LA SPHÈRE EXOTIQUE DE MILNOR

VINCENT BORRELLI

1. Signature et formule d'Hirzebruch

1.1. **Signature d'une variété.**

Soit M une variété compacte, sans bord, orientée, de dimension $n = 4m$. On note $[M] \in H_{4m}(M, \mathbb{Z})$ sa classe fondamentale. La forme d'intersection de M est la forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{array}{rccc} Q_M : & H^{2m}(M,\mathbb{Z}) \times H^{2m}(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & < \alpha \cup \beta, [M] > . \end{array}$$

Exemples. – $Q_{\mathbb{S}^{2m} \times \mathbb{S}^{2m}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_{\mathbb{C}P^{2m}} = (1)$.

La dualité de Poincaré $D : H^{2m}(M, \mathbb{Z}) \to H_{2m}(M, \mathbb{Z})$, $\alpha \mapsto \alpha \cap [M]$, permet d'écrire cette forme sur $H_{2m}(M, \mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{rccc} Q_M : & H_{2m}(M,\mathbb{Z}) \times H_{2m}(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (a, b) & \longmapsto & a.b := < D^{-1}(a) \cup D^{-1}(b), [M] > . \end{array}$$

Bien sûr, si $a \in Tor(H_{2m}(M, \mathbb{Z}))$ ou $b \in Tor(H_{2m}(M, \mathbb{Z}))$ alors $Q_M(a, b) = 0$ et donc Q_M définit une forme sur le quotient $H_{2m}(M, \mathbb{Z})/Tor$.

Définition. – La *signature* $\sigma(M)$ d'une variété M compacte sans bord orientée de dimension $4m$ est la signature de Q_M sur $H_{2m}(M, \mathbb{R}) \simeq (H_{2m}(M, \mathbb{Z})/Tor) \otimes \mathbb{R}$. Si la dimension de M n'est pas divisible par 4, on pose $\sigma(M) = 0$.

Le quotient $H_{2m}(M, \mathbb{Z})/Tor$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang N fini, si l'on choisit une base on peut représenter Q_M par une matrice A. Un changement de base P transforme cette matrice en PA^tP, or $P \in Gl(N, \mathbb{Z})$ signifie *det* $P \in \mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$, par conséquent, le déterminant est indépendant du choix de la base[1], on note :

$$\det\ Q_M = \det\ A.$$

Si $-M$ est la variété M avec l'orientation opposée, on a $Q_{-M} = -Q_M$ donc $\sigma(-M) = -\sigma(M)$ et $\det\ Q_{-M} = (-1)^{rang\ H_{2m}(M,\mathbb{Z})} \det\ Q_M$.

Proposition. – *La forme d'intersection Q_M est unimodulaire, c'est-à-dire*

$$\det\ Q_M = \pm 1.$$

[1] En revanche, $P \in Gl(N, \mathbb{Z})$ n'implique pas $P^tP = Id$ et ceci empèche de définir une trace pour Q_M.

En particulier, si le rang de $H^{2m}(M,\mathbb{Z})$ est impair, alors $\sigma(M) \neq 0$.

Démonstration. – Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_N)$ une $\mathbb{Z}$-base de $H^{2m}(M,\mathbb{Z})$ et $\lambda_i : H_{2m}(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq N$ telles que :

$$\lambda_i(D(e_j)) = \delta_{ij}.$$

Le théorème des coefficients universels fournit un isomorphisme :

$$\beta : H^{2m}(M,\mathbb{Z})/Tor \longrightarrow Hom(H_{2m}(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

et on note $e_i^* = \beta^{-1}(\lambda_i) \in H^{2m}(M,\mathbb{Z})/Tor$, alors :

$$\begin{array}{rclcl} Q_M(e_i^*, e_j) & = & < e_i^* \cup e_j, [M] > & = & < e_i^*, e_j \cap [M] > \\ & = & < e_i^*, D(e_j) > & = & \lambda_i(D(e_j)) \\ & = & \delta_{ij}. & & \end{array}$$

Donc $(e_1^*, \cdots, e_N^*)$ est une Q_M-base duale qui est une $\mathbb{Z}$-base de $H^{2m}(M,\mathbb{Z})/Tor$. Notons :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}\, Q_M = \left(Q_M(e_i, e_j)\right)_{i,j},$$

bien sûr : $Ae_i^* = e_i$. On définit $B : H^{2m}(M,\mathbb{Z})/Tor \longrightarrow H^{2m}(M,\mathbb{Z})/Tor$ par $B(e_i) = e_i^*$, on a immédiatement : $AB = BA = Id$ donc $det\, A = \pm 1$. □

Remarque. – On peut définir une forme d'intersection pour M^{4m+2} :

$$\begin{array}{rccc} Q_M : & H^{2m+1}(M,\mathbb{Z}) \times H^{2m+1}(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (\alpha,\beta) & \longmapsto & < \alpha \cup \beta, [M] > . \end{array}$$

et obtenir une forme antisymétrique unimodulaire sur $H^{2m+1}(M,\mathbb{Z})$. On montre cependant que les formes antisymétriques sont classées par leur rang, par conséquent les formes d'intersection sur M^{4m+2} ne contiennent pas plus d'information que le rang de $H^{2m+1}(M,\mathbb{Z})$.

Proposition. – *On note $M_1 + M_2$ l'union disjointe de M_1 et M_2, on a :*

(1) $\sigma(M_1 + M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$,
(2) $\sigma(M_1 \times M_2) = \sigma(M_1)\sigma(M_2)$,
(3) *Si $M = \partial W$ alors $\sigma(M) = 0$.*

Pour la démonstration de cette proposition, on renvoit le lecteur aux ouvrages d'Hirzebruch (p. 85) et/ou Stong (p. 221).

Corollaire. – *$\sigma : \Omega_* \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme d'algèbre.*

1.2. **La formule d'Hirzebruch.**

On note

$$A^* = \prod_{k=0}^{\infty} A^k$$

une $\mathbb{R}$-algèbre graduée commutative[2]. Un élément de A s'identifie à une somme formelle :

$$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_k + \cdots$$

et le produit de deux éléments dont le premier terme est 1 est donné par la formule :

$$(1 + a_1 + a_2 + \cdots)(1 + b_1 + b_2 + \cdots) = 1 + (a_1 + b_1) + (a_2 + a_1 b_1 + b_2) + \cdots$$

En particulier $a = 1 + a_1 + a_2 + \cdots$ est inversible et l'inverse s'obtient en résolvant un système triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & -a_1 \\ b_2 & = & -a_2 - a_1 b_1 \\ b_3 & = & -a_3 - a_2 b_1 - a_1 b_2 \\ & \vdots & \end{array}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & -a_1 \\ b_2 & = & a_1^2 - a_2 \\ b_3 & = & -a_1^3 + 2a_1 a_2 - a_3 \\ & \vdots & \end{array}$$

Ainsi :

$$a^{-1} = 1 + K_1(a_1) + K_2(a_1, a_2) + K_3(a_1, a_2, a_3) + \cdots$$

où $K_1(a_1) = -a_1$, $K_2(a_1, a_2) = a_1^2 - a_2$, $K_3(a_1, a_2, a_3) = -a_1^3 + 2a_1 a_2 - a_3$.

Définition. – Une suite de polynômes $K_1(a_1)$, $K_2(a_1, a_2)$, $K_3(a_1, a_2, a_3)$,..., à cœfficient dans $\mathbb{R}$, pour laquelle chaque polynôme K_n est homogène de degré n, est *une suite multiplicative* si le polynôme :

$$K(a) = 1 + K_1(a_1) + K_2(a_1, a_2) + K_3(a_1, a_2, a_3) + ...$$

vérifie l'égalité $K(ab) = K(a)K(b)$ pour tout couple $(a, b) \in A^* \times A^*$ avec $a_0 = 1$, $b_0 = 1$.

La suite de polynômes définie précédemment par l'égalité $K(a) = a^{-1}$ est mutiplicative puisque $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. On admet le résultat suivant dû à Hirzebruch.

Proposition. – *Soit $f(t) = 1 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_k t^k + \cdots$ une série formelle dont les cœfficients sont dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique suite multiplicative telle que le coefficient de a_1^n dans $K_n(a_1, ..., a_n)$ soit λ_n.*

Définition. – Soit $K = \{K_n\}$ une suite multiplicative à cœfficient dans $\mathbb{R}$, le K-genre de M^{4m} est le nombre :

$$K[M] =< K_m(p_1, ..., p_m), [M] >=< K(p(M)), [M] > .$$

Si la dimension de M n'est pas divisible par 4, on pose $K[M] = 0$.

Propriété. – *Soit $K = \{K_n\}$ une suite multiplicative, alors $M \mapsto K[M]$ définit un homomorphisme d'algèbre de $\Omega_* \otimes \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

[2]Dans le sens usuel, à savoir $xy = yx$ quels que soient les degrés de x et de y.

Démonstration. – Puisque $K[M]$ est une combinaison linéaire des nombres de Pontrjagin, il est clair que $K[M]$ est additif et que $K[M]=0$ si M est bordante. Puisque l'anneau des coefficients est $\mathbb{R}$ et d'après la formule du produit pour la classe de Pontrjagin totale, on a :

$$p(M\times M')=p(M)p(M')$$

(pas d'élément d'ordre deux). Notons $p=p(M)$ et $p'=p(M')$, comme $K=\{K_n\}$ est multiplicative :

$$K(pp')=K(p)K(p')$$

donc :

$K(M\times M')=<K(pp'),[M\times M']>=(-1)^{dim\ Mdim\ M'}<K(p),[M]><K(p),[M']>$.

Le signe est 1 si les dimensions sont divisibles par quatre, autrement il n'importe pas. □

Théorème. – *Soit $\{L_k(p_1,...,p_k)\}$ la suite multiplicative correspondant à la série :*

$$\frac{\sqrt{t}}{th(\sqrt{t})}=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{45}t^2+...+(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_kt^k+...$$

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli. Alors :

$$\sigma(M^{4k})=<L_k(p_1,...,p_k),[M^{4k}]>.$$

Les trois premiers éléments de $\{L_k\}$ sont :

$$\begin{array}{lcl} L_1 & = & \frac{1}{3}p_1 \\ L_2 & = & \frac{1}{45}(7p_2-p_1^2) \\ L_3 & = & \frac{1}{945}(62p_3-13p_2p_1+2p_1^3). \end{array}$$

En particulier, ceci implique que sur toute variété compacte sans bord orientée, la classe de Pontrjagin p_1 est divisible par 3 si la dimension est 4, $7p_2-p_1^2$ est divisible par 45 si la dimension est 8, etc.

Démonstration. – L et σ sont tous les deux des homomorphismes d'algèbre de $\Omega_*\otimes\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier qu'ils coïncident sur la base $(\mathbb{C}P^{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ ce qui est un simple calcul. □

2. La sphère de Milnor

Rappelons que la donnée d'un fibré vectoriel réel orienté de rang k sur une sphère $\mathbb{S}^n$, $n>1$, équivaut à la donnée d'une application de transition $t:\mathbb{S}^{n-1}\to Gl_+(n,\mathbb{R})$. Soit $\xi_{k,j}$ le fibré de rang 4 sur $\mathbb{S}^4$ déterminé par l'application de transition :

$$\begin{array}{cccc} t_{k,j}: & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & SO(4)\subset Gl_+(4,\mathbb{R}) \\ & u & \longmapsto & t_{k,j}(u):v\mapsto u^kvu^j. \end{array}$$

Dans cette écriture, on a bien sûr identifié $\mathbb{R}^4$ avec le corps des quaternions $\mathbb{H}$. On suppose $k+j=1$ et on note Σ_k^7 l'espace total du fibré unitaire de $\xi_{k,1-k}$:

$$\mathbb{S}^3\longrightarrow\Sigma_k^7\longrightarrow\mathbb{S}^4.$$

Proposition. – *Σ_k^7 est homéomorphe à $\mathbb{S}^7$.*

Démonstration. – On va construire sur Σ_k^7 une fonction de Morse f ayant seulement deux points critiques. Soient $\mathcal{U}_1 = \mathbb{S}^4 \setminus \{\text{pôle nord}\}$ et $\mathcal{U}_2 \setminus \{\text{pôle sud}\}$, on identifie ces deux ouverts à $\mathbb{H}^*$ via la projection stéréographique, l'application de transition entre $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ est alors donnée par $u \mapsto \frac{u}{|u|^2}$. On note enfin $r(u) = \frac{u}{|u|}$ la rétraction radiale. L'espace Σ_k^7 est obtenu à partir de deux copies W_1 et W_2 de $\mathbb{H} \times \mathbb{S}^3$ en identifiant les sous ensembles $\mathbb{H}^* \times \mathbb{S}^3$ au moyen du difféomorphisme :

$$(u,v) \overset{\Psi}{\longmapsto} (u',v') = \left(\frac{u}{|u|^2}, t_{k,1-k}(r(u))v\right),$$

soit, en développant :

$$\Psi(u,v) = \left(\frac{u}{|u|^2}, \frac{u^k v u^{1-k}}{|u|}\right).$$

On définit $f : \Sigma_k^7 \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(u,v) = \dfrac{Re(v)}{(1+|u|^2)^{1/2}} & \text{si } (u,v) \in W_1, \\ f(u',v') = \dfrac{Re(v'\bar{u}')}{(1+|u'|^2)^{1/2}} & \text{si } (u',v') \in W_2. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f admet deux points critiques non dégénérés sur W_1 qui sont $(u,v) = (0, \pm 1)$ et qu'elle n'admet aucun point critique sur W_2. □

On note B_k^8 l'espace total du fibré en boules de $\xi_{k,1-k}$, c'est une variété différentielle connexe à bord et $\Sigma_k^7 = \partial B_k^8$ est une variété différentielle homéomorphe à $\mathbb{S}^7$. On fait l'hypothèse (H) suivante :

Hypothèse. – *Il existe un difféomorphisme entre Σ_k^7 et la sphère standard $\mathbb{S}^7$.*

Sous cette hypothèse, la variété M_k^8 obtenue en identifiant, au moyen de ce difféomorphisme, l'espace ∂B_k^8 avec le bord ∂D^8 de la boule standard de dimension 8 est une variété *différentielle* connexe sans bord.

Proposition. – *La variété M_k^8 est orientable.*

Démonstration. – L'espace B_k^8 se rétracte sur $\mathbb{S}^4$, par conséquent, il est simplement connexe. Le théorème de Van Kampen[3] montre alors que M_k^8 est simplement connexe donc orientable. □

Proposition. – *La signature $\sigma(M_k^8)$ vaut ± 1.*

[3] *Théorème de Van Kampen.* – Si $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ sont connexes par arcs, alors le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$ est isomorphe au produit amalgamé : $\pi_1(\mathcal{U}_1) *_{\pi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)} \pi_1(\mathcal{U}_2)$. Autrement dit, $\pi_1(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$ est obtenu à partir du produit libre $\pi_1(\mathcal{U}_1) * \pi_1(\mathcal{U}_2)$ et des relations qui identifient les images des éléments du $\pi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ dans $\pi_1(\mathcal{U}_1)$ et dans $\pi_1(\mathcal{U}_2)$.

Démonstration. – Le théorème de Mayer-Vietoris[4] montre que $H^4(M^8_k,\mathbb{Z}) = H^4(B^8_k,\mathbb{Z})$ et, comme B^8_k se rétracte sur $\mathbb{S}^4$, on a : $H^4(M^8_k,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. D'autre part $det\, Q_{M^8_k} = \pm 1$, donc $\sigma(M^8_k) = \pm 1$. $\square$

On choisit sur M^8_k l'orientation pour laquelle $\sigma(M^8_k) = 1$, on choisit également un générateur $\iota \in H^4(M^8_k,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire une orientation sur $\mathbb{S}^4 \subset B^8_k \subset M^8_k$, bien sûr $\iota \cup \iota = [M^8_k]$.

Proposition. – *La première classe de Pontrjagin $p_1(M^8_k)$ vaut $\pm 2(2k-1)\iota$*

Démonstration. – L'inclusion $i : B^8_k \longrightarrow M^8_k$ induit un isomorphisme $i^* : H^4(M^8_k,\mathbb{Z}) \to H^4(B^8_k,\mathbb{Z})$ et par naturalité : $i^*p_1(M^8_k) = p_1(B^8_k)$. Soit $h : \mathbb{S}^4 \longrightarrow B^8_k$ l'inclusion donnée par la section nulle, elle induit encore un isomorphisme entre les groupes de cohomologie de degré 4 et de plus : $h^*p_1(B^8_k) = h^*p_1(TB^8_k) = p_1(h^*TB^8_k)$. D'autre part :

$$h^*TB^8_k = T\mathbb{S}^4 \oplus \xi_{k,1-k},$$

donc :

$$p_1(TB^8_k) = p_1(T\mathbb{S}^4) + p_1(\xi_{k,1-k})$$

d'après le théorème du produit pour la classe de Pontrjagin totale. Puisque $T\mathbb{S}^4 \oplus \epsilon^1 = \epsilon^5$, on a :

$$p(T\mathbb{S}^4) = p(T\mathbb{S}^4 \oplus \epsilon^1) = p(\epsilon^5) = 1.$$

D'autre part, la classification des fibrés réels orientés de rang 4 au dessus de $\mathbb{S}^4$ montre que $p_1(\xi_{k,j}) = \pm 2(k-j)[\mathbb{S}^4]$, d'où le résultat. $\square$

Théorème. – *Σ^7_2 est homéomorphe mais pas difféomorphe à la sphère standard $\mathbb{S}^7$.*

Démonstration. – La formule d'Hirzebruch permet d'obtenir le deuxième nombre de Pontrjagin de M^8_k :

$$< p_2, [M^8_k] >= \frac{< p_1^2, [M^8_k] > +45\sigma(M^8_k)}{7} = \frac{4(2k-1)^2 + 45}{7}.$$

Si $k = 1$, ceci donne $< p_2, [M^8_k] >= 7$ et l'on peut montrer que dans ce cas M^8_1 est difféomorphe à l'espace projectif quaternionique $\mathbb{H}P^2$, mais si $k = 2$, on obtient $< p_2, [M^8_k] >= \frac{81}{7} \notin \mathbb{Z}$ ce qui est impossible. L'hypothèse (H) est donc fausse pour cette valeur de k, ce qui signifie qu'il n'existe pas de difféomorphisme de Σ^7_2 dans $\mathbb{S}^7$. $\square$

3. Bibliographie

Pour écrire ces quelques pages, je me suis inspiré des ouvrages suivants :

[4] *Théorème de Mayer-Vietoris.* – Il existe une suite exacte longue qui relie la cohomologie de $\mathcal{U}_1$, celle de $\mathcal{U}_2$, celle de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ et celle de $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Un peu plus précisément, on a une suite exacte longue de la forme :

$$... \to H^k(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \to H^k(\mathcal{U}_1) \oplus H^k(\mathcal{U}_2) \to H^k(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to H^{k+1}(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \to ..$$

F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1958.

J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of mathematics studies, number 76, Princeton University Press, 1974.

J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956) 399-405.

R. E. Stong, *Notes on Cobordism Theory*, Princeton Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1958.

Institut Girard Desargues – UPRES-A 5028 du CNRS, Université Claude Bernard, Lyon 1, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address: borrelli@igd.univ-lyon1.fr