H-principe III

Vincent Borrelli

1 Le théorème d'approximation holonomique

Le théorème d'approximation holonomique est dû à Y. Eliashberg et N. Mishachev, il répond à la question "radicale" suivante : soit $F_0 : M \to J^1(M,N)$ une section, peut-on approcher F_0 par une section holonomique F, c'est-à-dire, une section pour laquelle il existe $f : M \to N$ telle que $F = j^1 f$? La réponse à cette question est non en général, mais, et à condition d'être un peu moins exigeant, on peut tout de même obtenir une réponse positive.

Théorème d'approximation holonomique (Eliashberg, Mishachev 2001). *–Soit $A \subset M$ un polyèdre tel que codim $A \geq 1$ et $F : \mathcal{O}p\,A \to J^1(M,N)$. Alors, $\forall \delta, \epsilon \in C^0(M, \mathbb{R}_+^*)$, il existe une difféotopie $h^\tau : M \to M$ δ-petite ($h^0 = id_M$, $h := h^1$) avec $h^1(A) \subset \mathcal{O}p\,A$ et une section holonomique $\tilde{F} : \mathcal{O}p\,h(A) \to J^1(M,N)$ telle que :*

$$\forall p \in \mathcal{O}p\,h(A),\ dist(\tilde{F}(p), F(p)) < \epsilon(p).$$

La démonstration de ce théorème figure dans l'ouvrage d'Eliashberg et Mishachev, *Introduction to the h-principle*, GSM, AMS. Voici quelques précisions sur les notations : $\mathcal{O}p\,A$ = voisinage ouvert de A ; polyèdre = sous-complexe d'une triangulation de M ; M, N, $J^1(M,N)$ sont munis de métriques afin de donner un sens à $dist$; une difféotopie h^τ est δ-petite si $h^0 = id$ et

$$\forall p \in M,\ \forall \tau \in [0,1],\ dist(h^\tau(p), p) < \delta(p).$$

Le théorème d'approximation holonomique permet de retrouver le théorème de Gromov sur les relations $Diff(M)$-invariantes :

Théorème (Gromov). *– Soit M une variété ouverte, $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ une relation ouverte et $Diff(M)$-invariante alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique.*

En effet, si M une variété ouverte, il existe un polyèdre $A \subset M$ de codimension plus grande que 1, tel que M puisse être compressée par une isotopie $\varphi_t : M \to M$ dans un voisinage arbitrairement petit $\mathcal{O}p\,A$ de A.

Soit $F_0 : \mathcal{O}p\, A \to \mathcal{R} \subset J^1(M,N)$, d'après le théorème d'approximation holonomique il existe une section holonomique $F : \mathcal{O}p\, h(A) \to J^1(M,N)$ arbitrairement proche de F_0 et puisque $\mathcal{R}$ est ouverte, on peut supposer $F : \mathcal{O}p\, h(A) \to \mathcal{R}$. Notons $f : \mathcal{O}p\, h(A) \to N$ la fonction telle que $F = j^1 f$. Alors $j^1(f \circ h^{-1})$ est une section $\mathcal{R}$ au dessus de $\mathcal{O}p\, A$ car $\mathcal{R}$ est $Diff(M)$-invariante, pour la même raison $f \circ h^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ est une solution de $\mathcal{R}$ définie sur tout M.

Rappelons que ce théorème de Gromov admet comme corollaire immédiat le théorème de Phillips sur la classification des submersions. Qu'en est-il de la classification des immersions ? La condition "M ouverte" dans le théorème d'approximation holonomique semble un obstacle puisque le résultat de Smale-Hirsch s'applique pour une variété quelconque, il y a cependant une astuce pour s'affranchir de cette condition, il s'agit de la *micro-extension.*

On note $\mathcal{I} \subset J^1(M,N)$ la relation différentielle des immersions de M dans N et $F_0 : M \to \mathcal{I}$ une section. On définit un *espace normal* $N(F_0)$ à F_0 au dessus de M par :

$$N(F_0) := \bigcup_{x \in M} f_0^*(T_{f_0(x)}N)/L_x(T_x M) = f_0^* TN / F_0(TM)$$

où on a écrit, en x, $F_0(x)$ sous la forme $(f_0(x), L_x)$ avec $f_0 = bs\ F_0$ et $L_x : T_x M \to T_{f_0(x)}N$ de rang maximal. Une micro-extension de (M, F_0) est un voisinage tubulaire E de la section nulle de $N(F_0)$. Puisque :

$$T_{(x,0)}E = T_x M \oplus N_x(F_0),$$

la section F_0 fournit canoniquement un isomorphisme de fibrés :

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{F}_0 : & T_{(x,0)}E = T_x M \oplus N_x(F_0) & \longrightarrow & T_{f_0(x)}N \\ & (v, \nu) & \longmapsto & (L_x(v), \nu). \end{array}$$

On note $\mathcal{R} \subset J^1(E,N)$ la relation différentielle des immersions de la variété ouverte E dans N. La fibre $\mathcal{R}_{(e,y)}$ au dessus de $(e,y) \in E \times N$ est donc constituée des isomorphismes de $T_e E$ dans $T_y N$. Bien sûr $\mathcal{R}$ est ouverte et $Diff(M)$-invariante, le théorème d'approximation holonomique appliqué à $A = M \subset E$ pour la section $\tilde{F}_0 : E = \mathcal{O}p\, M \to \mathcal{R} \subset J^1(E,N)$ nous permet de construire une homotopie $\tilde{F}_t : E = \mathcal{O}p\, M \to \mathcal{R}$ qui joint $\tilde{F}_0$ à une section $\tilde{F}_1 = j^1 h$ holonomique. Si on restreint h à M, on obtient une immersion $f = h_{|M} : M \to N$ homotope à f_0. Puisque $\tilde{F}$ peut être choisie arbitrairement proche de $\tilde{F}_0$, on peut obtenir f C^0-proche de f_0. De même, une version à paramètres de ce raisonnement permet d'obtenir le h-principe paramétrique pour $\mathcal{I}$.

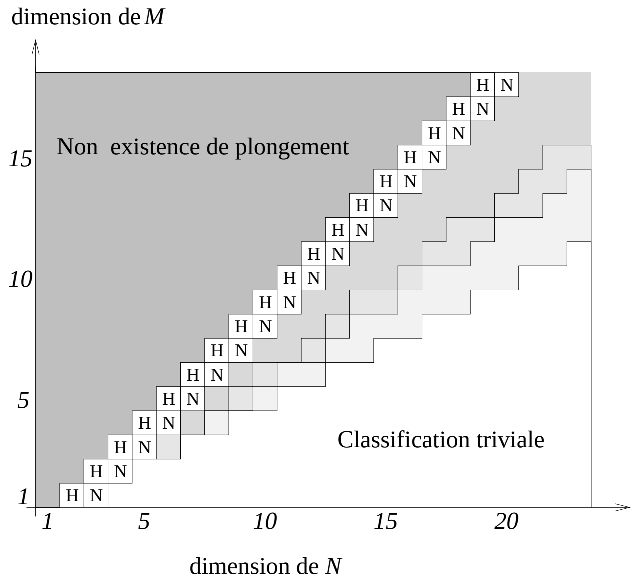
Corollaire. – *Le théorème d'approximation holonomique implique le h-principe paramétrique C^0-dense pour les immersions de M dans N, $n > m$.*

2 La classification des plongements

2.1 Situation générale

On considère le cas où la variété source M^m est compacte connexe et la variété but est un espace numérique $\mathbb{R}^n$. Si $2m > n$, un argument de position général, donc de transversalité, assure l'existence d'un plongement de M dans $\mathbb{R}^n$, le même argument permet aussi d'affirmer que deux plongements quelconques $f_0, f_1 : M \to \mathbb{R}^n$ sont toujours isotopes si $2m + 1 > n$. La classification à isotopie près est donc triviale dans ce cas. A l'autre extrême, si $m \geq n$, il n'existe pas de plongement de M dans $\mathbb{R}^n$. La situation n'est donc intéressante (du point de vue de la classification) que si $m < n \leq 2m + 1$. Le premier résultat général de classification des plongements est dû à A. Haefliger et remonte à 1962. Ce résultat ramène la question de la classification à un problème homotopique, il ne s'applique cependant pas pour toutes les valeurs $m < n \leq 2m+1$ mais seulement dans le *rang metastable* : $\frac{3}{2}(m + 1) \leq n \leq 2m + 1$ et $m > 1$. Pour aller plus loin, il faut faire appel à la théorie de Goodwillie-Klein-Weiss élaborée dans les années 90 et qui donne une description homotopique de l'espace des plongements pour des couples (m, n) se situant au delà du rang metastable. Malheureusement, cette description n'est pas aussi pratique que celle d'Haefliger et en déduire un calcul explicite de π_0 reste un véritable défi.

Le tableau ci-dessous résume la situation :



2.2 Le théorème d'Haefliger

Si $f : M \to N$ est une application, on peut lui associer son carré cartésien :

$$\begin{array}{cccc} f\times f: & M\times M & \longrightarrow & N\times N \\ & (x,y) & \longmapsto & (f(x),f(y)). \end{array}$$

Il y a une action évidente de $\mathbb{Z}_2$ sur M^2 et N^2 qui échange les facteurs. Notons que :

$$\forall p \in M^2,\ \forall \sigma \in \mathbb{Z}_2,\ \ f\times f(\sigma(p)) = \sigma(f\times f(p)),$$

et que $(f\times f)^{-1}(\Delta N) \supset \Delta M$ avec l'égalité si et seulement si f est injective.

Définition. – Une application $F : M^2 \to N^2$ est $\mathbb{Z}_2$-équivariante si pour tout couple $(x_1, x_2) \in M^2$, on a :

$$F(x_1,x_2) = (y_1,y_2) \Rightarrow F(x_2,x_1) = (y_2,y_1).$$

L'application F est $\mathbb{Z}_2$-isovariante si de plus $F^{-1}(\Delta N) = \Delta M$.

Théorème d'Haefliger (1962). – *On suppose M compacte et $m > 1$.*
a) Si $3m+3 \leq 2n$, une application $f : M \to N$ est homotope à un plongement g si et seulement si il existe une homotopie $\mathbb{Z}_2$-équivariante $F_t : M^2 \to N^2$ telle que $F_0 = f\times f$ et F_1 est $\mathbb{Z}_2$-isovariante. (Dans la réciproque, on obtient g tel que $g\times g$ est homotopique à F_1 parmi les applications $\mathbb{Z}_2$-isovariantes).
b) Si $3m+4 \leq 2n$, une homotopie $f_t : M \to N$ joignant deux plongements g_0, g_1 est homotope à une isotopie si il existe une homotopie $\mathbb{Z}_2$-équivariante $F_{t,s} : M^2 \to N^2$ telle que $F_{t,0} = f_t$, $F_{0,s} = g_0$, $F_{1,s} = g_1$ et $F_{t,1}$ est une homotopie $\mathbb{Z}_2$-isovariante.

Ce théorème est admis, sa démonstration, délicate, est une généralisation de la technique d'élimination des points doubles de Whitney.

Considérons le diagramme (commutatif) :

$$\begin{array}{ccccc} & E(M,N) & \xrightarrow{i} & C^\infty(M,N) & \\ f \overset{\times}{\mapsto} f\times f & \downarrow & & \downarrow & f \overset{\times}{\mapsto} f\times f \\ & \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2,N^2) & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2,N^2). & \end{array}$$

Le théorème d'Haefliger permet de lire les propriétés de $\pi_0(i)$ en regardant celle de $\pi_0(j)$.

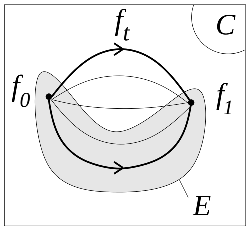
Surjectivité de $\pi_0(i)$.– Soit $[f]$ la composante connexe de $C^\infty(M, N)$ contenant f. L'image réciproque $\pi_0(i)^{-1}([f])$ est non vide si et seulement si $\pi_0(j)^{-1}([f \times f])$ est non vide.

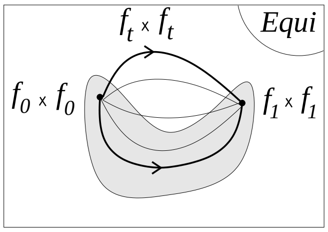
Injectivité de $\pi_0(i)$.– Soient f_0 $f_1 \in E(M, N)$ tels que $\pi_0(i)[f_0] = \pi_0(i)[f_1]$, alors $[f_0] = [f_1]$ si et seulement si $\pi_0(j)[f_0 \times f_0] = \pi_0(j)[f_1 \times f_1] \Rightarrow [f_0 \times f_0] = [f_1 \times f_1]$.

Pour alléger les notations on décide d'écrire $i_\sharp$ pour $\pi_0(i)$, $j_\sharp$ pour $\pi_0(j)$, E pour $E(M, N)$, C^∞ pour $C^\infty(M, N)$, Iso pour $\mathbb{Z}_2 - Iso(M, N)$ et $Equi$ pour $\mathbb{Z}_2 - Equi(M, N)$. Le théorème d'Haefliger peut s'écrire de manière plus condensée de la façon suivante :

a) Soit $f \in C^\infty$, alors $[f] \in i_\sharp(\pi_0(E)) \iff [f \times f] \in j_\sharp(\pi_0(Iso))$.

b) Soient $f_t \in C^\infty$, f_0, $f_1 \in E$, alors $[f_t] = 0$ dans $\pi_1(C^\infty, E) \iff [f_t \times f_t] = 0$ dans $\pi_1(Equi, Iso)$.





Dans le a) de cette formulation, on n'a pas traduit le renseignement mis entre parenthèses dans le théorème d'Haefliger. Celui-ci reflète une propriété de $\times_\sharp : \pi_0(E) \to \pi_0(Iso)$. La commutativité du diagramme implique que si un élément $[F] \in \pi_0(Iso)$ est dans l'image de $\times_\sharp$ alors $j_\sharp[F] \in \times_\sharp(\pi_0(C^\infty))$. Autrement dit :

$$\times_\sharp(\pi_0(E)) \subset j_\sharp^{-1}(\times_\sharp(\pi_0(C^\infty))).$$

Soit $[F] \in j_\sharp^{-1}(\times_\sharp(\pi_0(C^\infty)))$, ceci signifie qu'il existe $f \in C^\infty$ telle que $f \times f$ soit homotope à F parmi les applications $\mathbb{Z}_2$-équivariantes. D'après a) F est donc homotope à un plongement g, et, d'après ce qui est entre parenthèses, on peut choisir g tel que $g \times g$ soit homotope à F parmi les applications $\mathbb{Z}_2$-isovariantes, donc $\times_\sharp[g] = [g \times g] = [F]$ i. e. :

$$\times_\sharp(\pi_0(E)) = j_\sharp^{-1}(\times_\sharp(\pi_0(C^\infty))).$$

Ce résultat concerne l'image de $\times_\sharp : \pi_0(E) \to \pi_0(Iso)$, que peut-on dire sur le "noyau" ? Supposons que g_0 $g_1 \in E$ soient tels que : $i_\sharp[g_0] = i_\sharp[g_1]$ et $[g_0 \times g_0] = [g_1 \times g_1]$, on aimerait pouvoir conclure que $[g_0] = [g_1]$. Nous allons voir qu'il y a une obstruction qui nous empêche, en général, d'aboutir à une telle conclusion. En effet $i_\sharp[g_0] = i_\sharp[g_1]$ implique qu'il existe $f_t \in C^\infty$ joignant g_0 à g_1 et donc $f_t \times f_t \in Equi$ qui joint $g_0 \times g_0$ à $g_1 \times g_1$. D'autre part

$[g_0 \times g_0] = [g_1 \times g_1]$ implique qu'il existe $F_t \in Iso$ qui joint $g_0 \times g_0$ à $g_1 \times g_1$, pour pouvoir appliquer le point b) du théorème d'Haefliger, il faudrait que le chemin $f_t \times f_t$ soit, en outre, homotope dans $Equi$ et à extrémités fixées, au chemin F_t, autrement dit que le chemin $f_t \times f_t$ représente l'élément neutre de $\pi_1(Equi, Iso, g_0 \times g_0)$.

2.3 H-principe pour les plongements

On suppose désormais que $N = \mathbb{R}^n$.

Corollaire. – *Si $N = \mathbb{R}^n$ et $m > 1$ alors $\times_\sharp : \pi_0(E) \to \pi_0(Iso)$ est une bijection si $3m + 4 \leq 2n$ et une surjection si $3m + 3 = 2n$.*

Preuve. – Si $N = \mathbb{R}^n$ alors $C^\infty(M, N)$ est contractile (c'est un espace vectoriel). De plus $\mathbb{Z}_2 - Equi(M^2, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \simeq C^\infty(M^2, \mathbb{R}^n)$ puisque toute application $\mathbb{Z}_2$-équivariante s'écrit $(x, y) \mapsto (f(x, y), f(y, x))$. Donc $Equi$ est lui aussi contractile, en particulier $\pi_1(Equi) = 0$ et donc $\times_\sharp$ est injective si $3m + 4 \leq 2n$. De même, $\pi_0(Equi) = 0$ ce qui implique $(j_\sharp)^{-1}(\pi_0(Equi)) = \pi_0(Iso)$. Donc si $3m + 3 \leq 2n$, $\times_\sharp(\pi_0(E)) = \pi_0(Iso)$, i. e. $\times_\sharp$ est surjective. □

On peut lire ce corollaire comme une sorte de h-principe. Le jet d'une fonction f est remplacé par son carré cartésien $f \times f$, l'espace des sections des jets est $Equi$, l'espace des sections de la relation différentielle est $\Gamma(\mathcal{R}) = Iso \subset Equi$, les solutions de $\mathcal{R}$ sont les plongements.

3 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

Y. Eliashberg et N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, GSM, AMS.