CLASSES CARACTÉRISTIQUES

VINCENT BORRELLI

1. Définition axiomatique

Soit X une variété. On note $Vect_{\mathbb{R}}(X)$ (*resp.* $Vect_{\mathbb{C}}(X)$) l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels réels (*resp.* complexes) sur X. Cet ensemble est un semi-groupe [1] commutatif pour l'addition $(E, F) \mapsto E \oplus F$ et $Vect_{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}$ peut être vu comme un foncteur contravariant de la catégorie $\mathfrak{V}$ des variétés différentielles (et des applications différentielles) dans la catégorie $\mathfrak{S}$ des semi-groupes commutatifs.

Définition. – Une classe caractéristique est un morphisme de foncteurs contravariants $\phi : Vect_{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}} \to H$ où $H : \mathfrak{V} \to \mathfrak{S}$ est un foncteur cohomologique contravariant [2].

Rappelons qu'un morphisme entre deux foncteurs contravariants $F_1, F_2 : \mathfrak{V} \to \mathfrak{S}$ associe à tout objet $X \in \mathfrak{V}$ un morphisme $\phi_X : F_1(X) \to F_2(X)$ tel que pour tout $f : X \to Y$ le diagramme (D) suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_1(Y) & \overset{F_1(f)}{\to} & F_1(X) \\ \phi_Y \downarrow & & \downarrow \phi_X \\ F_2(Y) & \overset{F_2(f)}{\to} & F_2(X). \end{array}$$

Classes de Stiefel-Whitney. – On choisit pour cofoncteur cohomologique le semi-groupe commutatif $H^*(., \mathbb{Z}_2)$ avec pour l'addition le cup produit.

Théorème. – *Il existe un unique morphisme $w : Vect_{\mathbb{R}} \to H^*(., \mathbb{Z}_2)$ tel que :*

1) Si $E \to X$ est trivial alors $w(E) = 1 \in H^0(X, \mathbb{Z}_2)$,

2) Si $H \to \mathbb{R}P^1$ est le fibré canonique et $h \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ est le générateur alors $w(H) = 1 + h$.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [MS]. Le fait que w soit un morphisme entre cofoncteurs implique trois propriétés :

1) Si $E_1 \to X$ et $E_2 \to X$ sont isomorphes alors $w(E_1) = w(E_2)$.

2) $w : Vect_{\mathbb{R}}(X) \to H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ est un morphisme de semi-groupes abéliens donc

$$w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1) \cup w(E_2).$$

---

[1] *Semi-groupe :* ensemble muni d'une loi associative.
Morphisme de semi-groupe : $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.

[2] $H = (H^i)_i \in \mathbb{Z}$ est un foncteur cohomologique contravariant si pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de complexes de cochaînes, il existe des morphismes $\delta_i : H^i(A) \to H^{i+1}(C)$ tel que $... \to H^i(A) \to H^i(B) \to H^i(A) \overset{\delta_i}{\to} H^{i+1}(C) \to ...$ soit une suite exacte longue.

3) Le diagramme (D) est commutatif ainsi $w(f^*E) = f^*w(E)$ si $f : Y \to X$. Classiquement si la variété X est de dimension p on écrit

$$w(E) = 1 + w_1(E) + w_2(E) + ... + w_p(E)$$

avec $w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$.

Classes de Chern. – On choisit pour cofoncteur cohomologique le semi-groupe commutatif $H^{pair}(., \mathbb{Z})$ avec pour l'addition le cup produit.

Théorème. – *Il existe un unique morphisme* $c : Vect_{\mathbb{C}} \to H^{pair}(., \mathbb{Z})$ *tel que :*

1) Si $E \to X$ *est trivial alors* $c(E) = 1 \in H^0(X, \mathbb{Z})$,

2) Si $H \to \mathbb{C}P^1$ *est le fibré canonique et* $h \in H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z})$ *est le générateur canonique (c'est-à-dire le dual de Poincaré de* $[\mathbb{C}P^1]$*) alors* $c(H) = 1 + h$.

De même, le fait que c soit un morphisme entre cofoncteurs implique :

1) Si $E_1 \to X$ et $E_2 \to X$ sont isomorphes alors $c(E_1) = c(E_2)$.

2) $c : Vect_{\mathbb{C}}(X) \to H^{pair}(X, \mathbb{Z})$ est un morphisme de semi-groupe abélien donc

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cup c(E_2).$$

3) Le diagramme (D) est commutatif ainsi $c(f^*E) = f^*c(E)$ si $f : Y \to X$. Classiquement si la variété X est de dimension $2p$ ou $2p+1$ on écrit

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + ... + c_p(E)$$

avec $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$.

Lien avec les classes d'obstruction. – Le théorème d'unicité pour les classes de Chern montre qu'il existe une unique classe $c_1 \in H^2(., \mathbb{Z})$ telle que :

P1. $c_1(E) = 0$ si $E \to X$ est trivial,

P2. $c_1(E_1) = c_1(E_2)$ si $E_1 \to X$ et $E_2 \to X$ sont isomorphes,

P3. $c_1(E_1 \oplus E_2) = c_1(E_1) + c_1(E_2)$,

P4. $c_1(f^*E) = f^*c_1(E)$ si $f : Y \to X$,

P5. $c_1(H) = h$ si $H \to \mathbb{C}P^1$ est le fibré canonique et h le générateur canonique.

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel complexe de rang n. On a vu que la classe d'obstruction $\mathfrak{o}_{FE} \in H^2(X, \pi_1(Gl(n, \mathbb{C})))$ vérifie les propriétés P1,...,P5. Par unicité $\mathfrak{o}_{FE}$ n'est autre que $c_1(E)$ comme annoncé lors de l'étude des classes d'obstruction.

Il est un peu plus délicat de montrer que w_2 est la classe d'obstruction $\mathfrak{o}_{FE} \in H^2(X, \pi_1(Gl_+(n, \mathbb{R})))$ apparaissant pour les fibrés vectoriels réels orientés. Soit $E \to X$ un fibré vectoriel réel non nécessairement orientable, autrement dit $FE \to X$ est un $Gl(n, \mathbb{R})$-fibré principal. Il y a une obstruction

$$\mathfrak{o}^1_{FE} \in H^1(X, \pi_0(Gl(n, \mathbb{R}))) = H^1(X, \mathbb{Z}_2)$$

à étendre une section $s : X^0 \to FE_{|X^0}$ du 0-squelette au 1-squelette. Le théorème d'unicité pour les classes de Stiefel-Whitney permet alors de montrer que $\mathfrak{o}^1_{FE} = w_1(E)$. Pour un fibré réel orienté cette classe est nulle d'après la proposition 1 de l'étude des classes d'obstruction. Le théorème d'unicité pour les classes de Stiefel-Whitney montre alors que $\mathfrak{o}_{FE} = w_2(E)$ pour les fibrés réels orientés.

2. La théorie de Chern-Weil

Soit $i : H^*(X,\mathbb{Z}) \to H^*(X,\mathbb{R}) \simeq H^*_{dR}(X,\mathbb{R})$ l'homomorphisme induit par l'inclusion naturelle $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. La théorie de Chern-Weil se propose de construire un représentant de l'image $i(c_k)$ des classes de Chern. Dans la suite, on ne s'embarrasse plus de i et on écrit c_k au lieu de $i(c_k)$ mais il faut garder à l'esprit que $c_k \in H^{2k}_{dR}(X,\mathbb{R})$ ne représente que la partie sans torsion de $c_k \in H^{2k}(X,\mathbb{Z})$.

L'opérateur de courbure. – Soit $E \to X$ un fibré vectoriel réel ou complexe. Une connexion ∇ sur $E \to X$ peut être vue comme une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} d_\nabla : & \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(T^*X \otimes E) \\ & \sigma & \longmapsto & \nabla\sigma \end{array}$$

satisfaisant à la règle de Leibnitz $d_\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f d_\nabla \sigma$ ($f \in C^\infty(X)$ et d est la dérivée extérieure). On note

$$\Omega^k(E) = \Gamma(\Lambda^k(T^*X) \otimes E) = \{k - \text{forme de } X \text{ à valeur dans } E\}.^3$$

Avec cette notation $d_\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ apparaît comme un analogue de la dérivée extérieure $d : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$. Il est naturel d'étendre d_∇ sur tous les $\Omega^k(E)$ en posant

$$d_\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^k \omega \wedge d_\nabla \sigma$$

pour $\omega \in \Omega^k(X)$ et $\sigma \in \Gamma(E)$. Un simple calcul permet de constater que $d_\nabla \circ d_\nabla : \Omega^k(E) \to \Omega^{k+2}(E)$ est une application $C^\infty(X)$-linéaire qui est non nulle en général. Le *tenseur de courbure* K de la connexion ∇ est l'opérateur

$$K = d_\nabla \circ d_\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E).$$

Il définit une section de

$$Hom(E, \Lambda^2 T^*X \otimes E) = \Lambda^2 T^*X \otimes Hom(E,E) = \Lambda^2 T^*X \otimes E^* \otimes E.$$

Remarquons que si $E \to X$ est un fibré en droites (réelles ou complexes) alors $E^* \otimes E$ est un fibré en droites trivial. Ainsi K définit une section de $\Lambda^2 T^*X$ c'est-à-dire une 2-forme.

Ceci admet une généralisation au cas des fibrés $E \to X$ de rang n quelconque, mais on n'obtient pas en général des 2-formes globalement définies. Soient σ une section de E et (Z,T) des sections de TX, par définition de K, $K(\sigma)(Z,T)$ est une section de E. Soit $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) une trivialisation de $E \to X$, il existe une matrice $\Omega_\alpha(Z,T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que

$$(K(\sigma)(Z,T))_\alpha = \Omega_\alpha(Z,T)\sigma_\alpha,$$

(on a noté $\sigma_\alpha = \varphi_\alpha \circ \sigma$). On peut bien-sûr oublier les Z,T et voir Ω_α comme une matrice $n \times n$ de 2-formes au dessus de $\mathcal{U}_\alpha$. Les Ω_α dépendent seulement du choix d'une trivialisation de $E \to X$, il n'est nul besoin d'une trivialisation de $\Lambda^2 T^*X$ pour les définir. Ils se recollent pour donner un objet global si et seulement si $\Omega_\alpha = \Omega_\beta$ sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Or, en notant $t_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to Gl(n, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ les fonctions de transitions de $E \to X$, on a

$$\Omega_\alpha = t_{\alpha\beta}\Omega_\beta t_{\alpha\beta}^{-1}.$$

[3] Si $E = TX$ on écrit $\Omega^k(X)$ plutôt que $\Omega^k(TX)$.

Les matrices Ω_α, dites *formes de courbure*, ne se recollent donc pas en général pour former un objet global. Il y a cependant moyen à partir des Ω_α de construire des formes fermées globalement définies.

Connexions unitaires. – On suppose désormais que $E \to X$ est un fibré hermitien et ∇ une connexion sur $E \to X$. De même que précédemment, si $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ une trivialisation de $E \to X$ et $\sigma \in \Gamma(E)$ alors il existe une matrice $n \times n$ ω_α de 1-formes telle que

$$(d_\nabla \sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \sigma_\alpha.$$

(Les matrices ω_α ne se recollent pas en général pour former un objet global). On dit que ∇ est une *connexion unitaire* si les ω_α sont des matrices hermitiennes. Ceci est équivalent à la condition

$$\nabla(\sigma_1, \sigma_2) = (\nabla\sigma_1, \sigma_2) + (\sigma_1, \nabla\sigma_2) \qquad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E),$$

où (,) est le produit hermitien sur $E \to X$. De $K = d_\nabla \circ d_\nabla$, on déduit que les Ω_α et les ω_α sont reliés par la formule

$$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha.$$

Ceci permet de voir que si ∇ est unitaire, les matrices Ω_α sont elles aussi anti-hermitiennes.

Polynômes invariants. – Un polynôme invariant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une fonction polynomiale de n^2 variables $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad P(AB) = P(BA),$$

ou, de manière équivalente,

$$\forall T \in Gl(n, \mathbb{C}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad P(TAT^{-1}) = P(A).$$

L'ensemble des polynômes invariants sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un anneau qui est engendré par $Id, \sigma_1, ..., \sigma_n$, où les σ_k sont définis par la relation

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall t \in \mathbb{C}, \quad \det(Id + tA) = 1 + t\sigma_1(A) + ... + t^n \sigma_n(A).$$

Lemme. – *Soit P un polynôme invariant, on note P' la matrice $(\frac{\partial P}{\partial a_{ij}})_{ij}$. La matrice $P'(A)$ commute avec A.*

Démonstration. – Soit E_{ij} la matrice ayant un 1 à la ligne i, colonne j et des zéros partout ailleurs. En différentiant la relation $P((Id+tE_{ij})A) = P(A(Id+tE_{ij}))$ et en faisant $t = 0$, on obtient le résultat. □

La forme $P(\Omega)$. – Soit P un polynôme invariant et Ω_α une forme de courbure, on peut associer à (P, Ω_α) l'élément de $\Omega^*(TX_{|\mathcal{U}_\alpha})$ défini par $P(\Omega_\alpha)$. Puisque P est invariant, les $P(\Omega_\alpha)$ se recollent pour former un objet global. En effet, au dessus de $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$,

$$P(\Omega_\alpha) = P(t_{\alpha\beta}\Omega_\beta t_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Omega_\beta).$$

On note $P(\Omega)$ l'élément de $\Omega^*(TX)$ ainsi obtenu. Le résultat clé de cette construction est le suivant.

Proposition. – *La forme $P(\Omega)$ est fermée donc $[P(\Omega)] \in H^*(X, \mathbb{C})$.*

Démonstration. – Il est facile de voir que $dP(\Omega) = trace(P'(\Omega) \wedge d\Omega)$. En dérivant la relation $\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$ on obtient $d\Omega_\alpha = \omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha - \Omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$, d'où

$$\begin{aligned} dP(\Omega) &= trace(P'(\Omega_\alpha) \wedge \omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha - P'(\Omega_\alpha) \wedge \Omega_\alpha \wedge \omega_\alpha) \\ &= trace(P'(\Omega_\alpha) \wedge \omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha - \Omega_\alpha \wedge P'(\Omega_\alpha) \wedge \omega_\alpha) \end{aligned}$$

d'après le lemme. On pose $X_\alpha = P'(\Omega_\alpha) \wedge \omega_\alpha \in \Omega^{impair}(TX_{|\mathcal{U}_\alpha})$. On a

$$dP(\Omega) = trace(X_\alpha \wedge \Omega_\alpha - \Omega_\alpha \wedge X_\alpha) = 0.$$

□

Remarque. – Dans cette démonstration il faut bien garder à l'esprit que les éléments de la matrice Ω_α sont des 2-formes et que par conséquent elles commutent avec toute k-forme puisque $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg\ \alpha deg\ \beta} \beta \wedge \alpha$.

Voici quelques propriétés de $P(\Omega)$.

Proposition. – $[P(\Omega)]$ *ne dépend pas du choix de la connexion. On note* $P(E) = [P(\Omega)]$.

Démonstration. – Soient ∇_0 et ∇_1 deux connexions sur $E \to X$, $\pi^* E \to X$ le tiré en arrière par $\pi : X \times [0,1] \to X$ et ∇'_0, ∇'_1 les connexions induites. Alors $\nabla = t\nabla'_1 + (1-t)\nabla'_0$ est une connexion sur π^*E et $P(\Omega_\nabla)$ est un cocycle. On note $i_t : x \mapsto (x,t)$. Avec des identifications évidentes $i_0^*\nabla'_0 = \nabla_0$ et $i_1^*\nabla'_1 = \nabla_1$. Donc

$$i_0^* P(\Omega_\nabla) = P(\Omega_{\nabla_0}) \qquad i_1^* P(\Omega_\nabla) = P(\Omega_{\nabla_1})$$

et puisque i_0 et i_1 sont homotopes, $[P(\Omega_{\nabla_0})] = [P(\Omega_{\nabla_1})]$. □

Les propriétés de naturalité de la construction de $P(E)$ impliquent évidemment la

Proposition. – *Soit* $f : Y \to X$, *alors* $P(f^*E) = f^*P(E)$.

Théorème. – *La k-ième classe de Chern de $E \to X$ est donnée par*

$$c_k(E) = (\frac{1}{2i\pi})^k \sigma_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{C}).$$

On a annoncé une construction donnant $c_k(E) \in H^{2k}(X,\mathbb{R})$ or on a obtenu $c_k(E) \in H^{2k}(X,\mathbb{C})$. En réalité $c_k(E)$ est dans $H^{2k}(X,\mathbb{R})$. En effet, notons S_j le polynôme invariant défini par $S_j(A) = trace(A^j)$. On peut écrire σ_k en une combinaison linéaire à coefficient réel des S_j, $j = 1...k$. On munit $E \to X$ d'une métrique hermitienne et on choisit une connexion unitaire. Les Ω_α sont anti-hermitiennes donc les $\frac{1}{2i\pi}\Omega_\alpha$ sont hermitiennes et ainsi $S_j(\Omega_\alpha) = trace((\frac{1}{2i\pi}\Omega_\alpha)^j) \in \mathbb{R}$.

Esquisse de démonstration. – 1) On montre d'abord que si $E \to X$ est un fibré en droites complexes alors $\sigma_1(E) = 2i\pi c_1(E)$.
2) Soit $\overline{c} = \sum_k (\frac{1}{2i\pi})^k \sigma_k$ et $E \to X$ un fibré qui se décompose en une somme directe de fibrés en droites complexes $E_1 \oplus ... \oplus E_n$. Grâce au 1) on montre que $\overline{c}(E) = c(E)$.
3) Un argument standard (le "Splitting Principle" cf. [B-T, p. 273]) permet de passer au cas d'un fibré vectoriel complexe quelconque $E \to X$. □

Caractère de Chern. – Au lieu de partir d'un polynôme invariant $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ on peut considérer des séries formelles

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + ...$$

où chaque P_j est un polynôme homogène invariant de degré j. Si on choisit

$$P(A) = trace(e^{\frac{1}{2i\pi}A}),$$

la classe $[P(\Omega)]$ correspondante est appelé le *caractère de Chern* et on la note $ch(E) \in H^*(X, \mathbb{R})$. Elle se comporte bien pour la somme directe et le produit tensoriel.

Proposition. – *Soit $E \to X$ et $E' \to X$ deux fibrés vectoriels complexes. Alors*

$$ch(E \oplus E') = ch(E) + ch(E'), \quad ch(E \otimes E') = ch(E) \wedge ch(E').$$

Remarque. – Si X est de dimension 4 alors

$$ch(E) = dim\ E + c_1(E) + \frac{1}{2}c_1^2(E) - c_2(E).$$

3. Bibliographie

R. Bott et L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1982.
J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press 1974.
J. D. Moore, *Lectures on Seiberg-Witten Invariants*, Lecture Notes in Mathematics 1629, Springer 1996.

Institut Girard Desargues – UPRES-A 5028 du CNRS, Université Claude Bernard, Lyon 1, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address: borrelli@desargues.univ-lyon1.fr