CLASSES CARACTÉRISTIQUES D'UN FIBRÉ

VINCENT BORRELLI

1. Définitions et premières propriétés

Soit E un fibré vectoriel complexe de rang n au dessus de M, la *k-ième classe de Chern* de E est la classe :

$$c_k(E) = f_E^* c_k \in H^{2k}(M, \mathbb{Z})$$

où $f_E : M \to G_n(\mathbb{C}^\infty)$ est l'application classifiante de E et c_k la classe apparue au chapitre précédent dans le calcul de la cohomologie de la grassmannienne $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, ..., c_n]$, deg $c_k = 2k$. La *classe de Chern totale* est l'élément :

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E) \in H^*(M, \mathbb{Z}).$$

De même, $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, ..., w_n]$, avec deg $w_k = k$ et la *k-ième classe de Stiefel-Whitney* d'un fibré vectoriel réel de rang n au dessus de M est la classe :

$$w_k(E) = f_E^* w_k \in H^k(M, \mathbb{Z}_2),$$

où $f_E : M \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$ est l'application classifiante. La *classe de Stiefel-Whitney totale* est l'élément :

$$w(E) = 1 + w_1(E) + \cdots + w_n(E) \in H^*(M, \mathbb{Z}_2).$$

La *k-ième classe de Pontrjagin* de E est la classe :

$$p_k(E) = f_E^* p_k \in H^{4k}(M, \mathbb{Z}).$$

La *classe de Pontrjagin totale* est l'élément :

$$p(E) = 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[n/2]}(E) \in H^*(M, \mathbb{Z}).$$

Si E est un fibré réel orienté de rang n, sa *classe d'Euler* est la classe :

$$e(E) = f_E^* e \in H^n(M, \mathbb{Z})$$

où $f_E : M \to G_n^{or}(\mathbb{R}^\infty)$ est l'application classifiante.

Afin d'alléger la rédaction, on va s'intéresser uniquement aux classes de Chern, mais les propriétés énoncées ci-dessous sont également satisfaites *mutatis mutandis* pour les autres classes caractéristiques.

Propriété de naturalité. – *Soient $E \to M$ et $H \to N$ deux fibrés complexes de même rang, $\Phi : E \to H$ une application de fibrés, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in M$, l'application linéaire $\Phi_x : E_x \to H_{\varphi(x)}$ soit un $\mathbb{C}$-isomorphisme (on a noté $\varphi = bs(\Phi) : M \to N$), alors : $c_k(E) = \varphi^* c_k(H)$.*

En particulier un difféomorphisme $\varphi : M \to N$ induit une application de fibrés $d\varphi : TM \to TN$ et par conséquent $c_k(TM) = \varphi^* c_k(TN)$. Une application quelconque φ entre M et N induit une application de fibrés $\varphi^* H \to H$ et par conséquent $c_k(\varphi^* H) = \varphi^* c_k(H)$.

Cette propriété montre également la non trivialité de la classe de Chern. Si N est assez grand, l'inclusion naturelle $G_n(\mathbb{C}^N) \xrightarrow{i} G_n(\mathbb{C}^\infty)$ induit un isomorphisme en cohomologie : $H^k(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^k(G_n(\mathbb{C}^N), \mathbb{Z})$ si $k \leq n$. Par conséquent, si $E = i^* EU(n)$ alors $c_k(E) = i^* c_k(EU(n)) = i^* c_k$ est non nul.

La propriété de naturalité pour la classe d'Euler s'énonce ainsi : soient $E \to M$ et $H \to N$ deux fibrés réels orientés de même rang, $\Phi : E \to H$ une application de fibrés *qui préserve l'orientation*, alors $\varphi^* e(H) = e(E)$ où $\varphi = bs(\Phi)$.

Démonstration. – Soit $S = \{s_1, ..., s_N\} \in \mathcal{S}(H)$, pour tout $1 \leq i \leq N$, on définit :

$$\begin{array}{rccl} \sigma_i : & M & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \Phi^{-1}_{\varphi(x)}(s_i(\varphi(x))), \end{array}$$

ainsi $\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_N\}$ est un élément de $\mathcal{S}(E)$. On a :

$$\begin{array}{rccl} ev_{S,y} : & (\alpha_1, ..., \alpha_N) & \longmapsto & \sum_{i=1}^N \alpha_i s_i(y) \\ ev_{\Sigma,x} : & (\alpha_1, ..., \alpha_N) & \longmapsto & \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_i(x) = \Phi^{-1}_{\varphi(x)}(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(\varphi(x))) \end{array}$$

donc $ev_{\Sigma,x} = \Phi^{-1}_{\varphi(x)}(ev_{S,\varphi(x)})$. Rappelons que $f_\Sigma(x) = (\ker ev_{\Sigma,x})^\perp$, or

$$(\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \ker ev_{\Sigma,x} \iff (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \ker ev_{S,\varphi(x)}.$$

Ainsi $f_\Sigma(x) = f_S(\varphi(x))$ et donc $f^*_\Sigma = \varphi^* f^*_S$, ce qui démontre la proposition. □

Proposition. – *Soit ϵ^k un fibré trivial de rang k alors $c_i(E \oplus \epsilon^k) = c_i(E)$.*

Démonstration. – Soit $S = \{s_1, ..., s_N\} \in \mathcal{S}(E)$, puisque $\epsilon^k \to M$ est trivial, il existe k sections $\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ telles que $\Sigma \in \mathcal{S}(\epsilon^k)$. Ainsi $S' = S \cup \Sigma \in \mathcal{S}(E \oplus \epsilon^k)$. On note $i : \mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{N+k}$ l'inclusion naturelle, on a :

$$\forall x \in M, \quad i(\ker ev_{S,x}) = \ker ev_{S',x}$$

car les sections $\sigma_1, ..., \sigma_k$ ne s'annulent jamais. En particulier :

$$\begin{array}{rcl} f_{S'}(x) & = & (\ker ev_{S',x})^\perp \\ & = & i(\ker ev_{S,x})^\perp \oplus \mathbb{C}^k \\ & = & i(f_S(x)) \oplus \mathbb{C}^k. \end{array}$$

Si $j : G_n(\mathbb{C}^N) \to G_{n+k}(\mathbb{C}^n)$ est l'inclusion naturelle, on a donc : $f_{S'} = j \circ f_S$, d'où le résultat. □

2. La formule du produit

Il existe une formule du produit pour la classe d'Euler, pour la classe de Chern totale, pour celle de Stiefel-Whitney et pour celle de Pontrjagin. Faute de place, nous admettons la formule du produit pour la classe d'Euler.

Proposition. – *Soient E et H deux fibrés réels orientés alors :*

$$e(E \oplus H) = e(E)e(H).$$

Le lemme suivant nous sera utile pour établir la formule du produit pour la classe de Chern totale.

Lemme. – *Soient E et H deux fibrés complexes au dessus de M de rang n et m. Il existe un unique polynôme $p_{n,m}$ à coefficient entier et à $n+m$ indéterminées tel que :*

$$c(E \oplus H) = p_{n,m}(c_1(E), ..., c_n(E), c_1(H), ..., c_m(H)).$$

Démonstration. – Soient $\pi_1 : G_n(\mathbb{C}^\infty) \times G_m(\mathbb{C}^\infty) \to G_n(\mathbb{C}^\infty)$ et $\pi_2 : G_n(\mathbb{C}^\infty) \times G_m(\mathbb{C}^\infty) \to G_m(\mathbb{C}^\infty)$ les projections naturelles, on pose : $EU(n)_1 = \pi_1^* EU(n)$ et $EU(m)_2 = \pi_2^* EU(m)$, on a alors :

$$EU(n)_1 \oplus EU(m)_2 = EU(n) \times EU(m).$$

D'autre part, l'isomorphisme de Künneth

$$\begin{array}{ccc} H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) \otimes H^*(G_m(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty) \times G_m(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) \\ a \otimes b & \longmapsto & \pi_1^* a \cup \pi_1^* b \end{array}$$

permet d'affirmer que $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty) \times G_m(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z})$ est engendré par les générateurs indépendants :

$$\pi_1^* c_i(EU(n)) = c_i(EU(n)_1), \quad \pi_2^* c_i(EU(m)) = c_i(EU(m)_2).$$

Par conséquent, il existe un unique polynôme $p_{n,m}$ tel que :

$$c(EU(n)_1 \oplus EU(m)_2) = p_{n,m}(c_1(EU_1(n)), ..., c_N(EU(m)_2)).$$

Via les applications classifiantes et grâce à la propriété de naturalité, cette relation se transporte sur $H^*(M, \mathbb{Z})$. En effet, soient f et h telles que :

$$E = f^* EU(n), \quad H = h^* EU(m),$$

on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & G_n(\mathbb{C}^\infty) \\ h \downarrow & \searrow g & \uparrow \pi_1 \\ G_m(\mathbb{C}^\infty) & \xleftarrow[\pi_2]{} & G_n(\mathbb{C}^\infty) \times G_m(\mathbb{C}^\infty). \end{array}$$

où on a noté $g = (f, h)$. Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} c(E \oplus H) & = & c(f^* EU(n) \oplus h^* EU(m)) \\ & = & c(g^* EU(n)_1 \oplus EU(m)_2) \\ & = & g^* c(EU(n)_1 \oplus EU(m)_2) \\ & = & p_{n,m}(c_1(EU(n)), ..., c_N(EU(m)_2)). \end{array}$$

□

Proposition. – *Soient E et H deux fibrés complexes au dessus de la même base, alors :*

$$c(E \oplus H) = c(E)c(H).$$

Démonstration. – On reprend les notations introduites dans la démonstration du lemme précédent. Grâce aux applications classifiantes, il suffit d'établir cette relation pour les fibrés universels $EU(n)_1$ et $EU(m)_2$. Nous allons la démontrer par récurrence. Si $m+n=0$ alors :

$$c(EU(n)_1)=1,\ \ c(EU(m)_2)=1,\quad \text{et}\quad c(EU(n)_1\oplus EU(m)_2)=1$$

et la relation est vérifiée. On suppose maintenant que :

$$c(EU(n)_1\oplus EU(m-1)_2)=c(EU(n)_1)c(EU(m-1)_2).$$

D'après le lemme précédent :

$$\begin{array}{rcl} c(EU(n)_1\oplus EU(m-1)_2) & = & c(EU(n)_1\oplus(EU(m-1)_2\oplus\epsilon^1)) \\ & = & p_{n,m}(c_1,...,c_n,c'_1,...,c'_{m-1},0), \end{array}$$

où on a noté $c_i=c_i(EU(n)_1)$ et $c'_i=c'_i(EU(m-1)_2)$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$p_{n,m}(c_1,...,c_n,c'_1,...,c'_{m-1},0)=(1+c_1+...+c_n)(1+c'_1+...+c'_{m-1})$$

donc :

$$p_{n,m}(c_1,...,c_n,c'_1,...,c'_m)=(1+c_1+...+c_n)(1+c'_1+...+c'_{m-1})+c_mR_1(c_1+...+c_n,c'_1,...,c'_{m-1}).$$

Symétriquement, la relation :

$$c(EU(n-1)_1\oplus EU(m)_2)=c(EU(n-1)_1)c(EU(m)_2)$$

donne :

$$p_{n,m}(c_1,...,c_n,c'_1,...,c'_m)=(1+c_1+...+c_{n-1})(1+c'_1+...+c'_m)+c_nR_2(c_1+...+c_{n-1},c'_1,...,c'_m).$$

La comparaison entre les deux relations permet d'écrire :

$$p_{n,m}(c_1,...,c_n,c'_1,...,c'_m)=(1+c_1+...+c_n)(1+c'_1+...+c'_m)+\lambda c_nc_m$$

où $\lambda\in\mathbb{Z}$. En particulier :

$$c_{n+m}(EU(n)_1\oplus EU(m)_2)=(1+\lambda)c_n(EU(n)_1)c_m(EU(m)_2).$$

Or $e(E)=c_n(E)$ et $e(E\oplus H)=e(E)e(H)$ donc $\lambda=0$. □

Remarque. – Pour la classe totale de Stiefel-Whitney, le théorème du produit s'énonce similairement : $w(E\oplus H)=w(E)w(H)$. Pour la classe totale de Pontrjagin $p(E\oplus H)$ est congruent à $p(E)p(H)$ modulo les éléments d'ordre 2, autrement dit : $2p(E\oplus H)=p(E)p(H)$.

3. Applications

3.1. **Calcul des classes de Chern de $\mathbb{C}P^n$.** Soit $\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^{2n+2}\setminus\{0\}\xrightarrow{f}\mathbb{C}P^n$ la fibration de Hopf, la différentielle de la fibration de Hopf en $x\in\mathbb{C}^{2n+2}\setminus\{0\}$ induit un $\mathbb{C}$-isomorphisme :

$$df_x:[x]^\perp\longrightarrow T_{[x]}\mathbb{C}P^n$$

où on a posé $[x]^\perp=(Vect_{\mathbb{C}}(x))^\perp$. La relation $f(\lambda x)=f(x)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$, implique :

$$df_{\lambda x}(\lambda v)=df_x(v),$$

par conséquent, l'application :

$$\begin{array}{rcl} Hom([x],[x]^\perp) & \longrightarrow & T_{[x]}\mathbb{C}P^n \\ L & \longmapsto & df_x(L(x)) \end{array}$$

est bien définie et réalise un $\mathbb{C}$-isomorphisme. On note

$$\gamma^1 = \{([x], v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in [x]\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

le fibré tautologique et

$$\gamma^\perp = \{([x], v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid (v, x) = 0\}$$

le fibré orthogonal. On vient de montrer que les fibrés $T\mathbb{C}P^n$ et $Hom(\gamma^1, \gamma^\perp)$ sont isomorphes. D'autre part $\epsilon^1 = Hom(\gamma^1, \gamma^1)$ donc :

$$\begin{aligned} T\mathbb{C}P^n \oplus \epsilon^1 &= Hom(\gamma^1, \gamma^\perp) \oplus Hom(\gamma^1, \gamma^1) \\ &= Hom(\gamma^1, \gamma^\perp \oplus \gamma^1) \\ &= Hom(\gamma^1, \epsilon^{n+1}) \\ &= Hom(\gamma^1, \epsilon^1) \oplus ... \oplus Hom(\gamma^1, \epsilon^1). \end{aligned}$$

Mais $Hom(\gamma^1, \epsilon^1)$ est isomorphe à γ^1, ainsi :

$$T\mathbb{C}P^n \oplus \epsilon^1 = \gamma^1 \oplus ... \oplus \gamma^1, \quad (n+1 \text{ fois}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} c(T\mathbb{C}P^n) &= c(T\mathbb{C}P^n \oplus \epsilon^1) \\ &= c(\gamma^1 \oplus ... \oplus \gamma^1) \\ &= c(\gamma^1)^{n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inclusion naturelle $i : \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^\infty$ induit un isomorphisme $\mathbb{Z} = H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $\gamma^1 = i^* EU(1)$, donc :

$$c_1(\gamma^1) = i^* c_1(EU(1))$$

est un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$, on le note a. Ainsi $c(\gamma^1) = 1 + a$ et

$$c(T\mathbb{C}P^n) = (1+a)^{n+1}.$$

De manière similaire, on montre que $w(T\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1}$ où a est un générateur de $H^1(T\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

3.2. **Existence d'immersions.** Supposons qu'une variété M admette une immersion $f : M \to W$, alors :

$$f^*TW = TM \oplus N_f M$$

où $N_f M$ est le fibré normal de l'immersion f, par conséquent :

$$w(f^*TW) = w(TM) w(N_f M).$$

La classe de Stiefel-Whitney peut donc parfois fournir une obstruction à l'existence d'immersion. A titre d'illustration, choisissons $W = \mathbb{R}^6$, $M = \mathbb{R}P^4$, la relation s'écrit :

$$1 = w(\mathbb{R}P^4) w(N_f \mathbb{R}P^4)$$

donc $w(\mathbb{R}P^4)$ est inversible et son inverse est dans $H^{*\leq 2}(\mathbb{R}P^4, \mathbb{Z}_2)$. Ecrivons :

$$w(N_f \mathbb{R}P^4) = 1 + u_1 + u_2$$

où $u_i \in H^i(\mathbb{R}P^4, \mathbb{Z}_2)$, puisque $w(\mathbb{R}P^4) = 1 + a + a^4$, on doit avoir :

$$1 = (1 + a + a^4)(1 + u_1 + u_2).$$

Il est immédiat de vérifier que cette équation n'a pas de solution. Ainsi, il n'existe pas d'immersion de $\mathbb{R}P^4$ dans $\mathbb{R}^6$. (En revanche, il existe des immersions de $\mathbb{R}P^4$ dans $\mathbb{R}^7$).

3.3. **Classification des fibrés.** Les classes caractéristiques permettent de distinguer les classes d'isomorphismes de fibrés, on donne quelques résultats sans démonstration (la base des fibrés est une variété M de dimension quelconque).

FIBRÉS EN DROITES COMPLEXES. – Ils sont classés par la première classe de Chern, précisément c_1 réalise une bijection entre $Vect_1^{\mathbb{C}}(M)$ et $H^2(M, \mathbb{Z})$.

FIBRÉS EN PLANS COMPLEXES. – Deux tels fibrés E_1 et E_2 sont isomorphes si et seulement si $c_1(E_1) = c_1(E_2)$ et $c_2(E_1) = c_2(E_2)$. En fait, le couple (c_1, c_2) réalise une bijection entre $Vect_2^{\mathbb{C}}(M)$ et $H^2(M, \mathbb{Z}) \times H^4(M, \mathbb{Z})$.

FIBRÉS EN DROITES RÉELLES. – Ils sont classés par la première classe de Stiefel-Whitney, précisément, w_1 réalise une bijection entre $Vect_1^{\mathbb{R}}(M)$ et $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

FIBRÉS EN PLANS RÉELS ORIENTÉS. – L'orientation permet de construire sur ces fibrés une structure complexe sur chaque fibre, on peut donc les voir comme des fibrés en droites complexes, par conséquent leur classification découle de celle des fibrés en droites complexes. Tout ceci ne fait que refléter l'isomorphisme entre $SO(2)$ et $U(1)$.

FIBRÉS EN 3-PLANS RÉELS ORIENTÉS. – Deux tels fibrés E_1 et E_2 sont isomorphes si et seulement si $w_2(E_1) = w_2(E_2)$ et $p_1(E_1) = p_1(E_2)$. De plus $p_1(E_1) = \mathcal{P}(w_2(E_1)) \bmod 4$ où $\mathcal{P} : H^2(M, \mathbb{Z}_2) \to H^4(M, \mathbb{Z}_4)$ est le carré de Pontrjagin. Réciproquement, pour toute paire (p_1, w_2) telle que $p_1 = \mathcal{P}(w_2) \bmod 4$, il existe un fibré en 3-plans réels orientés $E \to M$ tel que $p_1(E) = p_1$ et $w_2(E) = w_2$.

FIBRÉS EN 4-PLANS RÉELS ORIENTÉS. – Deux tels fibrés E_1 et E_2 sont isomorphes si et seulement si $w_2(E_1) = w_2(E_2)$ et $p_1(E_1) = p_1(E_2)$ et $e(E_1) = e(E_2)$.

4. BIBLIOGRAPHIE

Pour écrire ces quelques pages je me suis inspiré des ouvrages suivants :

R. GOMPF ET A. STIPSICZ, *An introduction to 4-manifolds and Kirby calculus*, (Appendice sur les classes caractéristiques) Graduate studies in mathematics, AMS, n. 20, 1999.

J. MILNOR ET J. STASHEFF, *Characteristic classes*, Annals of mathematics studies, number 76, Princeton University Press.

INSTITUT GIRARD DESARGUES – UPRES-A 5028 DU CNRS, UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD, LYON 1, 43, BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: `borrelli@igd.univ-lyon1.fr`