{A'C_1} = \overline{A'C'}$, et on conclut.

Remarque *Il est spectaculaire (et rare) que la preuve de “la” réciproque du théorème de Thalès soit essentiellement une application du théorème direct.*

d) Théorème de Thalès dans l'espace : $\dim \mathcal{E} = 3$

Théorème *Soit (d) et (d') deux droites affines, (π_a), (π_b) et (π_c) trois plans parallèles distincts, coupant respectivement (d) en A, B, C et (d') en A', B', C'. On suppose les plans (π_a), (π_b) et (π_c) parallèles. Alors :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$



Démonstration. La preuve de a) s'applique *mot pour mot*, en remplaçant (δ_a) par (π_a).$\square$

e) Question de “la” réciproque dans l'espace

Remarque *L'analogue dans l'espace de la proposition de c) est faux : en effet, si on remplace le plan* (π_c) *par un autre plan* (π'_c)*, qui contient la droite* (CC')*, on aura :* $(\pi_a) /\!\!/ (\pi_b)$ *et l'égalité des rapports, mais pas* $(\pi'_c) /\!\!/ (\pi_a)$*.*

Proposition (pas prioritaire) *Soit* (d) *et* (d') *deux droites affines non coplanaires,* A*,* B*,* C *trois points distincts de* (d) *et* A'*,* B'*,* C' *trois points distincts de* (d')*. On suppose que*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Alors, il existe trois plans parallèles (π_a)*,* (π_b) *et* (π_c) *contenant respectivement* (AA')*,* (BB') *et* (CC')*. De façon équivalente, la famille de vecteurs* $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}\right)$ *est liée.*

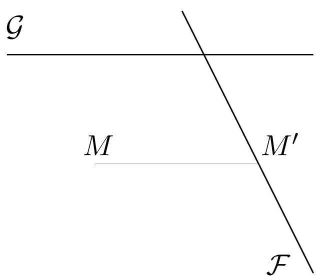
2° Projections (version piétonne)

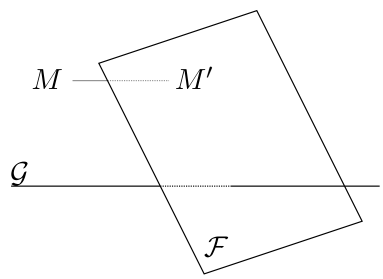
a) Idée. Dans cette version, on reste en dimension 2 ou 3 et on distingue différents cas. Cette présentation est celle qui fait le mieux apparaître le lien entre le théorème de Thalès et le caractère affine d'une projection.
On s'appuie sur la position relative de deux droites dans le plan, et celle d'une droite et d'un plan dans l'espace, connues par une leçon de numéro strictement plus petit.

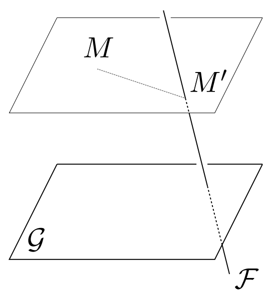
b) On fixe deux sous-espaces affines *non parallèles*[1] $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$, de sorte à être dans l'un des cas suivants :

$\mathcal{E}$	plan	espace	espace
$\mathcal{F}$	droite	plan	droite
$\mathcal{G}$	droite	droite	plan

On définit alors la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ comme l'application p qui, au point $M \in \mathcal{E}$, associe le point d'intersection de $\mathcal{F}$ et de la droite (ou du plan) parallèle à $\mathcal{G}$ contenant M. Dans la suite, on notera M' l'image du point M par p.







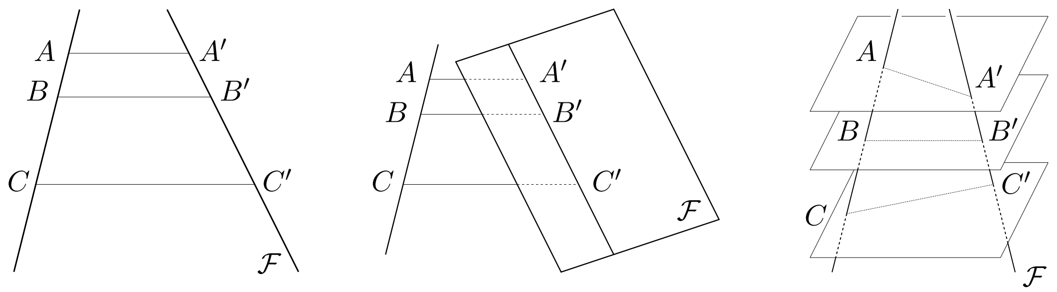
[1]S'il y a une droite et un plan, cela signifie que la direction de la droite n'est pas contenue dans celle du plan.

Proposition *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines dont les directions sont supplémentaires. Alors la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ est une application affine.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que p conserve le barycentre (voir appendice). Soit A et B deux points distincts (si $A = B$, rien à démontrer) et $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$. Soit C le barycentre de $\{(A, 1-t), (B, t)\}$. Alors, par définition du barycentre, C est le point de (AB) tel que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = t.$$

Si $A' = B'$, alors A et B sont sur la même droite/plan[2] $\mathcal{G}'$, parallèle à $\mathcal{G}$ contenant A'. Par suite, la droite (AB) est contenue dans $\mathcal{G}'$, donc $C' = A'$. On suppose désormais que $A' \neq B'$. Si $\mathcal{F}$ est une droite, les points A', B' et C' sont évidemment alignés. Si $\mathcal{F}$ est un plan, les trois points A', B' et C' appartiennent au plan contenant (AB) et la droite parallèle à $\mathcal{G}$ contenant A, et au plan $\mathcal{F}$, donc ils sont alignés.



Par le théorème de Thalès (dans le plan si $\mathcal{G}$ est une droite, dans l'espace si $\mathcal{G}$ est un plan) :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = t.$$

Par suite, C' est le barycentre de $\{(A', 1-t), (B', t)\}$. Il en résulte que p est affine.$\square$

c) Reformulation des théorèmes de Thalès (d'où : Thalès $\Leftrightarrow$ projections affines)

Proposition *Dans le plan ou l'espace, soit p une projection comme ci-dessus, A, B et C trois points alignés. Alors leurs images sont alignées, et on a (si $p(A) \neq p(B)$) :*

$$\frac{\overline{p(A)p(C)}}{\overline{p(A)p(B)}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

3° Projections (version trop générale, pour une question éventuelle du jury)

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension finie quelconque. On fixe deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$, dont les directions F et G sont supplémentaires : rappelons que cela signifie que $F \cap G = \{0\}$, et $F + G = E$.

a) Lemme préliminaire utile

Lemme *L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$, dont les directions F et G sont supplémentaires, est un singleton.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$, de sorte que $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = B + G$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit de façon unique sous la forme $v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.
Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ contient un point M, on a :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = v + w, \qquad \text{d'où} \quad \underbrace{\overrightarrow{AM} - v}_{\in F} = \underbrace{-\overrightarrow{BM} + w}_{\in G} \in F \cap G = \{0\}.$$

[2]Rayer la mention inutile.

On en déduit que $\overrightarrow{AM} = v$ est bien déterminé, i.e. que M est unique.
Inversement, soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = v$. Par construction, $M \in A + F = \mathcal{F}$. De plus, le "calcul" ci-dessus montre que l'on a $\overrightarrow{BM} = -w$, ce qui donne $M \in B + G = \mathcal{G}$.$\square$

b) Définition d'une projection

On définit la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ comme l'application p qui, au point $M \in \mathcal{E}$, associe le point d'intersection de $\mathcal{F}$ et du sous-espace parallèle à $\mathcal{G}$ contenant M. C'est le lemme précédent qui donne un sens à cette définition. Dans la suite, on notera M' l'image du point M par p. Si G est la direction de $\mathcal{G}$, on peut écrire (est-ce éclairant ?) :

$$\{M'\} = \{p(M)\} = \mathcal{F} \cap (M + G).$$

Remarquer que p ne dépend que de $\mathcal{F}$ et de G : remplacer $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}' \,/\!\!/\, \mathcal{G}$ ne change pas p.
Remarquer également que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{MM'} \in G$ car M' et M sont dans un même sous-espace dirigé par G, et pour $M, N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{M'N'} \in F$ car $M', N' \in \mathcal{F}$.

c) Caractère affine d'une projection

<u>Première version</u> : Supposons que pour $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, on ait : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. En notant $A' = p(A)$, etc., on a :

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D},$$

d'où

$$\underbrace{\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{C'D'}}_{\in F} = \underbrace{\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{B'B}}_{\in G} \in F \cap G = \{0\},$$

si bien que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$. Cela a donc un sens de définir une application $\pi : E \to E$ par : $\pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, et elle est additive (cf. appendice).
A présent, on montre que pour $k \in \mathbb{R}$ et $A, B, \in \mathcal{E}$, on a : $\pi(k\overrightarrow{AB}) - k\pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$. Soit C tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a :

$$\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'} + k\overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{B'B},$$

d'où

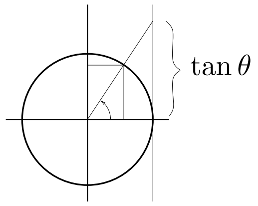
$$\underbrace{\overrightarrow{A'C'} - k\overrightarrow{A'B'}}_{\in F} = \underbrace{k\overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{C'C}}_{\in G} \in F \cap G = \{0\}.$$

<u>Deuxième version</u> : Par définition (ou presque) de ce que sont deux espaces supplémentaires, tout vecteur $u \in E$ s'écrit de façon unique comme une somme : $u = u_1 + u_0$, avec $u_1 \in F$ et $u_0 \in G$. On pose alors : $\pi(u) = u_1$. Il est facile de montrer que π est une application linéaire (cf. amphi d'algèbre linéaire).
Soit $O \in \mathcal{F}$, alors $f(O) = O$. Vérifions que pour $M \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{Of(M)} = \pi(\overrightarrow{OM})$. En notant $M' = p(M)$, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$, ce qui suffit, puisque $\overrightarrow{OM'} \in F$ (car $O, M \in \mathcal{F}$) et $\overrightarrow{M'M} \in G$ (car M' et M sont dans un même sous-espace dirigé par G).

4° Quelques applications

a) Interprétation géométrique de la tangente

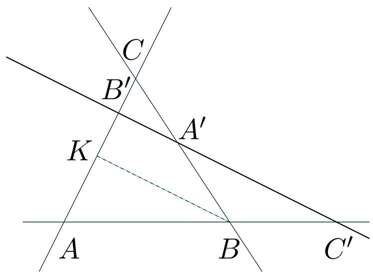
Ici, on se place dans un plan affine euclidien orienté, et on sait presque tout des angles. On lit, fort classiquement, la tangente d'un angle θ sur la tangente au cercle à son origine (placer $\cos\theta$, $\sin\theta$ sur la figure et voir comment appliquer le théorème de Thalès...) :



b) Théorèmes de Menelaüs et Ceva

Proposition (Menelaüs) *Soit ABC un triangle non aplati, $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ distincts des sommets.*[3] *Ces trois points sont alignés si, et seulement si on a*[4]

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$



Idée *On choisit un côté du triangle de référence, par exemple (AC). Pour comparer les rapports $\overline{A'B}/\overline{A'C}$, qui concernent des droites différentes, on projette sur le côté de référence, parallèlement à la droite $(A'B'C')$.*

Démonstration. On suppose A', B' et C' alignés. Par hypothèse, la droite qui les contient n'est parallèle à aucun côté. Soit p la projection sur (AC) parallèlement à cette droite, on a :

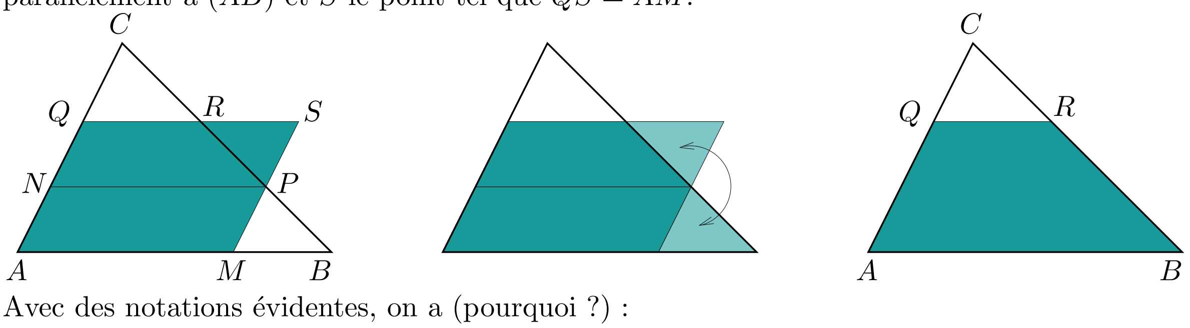
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{p(A')p(B)}}{\overline{p(A')p(C)}} = \frac{\overline{B'K}}{\overline{B'C}}, \qquad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\ldots \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{p(C')p(A)}}{\overline{p(C')p(B)}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'K}}.$$

Il est à présent évident que le produit de ces trois rapports vaut 1. La réciproque est un bon test pour voir si on a compris "la" réciproque du théorème de Thalès du plan. Il faudrait aussi parler du théorème de Ceva.□

c) Un problème d'optimisation (source : J.-L. Dorier)

On suppose savoir mesurer les aires dans un plan affine $\mathcal{E}$. Soit ABC un triangle non aplati, M un point de $[AB]$, P le projeté de M sur (BC) parallèlement à (AC), N le projeté de P sur (AC) parallèlement à (AB). On se demande pour quel point M l'aire du parallélogramme $AMPN$ est maximale.

Notons $x = \overline{AM}/\overline{AB}$ et $y = \overline{AN}/\overline{AC}$. Avec le théorème de Thalès, on montre que $x + y = 1$, donc x ou y est $\leq 1/2$. Quitte à permuter (M, B) et (N, C), on peut supposer que $y \leq 1/2$. On trace le point Q de $[AC]$ tel que $\overline{AQ}/\overline{AC} = 2y$, on note R le projeté de Q sur (BC) parallèlement à (AB) et S le point tel que $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{AM}$.



Avec des notations évidentes, on a (pourquoi ?) :

$$2\mathcal{A}(AMPN) = \mathcal{A}(AMSQ) = \mathcal{A}(ABRQ), \qquad \text{d'où} \quad \mathcal{A}(CQR) = \mathcal{A}(ABC) - 2\mathcal{A}(AMPN).$$

La positivité de $\mathcal{A}(CQR)$ montre que l'aire de $AMPN$ vaut au plus la moitié de l'aire de ABC, avec égalité si et seulement si $Q = R$, i.e. M est le milieu de $[AB]$.□

[3] Noter la symétrie circulaire des notations.

[4] Voir comment ce produit est fait : on forme un rapport avec un point "avec prime" et les deux points "sans prime" associés, puis on fait une permutation circulaire.

5° Appendice : caractère affine d'une application

Proposition *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Il est équivalent de dire :*

1. *il existe $\varphi : E \to E$ linéaire telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$;*
2. *étant donné $O \in \mathcal{E}$, l'application $\varphi : E \to E$, définie par $\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$, est linéaire ;*
3. *f conserve le barycentre.*

On dit que f est affine lorsqu'elle satisfait ces conditions. Cette proposition conduit à trois stratégies différentes pour prouver le caractère affine d'une application :

1. D'abord, *on montre que φ est bien définie*, c'est la moitié du travail. Pour cela, il suffit de montrer que si $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ sont tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. En effet, pour un vecteur $u \in E$, on choisit $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $u = \overrightarrow{AB}$; on vient de montrer que $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ ne dépend pas du choix de A et B, donc on peut poser $\varphi(u) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

   L'additivité de φ en découle : étant donné $u, v \in E$, on veut calculer $\varphi(u + v)$. On fixe $A \in \mathcal{E}$ arbitraire, puis B tel que $\overrightarrow{AB} = u$, et enfin, C tel que $\overrightarrow{AC} = v$. Alors, d'après ce qui précède, on a : $\varphi(u + v) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(u) + \varphi(v)$.

   Il reste à montrer que φ est compatible avec la produit d'un scalaire par un vecteur, c'est-à-dire que $\varphi(ku) = k\varphi(u)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

2. Par définition d'un espace affine, pour $O \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\mathcal{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est bijective, donc cela a un sens de définir φ comme dans la proposition. Il faut alors montrer que φ est linéaire.

3. (la meilleure ?) On montre que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, l'image par f du barycentre de $\{(A, 1 - t), (B, t)\}$ est le barycentre de $\{(f(A), 1 - t), (f(B), t)\}$.

Ajoutons une quatrième stratégie, qui peut être rentable à l'occasion :

4. On choisit un repère, et on montre que les coordonnées de l'image d'un point M sont des fonctions affines des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de M, i.e. de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ pour $a_1, \ldots, a_n, b$ réels fixés.

DÉMONSTRATION. On montre que si f conserve le barycentre, alors la condition 1. est satisfaite, car le reste est plus facile. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, donc l'hypothèse entraîne que $[f(A)f(C)]$ et $[f(B)f(D)]$ ont le même milieu, donc que $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(B)f(D)}$. D'où l'existence de φ et son additivité.
Soit alors $u \in E$, $u \neq 0$, et $k \in \mathbb{R}$. Soit $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = u$, et C tel que $\overrightarrow{AC} = ku$. Alors C est le barycentre de $\{(A, k), (B, 1 - k)\}$, donc, avec l'hypothèse, $f(C)$ est le barycentre de $\{(f(A), k), (f(B), 1 - k)\}$, donc $\overrightarrow{f(A)f(C)} = k\overrightarrow{f(A)f(B)}$, donc $\varphi(ku) = k\varphi(u)$.□