GRASSMANNIENNES

VINCENT BORRELLI

1. La classification des fibrés

On note $G_n(\mathbb{C}^k)$ la grassmannienne des n-plans complexes de $\mathbb{C}^k$ et on pose :

$$G_n(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_n(\mathbb{C}^k)$$

On munit ce dernier ensemble de la topologie CW, autrement dit, un sous-ensemble de $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ est ouvert (resp. fermé) si et seulement si son intersection avec $G_n(\mathbb{C}^k)$ est ouverte (resp. fermé) pour tout k. Il existe, sur $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ un fibré très naturel, dit *fibré universel*, c'est le fibré $EU(n)$ dont la fibre en chaque point P de $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ est le k-plan P lui-même. L'intérêt de ce fibré est qu'il permet de classer les fibrés vectoriels complexes sur une variété compacte M. Notons $Vect_n^{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des fibrés vectoriels complexes de rang n, on a :

Théorème de classification des fibrés. – *L'application :*

$$\begin{array}{rccc} \beta: & [M, G_n(\mathbb{C}^\infty)] & \longrightarrow & Vect_n^{\mathbb{C}}(M) \\ & [f] & \longmapsto & [f^*EU(n)] \end{array}$$

est une bijection.

Rappelons que $[X, Y]$ est l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues de X dans Y. Il y a bien sûr un résultat analogue pour les fibrés vectoriels réels (resp. les fibrés vectoriels réels orientés) faisant intervenir le fibré universel $EO(n)$ de la grassmanienne infinie $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ (resp. le fibré universel $ESO(n)$ de la grassmanienne infinie orientée $G_n^{or}(\mathbb{R}^\infty)$). La démonstration de ce théorème tient en quatre lemmes.

Lemme 1. – *Soit $E \to M$ un fibré complexe de rang n, il existe un nombre fini de sections de E qui, en tout point, engendrent la fibre.*

Démonstration. – Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement fini de M par des ouverts contratibles, et soit $\{V_i\}$ avec $\overline{V_i} \subset U_i$ un autre recouvrement ouvert[1]. Puisque $E_{|U_i}$ est trivial, on peut trouver n sections $\sigma_1^i, \cdots, \sigma_n^i$ qui forment une base de la fibre au dessus de tout point de U_i. Soit $f_i : M \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f_i \equiv 1$ sur V_i et $f_i \equiv 0$ sur $M \setminus U_i$. Alors $\{f_i\sigma_1^i, \cdots, f_i\sigma_n^i\}_{i\in I}$ sont des sections globales de E qui engendrent la fibre en tout point de M. $\square$

Soit $\mathcal{S}_N(E)$ l'ensemble de tous les N-uplets $S = \{s_1, \cdots, s_N\}$ de sections de E qui, en tout point, engendrent la fibre et $\mathcal{S}(E) = \cup_N \mathcal{S}_N(E)$. Soit $S = \{s_1, \cdots, s_N\} \in$

[1] L'existence d'un tel recouvrement est garanti par le lemme de rétrécissement.

$\mathcal{S}(E)$ et $V \simeq \mathbb{C}^N$ l'espace vectoriel engendré par les combinaisons de ces sections. En tout point $p \in M$, l'application d'évaluation :

$$\begin{array}{cccc} ev_{S,p} : & V & \longrightarrow & E_p \\ & (v_1, \cdots, v_N) & \longmapsto & \sum_{i=1}^N v_i s_i(p) \end{array}$$

est surjective, par conséquent $ker\ ev_{S,p}$ est un sous-espace de codimension n de V. On définit une flèche :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & C^0(M, G_n(\mathbb{C}^\infty)) \\ S & \longmapsto & f_S. \end{array}$$

par $f_S(p) = (\ker ev_{S,p})^\perp$.

Lemme 2. – *La classe d'homotopie de f_S ne dépend pas de $S \in \mathcal{S}(E)$, on la note $f_E = [f_S]$.*

Démonstration. – On va montrer que $f_{S_0} : M \to G_n(\mathbb{C}^{N_0})$ et $f_{S_1} : M \to G_n(\mathbb{C}^{N_1})$ sont homotopes dans $C^0(M, G_n(\mathbb{C}^{N_0+N_1}))$. On note :

$$\begin{array}{cccc} \Psi_i = ev_{S_i} : & M \times \mathbb{C}^{N_i} & \longrightarrow & E \\ & (p, v) & \longmapsto & ev_{S,p}(v) \end{array}$$

où $i = 0, 1$ les applications d'évaluation et on pose :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_t : & M \times \mathbb{C}^{N_0} \times \mathbb{C}^{N_1} & \longrightarrow & E \\ & (p, v_0, v_1) & \longmapsto & (1-t)\Psi_0(p, v_0) + t\Psi_1(p, v_1). \end{array}$$

Puisque Ψ_0 et Ψ_1 sont des épimorphismes, Φ_t est un épimorphisme pour tout $t \in [0, 1]$. Soit :

$$\begin{array}{cccc} g_t : & M & \longrightarrow & G_n(\mathbb{C}^{N_0+N_1}) \\ & p & \longmapsto & (\ker \Phi_t(p))^\perp, \end{array}$$

on a :

$$g_0 = j_0 \circ f_{S_0}, \quad g_1 = T_\sigma \circ j_1 \circ f_{S_1}$$

où les $j_i : G_n(\mathbb{C}^{N_i}) \longrightarrow G_n(\mathbb{C}^{N_0+N_1})$ sont les inclusions naturelles et $T_\sigma : G_n(\mathbb{C}^{N_0+N_1}) \longrightarrow G_n(\mathbb{C}^{N_0+N_1})$ est l'application induite par la permutation $\sigma : \mathbb{C}^{N_0} \oplus \mathbb{C}^{N_1} \to \mathbb{C}^{N_1} \oplus \mathbb{C}^{N_0}$. Puisque $Gl(N_0 + N_1, \mathbb{C})$ est connexe, σ est homotope à l'identité et par conséquent T_σ est homotope à $id_{G_n(\mathbb{C}^{N_0+N_1})}$, ce qui conclut. □

Lemme 3. – *Si E_1 et E_2 sont isomorphes alors $f_{E_1} = f_{E_2}$.*

Démonstration. – Soit $\Phi : E_1 \longrightarrow E_2$ un isomorphisme et f_{S_1} avec $S_1 = \{s_1, \cdots, s_{N_1}\}$ un représentant de f_{E_1}. Alors $S_2 = \{\Phi \circ s_1, \cdots, \Phi \circ s_{N_1}\} \in \mathcal{S}(E_2)$ et par construction $f_{S_1} = f_{S_2}$. □

Par conséquent, on a une flèche :

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & Vect_n^{\mathbb{C}}(M) & \longrightarrow & [M, G_n(\mathbb{C}^\infty)] \\ & [E] & \longmapsto & f_E. \end{array}$$

Lemme 4. – *L'application α est l'inverse de β.*

Démonstration. – Soit $S \in \mathcal{S}_N(E)$ et $f_S : M \to G_n(\mathbb{C}^N) \subset G_n(\mathbb{C}^\infty)$, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f_S^* EU(n) & \longrightarrow & EU(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f_S} & G_n(\mathbb{C}^\infty) \end{array}$$

où $f_S^* EU(n) = \{(p, P_P) \in M \times EU(n) \mid f_S(p) = P\}$. Or $f_S(p) = (\ker\ ev_{S,p})^\perp$ avec $ev_S : M \times \mathbb{C}^\infty \to E$, donc $f_S^* EU(n) = (\ker ev_S)^\perp$. Mais ev_S réalise un isomorphisme de fibré entre $(\ker ev_S)^\perp$ et E. Finalement : $f_S^* EU(n) \simeq E$, ce qui peut se réécrire : $\beta \circ \alpha([E]) = [E]$.

Soit $f \in C^0(M, G_n(\mathbb{C}^\infty))$, il existe N tel que $f \in C^0(M, G_n(\mathbb{C}^N))$ (M est compacte). On pose : $F = f^* EU(n) = \{(p, P_P) \in M \times EU(n) \mid f(x) = P\}$, autrement dit, la fibre au dessus de $p \in M$ est $F_p = f(p)$. Soit $S \in \mathcal{S}_N(F)$ et $ev_{S,p} : \mathbb{C}^N \to F_p = f(p) \subset \mathbb{C}^N$, par définition : $f_S(p) = (\ker\ ev_S(p))^\perp$. Notons : $\pi_{f,p} : \mathbb{C}^n = f(p) \oplus f(p)^\perp \to f(p)$ la projection orthogonale, on a : $f(p) = (\ker\ \pi_{f,p})^\perp$. La technique de démonstration du lemme 2, appliquée aux épimorphismes $\Psi_0 = ev_S$ et $\Psi_1 = \pi_f$ montre alors que f et f_S sont homotopes dans $C^0(M, G_n(\mathbb{C}^\infty))$. Or $[f_S] = f_F = f_{f^* EU(n)}$, par conséquent : $[f] = f_{f^* EU(n)} = \alpha \circ \beta[f]$. □

Observations. – 1) Soit $j : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^N$) une immersion (resp. complexe), l'application de Gauss $G : M \to G_n(\mathbb{R}^N)$ (resp. $G_n(\mathbb{C}^N)$) est une application classifiante pour le fibré tangent, i. e.

$$G^* EO(n) = TM \quad (\text{ resp. } G^* EU(n) = TM).$$

2) Une variété M^m est dite *stablement parallélisable* si $TM \oplus \epsilon^1$ est trivial. Cela signifie qu'il existe une application classifiante g à valeur dans $G_m^{or}(\mathbb{R}^{m+1})$, autrement dit, il existe $g : M \longrightarrow \mathbb{S}^m$ telle que $TM = g^* T\mathbb{S}^m$. Le théorème de classification des immersions de Smale-Hirsch affirme, entre autres, que M admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ si et seulement si M est stablement parallélisable.

Fibrés en droites complexes sur la sphère. – A titre d'application, déterminons $Vect_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n)$. On a $G_1(\mathbb{C}^\infty) = \mathbb{C}P^\infty$ et donc :

$$Vect_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) = [\mathbb{S}^n, \mathbb{C}P^\infty] = \pi_n(\mathbb{C}P^\infty).$$

La suite exacte longue d'homotopie de la fibration $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ montre que $\pi_i(\mathbb{C}P^\infty) = \pi_i(\mathbb{S}^1)$ pour tout $i > 0$ (ce qui signifie que $\mathbb{C}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}, 2)$), par conséquent :

$$Vect_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \{0\} & \text{si } n \neq 2, \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

2. Cohomologie des Grassmanniennes

2.1. Le théorème de Leray-Hirsch.

Théorème. – *Soit* $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ *un fibré vectoriel tel que :*

(a) $H^n(F, \mathbb{R})$ *est finiment engendré,*

(b) il existe des classes $c_j \in H^{k_j}(E, \mathbb{R})$ *dont les restrictions* $i^* c_j$ *forment une*

base de $H^*(F,\mathbb{R})$.
Alors l'application :

$$\begin{array}{cccc}\Phi : & H^*(B,\mathbb{R})\otimes H^*(F,\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^*(E,\mathbb{R}) \\ & \sum_{ij} b_i \otimes i^*c_j & \longmapsto & \sum_{ij} p^*b_i \cup c_j\end{array}$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, $H^*(E,\mathbb{R})$ est un $H^*(B,\mathbb{R})$-module libre de base c_j où la multiplication est définie par $bc = p^*c\cup c$ avec $b \in H^*(B,\mathbb{R})$ et $c \in H^*(E,\mathbb{R})$. L'isomorphisme Φ préserve la structure additive et la structure de module sur $H^*(B,\mathbb{R})$, en revanche ce n'est pas un isomorphisme d'anneau, le cup-produit n'est pas préservé en général.

La *série de Poincaré* d'un espace vectoriel gradué $A = \bigoplus_i A_i$ est la série formelle $p_A(t) = \sum_i a_i t^i$ où a_i est la dimension de A_i, qui est supposée finie. Si A et B sont deux espaces vectoriels gradués, il est facile de se convaincre que la série de Poincaré du produit tensoriel gradué $A \otimes B$ est donné par :

$$p_{A\otimes B} = p_A p_B$$

En particulier, sous les hypothèses du théorème de Leray-Hirsch :

$$p_{H^*(E,\mathbb{R})} = p_{H^*(B,\mathbb{R})} p_{H^*(F,\mathbb{R})}.$$

2.2. **Applications.**

2.2.1. *Variétés drapeaux.* On note :

$$\begin{aligned}F_n(\mathbb{C}^k) &= \{n-\text{uplets } (d_1,\cdots,d_n) \text{ de droites complexes deux-à-deux orthogonales}\}\\ &= \{\text{chaînes de sous-espaces } V_1 \subset \cdots \subset V_n \text{ de } \mathbb{C}^n \text{ avec } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}\end{aligned}$$

On montre facilement que les $F_n(\mathbb{C}^k)$ sont des variétés, on pose :

$$F_n(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{k\in N} F_n(\mathbb{C}^k)$$

et on munit cet ensemble de la topologie CW. Soit :

$$\begin{array}{cccc}\pi_i : & F_n(\mathbb{C}^\infty) & \longrightarrow & \mathbb{C}P^\infty \\ & (d_1,\cdots,d_n) & \longmapsto & d_i\end{array}$$

la i-ème projection et $x_i = \pi_i^* x$ où x est un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{R})$[2].

Proposition. – $H^*(F_n(\mathbb{C}^\infty),\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,[x_1,\cdots,x_n]$.

La série de Poincaré de $\mathbb{R}[x_1]$ est $\sum_i t^{2i} = (1-t^2)^{-1}$, puisque $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n] = \mathbb{R}[x_1]\otimes\cdots\otimes\mathbb{R}[x_n]$, la série de Poincaré de $H^*(F_n(\mathbb{C}^\infty),\mathbb{R})$ est $p(t) = (1-t^2)^{-n}$.

Démonstration. – Par récurrence sur n. Puisque $F_1(\mathbb{C}^\infty) = \mathbb{C}P^\infty$, la proposition est vraie pour $n = 1$. Pour passer de $n-1$ à n, on applique le théorème de Leray-Hirsch à la fibration :

$$P(V) \xrightarrow{i} F_n(\mathbb{C}^\infty) \xrightarrow{p} F_{n-1}(\mathbb{C}^\infty).$$

Notons $(e_1,\cdots)$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^\infty$, la fibre de p au dessus de $(d_1,\cdots d_n) = (Vect_{\mathbb{C}}(e_1),\cdots,Vect_{\mathbb{C}}(e_n))$ est l'espace projectif infini

[2]Rappelons que $H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{R}) = \mathbb{R}[x]$.

$P(V)$ où $V = Vect_{\mathbb{C}}(e_n, \cdots)$. L'inclusion naturelle $j : P(V) \to \mathbb{C}P^\infty$ est induite par l'opérateur de décalage : $dec(e_i) = e_{i+n}$ i. e.

$$j(P(V)) = dec(\mathbb{C}P^\infty) \subset \mathbb{C}P^\infty.$$

Or $Id_{\mathbb{C}^\infty}$ et dec sont homotopes parmi les isométries[3]. Il suffit en effet d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à l'homotopie $(1-t)Id_{\mathbb{C}^\infty} + tdec$. L'homotopie obtenue fournit une rétraction de $\mathbb{C}P^\infty$ sur $dec(\mathbb{C}P^\infty)$. Par conséquent, $P(V)$ et $\mathbb{C}P^\infty$ sont homotopiquement équivalents et on peut écrire la fibration ci-dessus sous la forme :

$$\mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{i} F_n(\mathbb{C}^\infty) \xrightarrow{p} F_{n-1}(\mathbb{C}^\infty).$$

Notons que :

1) $H^n(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{R}) = \mathbb{R} < x^n >$ est finiment engendré,

2) La composition $\mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{i} F_n(\mathbb{C}^\infty) \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{C}P^\infty$ est précisément le décalage dec, donc $(\pi_n \circ i)^*$ est l'identité en cohomologie et donc $i^* x_n^k = i^*(\pi_n^* x^k) = x^k$ est une base de $H^{2k}(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{R})$. Le théorème de Leray-Hirsch donne alors le résultat.□

Les mêmes techniques permettent de démontrer que :

Proposition. – $H^*(F_n(\mathbb{C}^k), \mathbb{R}) = \mathbb{R} < x_1^{i_1}, \cdots, x_n^{i_n}, i_j \leq k - j >$.

Il en résulte que la cohomologie de $H^*(F_n(\mathbb{C}^k), \mathbb{R})$ est celle de $\mathbb{C}P^{k-1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{k-n}$. La série de Poincaré de $H^*(F_n(\mathbb{C}^k), \mathbb{R})$ a donc pour expression :

$$(1 + t^2 + \cdots + t^{2(k-n)}) \cdots (1 + t^2 + \cdots + t^{2(k-1)}) = \prod_{i=k-n}^{k} \frac{1 - t^{2i}}{1 - t^2}.$$

2.2.2. *La grassmannienne complexe.*

Proposition. – $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R}) = \mathbb{R}\,[c_1, \cdots, c_n]$ *où* $\deg c_i = 2i$.

La série de Poincaré de $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R})$ est donc $p(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^{2i})^{-1}$.

Démonstration. – Considérons la fibration :

$$F_n(\mathbb{C}^n) \longrightarrow F_n(\mathbb{C}^\infty) \xrightarrow{p} G_n(\mathbb{C}^\infty).$$

Les résultats précédents montrent que les hypothèses du théorème de Leray-Hirsch sont satisfaites, par conséquent $H^*(F_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R})$ est un module libre sur $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R})$ ayant pour base les monômes $x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}$, $i_j \leq n - j$. Nous allons montrer que le monomorphisme

$$p^* : H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(F_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$$

a pour image l'ensemble des polynômes symétriques de $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$. Cet ensemble forme l'anneau polynomial $\mathbb{R}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ où les σ_i sont les polynômes symétriques élémentaires,[4] en posant $c_i = p^* \sigma_i$ on obtient le résultat de la proposition.

[3] A savoir, des applications linéaires conservant le produit scalaire, ce ne sont pas nécessairement des isomorphismes.

[4] En tant que polynôme, $deg\ \sigma_i = i$ mais en tant que forme $deg\ \sigma_i = 2i$.

Soit σ une permutation des entiers $1, \cdots, n$, elle induit une "permutation" $\sigma : F_n(\mathbb{C}^\infty) \to F_n(\mathbb{C}^\infty)$ et σ^* permute les variable de $H^*(F_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$. Puisque $p \circ \sigma = p$, on a $\sigma^* \circ p^* = p^*$ ce qui signifie que $Im\ p^* \subset \mathbb{R}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$. Notons que la série de Poincaré de $\mathbb{R}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ est $\prod_{i=1}^n (1 - t^{2i})^{-1}$ car $deg\ \sigma_i = 2i$. Cette série est précisément celle de $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{R})$, par conséquent, pour des raisons purement dimensionnelles : $Im\ p^* = \mathbb{R}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$. $\square$

Quelques changements mineurs dans cette démonstration permettent de montrer que :

$$H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\,[c_1, \cdots, c_n] \text{ où } \deg c_i = 2i.$$

2.2.3. *Les autres grassmanniennes.*

Des approches similaires permettent de calculer les groupes de cohomologies des autres grassmanniennes. On obtient :

$$\begin{array}{lcll}
H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) & = & \mathbb{Z}_2[w_1, \cdots, w_n] & \text{où } \deg w_i = i. \\
H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{R}) & = & \mathbb{R}\,[p_1, \cdots, p_{[n/2]}] & \text{où } \deg p_i = 4i. \\
H^*(G^{or}_{2m+1}(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{R}) & = & \mathbb{R}\,[p_1, \cdots, p_m] & \text{où } \deg p_i = 4i. \\
H^*(G^{or}_{2m}(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{R}) & = & \mathbb{R}\,[p_1, \cdots, p_{m-1}, e] & \text{où } \deg p_i = 4i,\ \deg e = 2m.
\end{array}$$

Pour ces résultats, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un domaine intégral[5] contenant $1/2$ (par exemple $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ ou $\mathbb{Q}$) mais pas par $\mathbb{Z}$. En fait, un calcul explicite de $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z})$ et $H^*(G^{or}_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z})$ montre que tous les éléments de torsion sont d'ordre 2 et que, modulo cette torsion, les cohomologies entières sont des anneaux polynomiaux de engendrés par les p_i (et par e pour $G^{or}_{2m}(\mathbb{R}^\infty)$).

Les relations entre les diverses classes sont les suivantes. Soit $\pi : G^{or}_n(\mathbb{R}^\infty) \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$ la projection naturelle, les trois dernières lignes signifient en particulier que :

$$\pi^* p_i = p_i.$$

Soient $i : G_n(\mathbb{C}^\infty) \longrightarrow G^{or}_{2n}(\mathbb{R}^\infty)$ l'inclusion naturelle et $\mu^* : H^*(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme des coefficients (avec $X = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ ou $X = G^{or}_{2n}(\mathbb{R}^\infty)$). On a :

$$i^* e = c_n, \quad i^* w_{2i} = \mu^* c_i, \quad p_i = \mu^* w_{2i}^2.$$

Soit $j : G_n(\mathbb{R}^\infty) \to G_n(\mathbb{C}^\infty)$, $V \mapsto V \otimes \mathbb{C}$, on a aussi :

$$p_i = (-1)^i j^* c_{2i}.$$

3. Bibliographie

Pour écrire ces quelques pages, je me suis inspiré des ouvrages suivants :

M. Atiyah, *K-theory*, W. A. Benjamin, Inc. 1967.

R. Bott et L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1982.

[5] Un anneau commutatif avec élément neutre et sans diviseur de zéro.

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

Institut Girard Desargues – UPRES-A 5028 du CNRS, Université Claude Bernard, Lyon 1, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: borrelli@igd.univ-lyon1.fr