L'ANNEAU DE COBORDISME

VINCENT BORRELLI

1. Nombres de Chern et nombres de Pontrjagin

Définition. – Une *partition* I d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est une famille ordonnée d'entiers strictement positifs $i_1, ..., i_r$ tels que $i_1 + ... + i_r = n$.

On note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n et $p(n)$ le cardinal de cet ensemble.

1.1. **Nombres de Chern d'une variété complexe.** Soit M^n une variété complexe compacte et I une partition de $n = \dim_{\mathbb{C}} M$, le $I^{\text{ième}}$ *nombre de Chern* de M est l'entier :

$$c_I(M) =< c_{i_1} \cup ... \cup c_{i_r}, [M] > .$$

Exemple. – Soit $I = \{i_1, ..., i_r\}$, puisque $c_i(\mathbb{C}P^n) = C^i_{n+1} a^i$, le $I^{\text{ième}}$ nombre de Chern de $\mathbb{C}P^n$ est : $c_I(\mathbb{C}P^n) =< c_{i_1} \cup ... \cup c_{i_r}, [\mathbb{C}P^n] >= C^{i_1}_{n+1} ... C^{i_r}_{n+1}$.

Si $\dim_{\mathbb{C}} M$=1, il y a un seul nombre de Chern qui est la première classe de Chern $c_1(M) =< c_1(TM), [M] >$, ou encore la caractéristique d'Euler. Si $\dim_{\mathbb{C}} M$=2, il y a deux nombres de Chern qui sont $c_1^2(M)$ et la caractéristique d'Euler $c_2(M)$. En général, si $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, il y a $p(n)$ nombres de Chern. Les premières valeurs de $p(n)$ sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	100	...	1000
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	...	190569292	...	$\sim 2.10^{31}$

Le nombre $p(n)$ croît rapidement avec n, on a :

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Notons que $H^{2n}(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z})$ est précisément un groupe abélien libre de rang $p(n)$ sur $\mathbb{Z}$ et engendré par les produits $c_{i_1} \cup ... \cup c_{i_r}$. Par conséquent, si $f : M \longrightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$ est l'application classifiante de TM, les $c_I(M)$ déterminent l'image $f_*[M]$ de la classe fondamentale dans $H^{2n}(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z})$.

1.2. **Nombres de Pontrjagin d'une variété.** Soit M^n une variété orientée compacte de dimension réelle $n = 4m$ et I une partition de m, le $I^{\text{ième}}$*nombre de Pontrjagin* de M est l'entier :

$$p_I(M) =< p_{i_1} \cup ... \cup p_{i_r}, [M] > .$$

Exemple. – Soit $I = \{i_1, ..., i_r\}$, le $I^{\text{ième}}$ nombres de Pontrjagin de $\mathbb{C}P^{2n}$ est : $p_I(\mathbb{C}P^{2n}) =< p_{i_1} \cup ... \cup p_{i_r}, [\mathbb{C}P^{2n}] >= C_{2n+1}^{i_1} ... C_{2n+1}^{i_r}$.

Convention. – Pour ne pas confondre une classe et un nombre, on note $p_I(TM)$ la classe $p_{i_1}(TM) \cup ... \cup p_{i_r}(TM)$ et $p_I(M)$ le nombre $< p_I(TM), [M] >$.

Proposition. – *S'il existe un difféomorphisme de M^{4m} renversant l'orientation, alors $p_I(M) = 0$ pour toutes les partitions I de m.*

Exemple. – D'après l'exemple ci-dessus, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{2n}$ n'admet pas de difféomorphisme renversant l'orientation. La conjugaison complexe dans $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ passe au quotient et fournit un difféomorphisme de $\mathbb{C}P^N$, mais ce difféomorphisme ne renverse l'orientation que si N est impair.

Démonstration. – Soit $\varphi : M \longrightarrow M$ un difféomorphisme renversant l'orientation, i. e. $\varphi_*[M] = -[M]$. par naturalité, $p_i(TM) = \varphi^* p_i(TM)$, par conséquent :

$$\begin{aligned} < p_I(TM), [M] > &= < \varphi^* p_I(TM), [M] > \\ &= < p_I(TM), \varphi_*[M] > \\ &= < p_I(TM), -[M] > \end{aligned}$$

donc : $< p_I(TM), [M] >= 0$. □

Remarque. – Cette proposition n'est pas valide pour la caractéristique d'Euler, par exemple sur $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^2$, la réflexion équatoriale renverse l'orientation et pourtant $< e(T\mathbb{S}^2), [\mathbb{S}^2] >= 2$. La démonstration précédente ne s'applique pas pour e car précisément, la propriété de naturalité de la classe d'Euler n'est satisfaite que pour les applications qui préservent l'orientation des fibres.

Proposition. – *Si M^{4m} borde une variété compacte orientée, alors $p_I(M) = 0$ pour toute partition I de m.*

Démonstration. – Supposons que M borde une variété compacte orientée W et soit $i : M = \partial W \longrightarrow W$ l'inclusion naturelle, on a :

$$i^* TW = TM \oplus \epsilon^1$$

où ϵ^1 est le fibré trivial de rang 1 sur M, donc :

$$i^* p_I(TW) = p_I(i^* TW) = p_I(TM \oplus \epsilon^1) = p_I(TM).$$

Par conséquent :

$$p_I(M) =< p_I(TM), [M] >=< i^* p_I(TW), [M] >=< p_I(TW), i_*[M] >,$$

or $i_*[M] = 0$ car M est bordante, donc $p_I(M) = 0$. □

2. Cobordisme orientée

On note par le symbole + l'union disjointe de deux variétés et par $-M$ la variété M munit de l'orientation opposée. On dit que deux variétés orientées M et M' compactes sans bord C^∞ sont cobordantes si il existe une variété compacte C^∞ orientée W telle que :

$$\partial W = M + (-M').$$

Il est immédiat de vérifier que la relation de cobordisme orienté est une relation d'équivalence et on note Ω_n l'ensemble des classes d'équivalence des cobordismes orientés des variétés de dimension n. Cet ensemble est un groupe abélien pour l'addition donnée par l'union disjointe i. e. $[M_1] + [M_2] := [M_1 + M_2]$. Bien sûr si $[M_1] = [N_1]$ et $[M_2] = [N_2]$ alors trivialement $[M_1 + M_2] = [N_1 + N_2]$ et par conséquent cette addition est bien définie. L'élément zéro est la classe de cobordisme $[\emptyset]$ de l'ensemble vide $\emptyset$, l'inverse de $[M]$ est $[-M]$, la variété W étant le cylindre $M \times [0, 1]$. Le produit cartésien $(M_1^{n_1}, M_2^{n_2}) \longrightarrow M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ induit une multiplication :

$$\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2} \longrightarrow \Omega_{n_1+n_2}.$$

En effet, si $[M_1] = [N_1]$ et $[M_2] = [N_2]$ alors clairement : $[M_1 \times M_2] = [N_1 \times M_2] = [N_1 \times N_2]$, ce qui signifie que le produit cartésien passe au quotient. Par conséquent :

$$\Omega_* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega_k$$

est un anneau gradué. L'élément 1 est donné par la classe $[*]$ du point dans Ω_0, d'autre part la multiplication est commutative au sens gradué puisque :

$$\begin{array}{ccc} M_1^{n_1} \times M_2^{n_2} & \longrightarrow & M_2^{n_2} \times M_1^{n_1} \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

conserve ou renverse l'orientation selon le signe de $(-1)^{n_1 n_2}$.

Proposition. – *Soit I une partition de m, alors :*

$$\begin{array}{cccc} p_I : & \Omega_{4m} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [M^{4m}] & \longmapsto & p_I(M^{4m}) \end{array}$$

est un homomorphisme de groupe.

Démonstration. – Montrons d'abord que cette application est bien définie. Soient M_1^{4m} et M_2^{4m} telles que $[M_1^{4m}] = [M_2^{4m}]$, il existe donc une variété orientée à bord W^{4m+1} telle que : $\partial W^{4m+1} = M_1^{4m} - M_2^{4m}$. Notons $i_1 : M_1 \to W$ et $i_2 : M_2 \to W$ les inclusions naturelles, on a :

$$i_1^* TW = TM_1 \oplus \epsilon, \quad i_2^* TW = TM_2 \oplus \epsilon.$$

D'autre part, $i_{1*}[M_1] = i_{2*}[M_2]$ dans $H_{4m}(W, \mathbb{Z})$ donc :

$$< p_I(TW), i_{1*}[M_1] >=< p_I(TW), i_{2*}[M_2] > .$$

Par naturalité ceci implique :

$$< p_I(i_1^* TW), [M_1] >=< p_I(i_2^* TW), [M_2] > .$$

Puisque $p_I(TM \oplus \epsilon) = p_I(TM)$, on obtient :

$$< p_I(TM_1), [M_1] >=< p_I(TM_2), [M_2] >,$$

i. e. $p_I(M_1) = p_I(M_2)$, autrement dit, $p_I : \Omega_{4m} \to \mathbb{Z}$ est bien définie. D'autre part : $p_I([M_1 + M_2]) = p_I(M_1 + M_2) = p_I(M_1) + p_I(M_2) = p_I([M_1]) + p_I([M_2])$. $\square$

Si $I = \{i_1, ..., i_r\} \in \mathcal{P}(m)$, on note $\mathbb{C}P^I = \mathbb{C}P^{2i_1} \times ... \times \mathbb{C}P^{2i_r}$.

Proposition. – *La famille* $\{[\mathbb{C}P^I]\}_{I\in\mathcal{P}(m)}$ *est linéairement indépendante dans* Ω_{4m}*, en particulier : rang* $\Omega_{4m} \geq p(m)$.

Démonstration. – Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale telle que :

$$\sum_{J\in\mathcal{P}(m)} \alpha_J[\mathbb{C}P^J] = 0, \quad \alpha_J \in \mathbb{Z}.$$

Alors :

$$\forall I \in \mathcal{P}(m), \quad \sum_{J\in\mathcal{P}(m)} \alpha_J p_I[\mathbb{C}P^J] = 0,$$

autrement dit, la matrice $p(m)\times p(m)$: $P = (p_I[\mathbb{C}P^J])_{I,J}$ est singulière : *det* $P = 0$. L'idée de la démonstration est la suivante : on montre que cette matrice n'est pas singulière en la transformant en une matrice triangulaire au moyen de combinaisons linéaires des lignes, le déterminant se calcule alors très facilement en effectuant le produit des éléments de la diagonale. On ne traitera ici que le cas $m = 2$. La matrice P est alors une matrice 2×2 :

$$P = \begin{pmatrix} p_1^2(\mathbb{C}P^2\times\mathbb{C}P^2) & p_1^2(\mathbb{C}P^4) \\ p_2(\mathbb{C}P^2\times\mathbb{C}P^2) & p_2(\mathbb{C}P^4) \end{pmatrix}.$$

Si M et N sont deux variétés alors :

$$T(M\times N) = i^*TM \times j^*TN$$

où $i : M \longrightarrow M\times N$ et $j : N \longrightarrow M\times N$ sont des inclusions naturelles. On a :

$$p(M\times N) = i^*p(M)\cup j^*p(N),$$

et en particulier, si $\dim M = \dim N = 4$:

$$\begin{array}{rcl} p_1(M\times N) & = & i^*p_1(M) + j^*p_1(N) \\ p_1^2(M\times N) & = & 2i^*p_1(M)\cup j^*p_1(N) \\ p_2(M\times N) & = & i^*p_1(M)\cup j^*p_1(N). \end{array}$$

modulo les éléments d'ordre 2 (inexistants dans les $\mathbb{C}P^J$). Ainsi la transformation : $L_2' \longleftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ donne une matrice triangulaire :

$$P' = \begin{pmatrix} p_1^2(\mathbb{C}P^2\times\mathbb{C}P^2) & p_1^2(\mathbb{C}P^4) \\ 0 & p_2(\mathbb{C}P^4) - \frac{1}{2}p_1^2(\mathbb{C}P^4) \end{pmatrix}.$$

Les nombres de Pontrjagin des variétés $\mathbb{C}P^J$ sont bien connus, dans notre cas :

$$P' = \begin{pmatrix} 12 & 25 \\ 0 & 10 - \frac{1}{2}25 \end{pmatrix}$$

et *det* $P = -30 \neq 0$. □

En fait, R. Thom a montré que le groupe Ω_{4m} est un $\mathbb{Z}$-module libre, que son rang est $p(m)$ et qu'il est précisément engendré par les $[\mathbb{C}P^I]$, $I \in \mathcal{P}(m)$. Voici, à titre d'information, les premiers groupes de cobordismes :

Ω_0	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9	...
$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	...

Le générateur de Ω_0 est le point $[*]$, celui de Ω_4 est $[\mathbb{C}P^2]$ et ceux de Ω_8 sont $[\mathbb{C}P^4]$ et $[\mathbb{C}P^2\times\mathbb{C}P^2]$. La trivialité du groupe Ω_3 signifie que toute variété orientée de dimension 3 est bordante – un résultat nullement évident – de même en dimension

6 et 7, toute variété orientée est bordante. En particulier, $\mathbb{R}P^3$ et $\mathbb{C}P^3$ sont bordantes... nous allons voir pourquoi dans quelques lignes avec un argument "à la main." L'examen de ce tableau révèle un autre phénomène non trivial : le produit de deux variétés non bordantes peut être bordant. En effet, dans le cas contraire, le produit cartésien devrait induire une injection :

$$\Omega_n \times \Omega_m \longrightarrow \Omega_{n+m},$$

ce qui est clairement non vérifié dans ce tableau pour le couple $(n, m) = (4, 5)$.

Proposition. – *Les espaces projectifs réel $\mathbb{R}P^{2k+1}$ et complexe $\mathbb{C}P^{2k+1}$ sont bordants pour tout $k \geq 0$.*

Démonstration. – On a les diagrammes commutatifs suivants qui signifient simplement que la fibration de Hopf sur les sphères de dimension impaires passe au quotient sur les espaces projectifs réels :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{S}^1 & & \mathbb{R}P^1 = \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2k+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^{2k+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^k & = & \mathbb{C}P^k \end{array}$$

et que la fibration de Hopf quaternionique sur les sphères de dimension $4k+3$ passe au quotient sur les espaces projectifs complexes :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{S}^3 & & \mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^{4k+3} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^{2k+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{H}P^k & = & \mathbb{H}P^k. \end{array}$$

Par conséquent, $\mathbb{R}P^{2k+1}$ est l'espace total d'un fibré en cercles et $\mathbb{C}P^{2k+1}$ celui d'un fibré en sphères, en particulier, on a les fibrations suivantes :

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2, \qquad \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^3 \longrightarrow \mathbb{S}^4.$$

Les variétés $\mathbb{R}P^{2k+1}$ et $\mathbb{C}P^{2k+1}$ sont donc les bords des fibrés en boules correspondants. □

3. Bibliographie

Pour écire ces quelques pages je me suis inspiré de l'ouvrage suivant :

J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of mathematics studies, number 76, Princeton University Press.

Institut Girard Desargues – UPRES-A 5028 du CNRS, Université Claude Bernard, Lyon 1, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: borrelli@igd.univ-lyon1.fr