Un Fibonacci-nois

13 avril 2019

Résumé : On présente un petit exercice qui se déploie du collège à l'agrégation. On travaille sur une suite *à la* Fibonacci, mais en ne gardant que les unités modulo 10.

Remerciement : Un grand merci à Pascal Corm pour l'exercice qui suit.

Exercice 0.1 (Version collège)**.** On part du nombre 2019 que l'on voit comme la succession des chiffres $2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 9$. On prolonge cette suite de chiffres en ajoutant à chaque fois les 4 derniers chiffres obtenus et en n'en gardant que celui des unités. On obtient pour les premiers chiffres

$$2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdots$$

Peut-on obtenir de façon consécutive les chiffres $2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 8$?

Soluce : La réponse est non. Il suffit pour cela de suivre les parités dans la récurrence. Si on note 0 pour les pairs et 1 pour les impairs et en rappelant la règle bien connue des opérations sur la parité (pair+pair=pair, impair+impair=pair, et impair+pair=impair), la suite donne

$$0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdots$$

On constate une suite périodique de période 5. En particulier, on n'aura jamais 2018 parce qu'il s'écrit en notation pair-impair $0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0$.

Exercice 0.2 (Version agreg externe***)**.** On part du nombre de quatre chiffres 2019 et on suit la récurrence comme dans l'exercice précédent. On a vu que tous les nombres de quatre chiffres ne pouvaient figurer dans cette suite, puisque 2018 n'y figure pas. Montrer que la probabilité qu'un nombre de quatre chiffres pris au hasard y figure est égale à $0,156$.

Soluce : Tout d'abord, on constate que si $U = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ est un quadruplet de nombres vus modulo 10, alors le quadruplet suivant est $(b, c, d, a+b+c+d)$, c'est-à-dire, si on dispose les vecteurs en colonnes, CU, où C est la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la matrice compagnon (ou sa transposée) du polynôme $X^4-X^3-X^2-X-1$.

On va tout d'abord se rassurer en retrouvant la période 5 de la version collège !

Si on considère C modulo 2, ce qui est déjà bien rassurant car on travaille sur un corps, en l'occurrence $\mathbb{F}_2$, $\overline{C}_2$ (la matrice réduite modulo 2) est la matrice compagnon du polynôme $\overline{P}_2 := X^4+X^3+X^2+X+1 = \frac{X^5-1}{X-1}$. Or, X^5-1 est un polynôme sans multiplicité dans $\mathbb{F}_2[X]$, car 2 ne divise pas 5. Il en résulte que la matrice $\overline{C}_2 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{F}_2)$ a pour polynôme minimal[1] $\overline{P}_2$ scindé simple sur une extension de $\mathbb{F}_2$. La matrice $\overline{C}_2$ est donc diagonalisable dans cette extension et ses valeurs propres sont des racines 5-ième de l'unité. Comme 1 n'est pas racine de $\overline{P}_2$, elles sont toutes d'ordre 5. Il en résulte que la suite $\overline{C}_2^k$ est de période 5, puisque $\overline{C}_2^5$ est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres égales à 1 . Et voilà pourquoi la suite des nombres de 4 chiffres en binaire était de période 5.

Pour pouvoir comprendre le comportement de la matrice C modulo 10 nous allons nous aider du lemme chinois et nous intéresser à présent à la matrice $\overline{C}_5 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{F}_5)$, réduite modulo 5. Comme pour le cas modulo 2, il suffit de trouver l'ordre des racines de $\overline{P}_5 = X^4-X^3-X^2-X-1$ dans une extension de $\mathbb{F}_5$.

Notons tout d'abord que

$$(X^4+X^3+X^2+X+1)(X-1) = X^5-1 = (X-1)^5,$$

par le Frobenius, et donc $X^4+X^3+X^2+X+1 = (X-1)^4$. Maintenant, toute racine de $\overline{P}_5$ a pour inverse une racine du polynôme symétrisé $-X^4-X^3-X^2-X+1 = -(X-1)^4+2$, donc de la forme $1+\alpha$, où α est une racine 4-ième de 2. Comme l'ordre d'un élément est aussi celui de son inverse, il suffit de trouver l'ordre de $1+\alpha$, avec $\alpha^4 = 2$.

Pour commencer, $\alpha^{24} = 2^6 = -1$, et donc $\alpha \notin \mathbb{F}_{25}$. Ceci implique que le polynôme X^4-2 ne peut être divisible par un polynôme de degré 1 ou 2 : il est donc irréductible et $\alpha \in \mathbb{F}_{625}^*$. Il en est de même pour $1+\alpha$ et, par Lagrange, son ordre est divisible par $624 = 3 \times 13 \times 16$.

Calculons

$$(1+\alpha)^{26} = (1+\alpha)^{25}(1+\alpha) = (1+\alpha^{25})(1+\alpha) = (1-\alpha)(1+\alpha) = 1-\alpha^2.$$

Il vient, en mettant l'égalité à la puissance 4 et 6 :

$$(1+\alpha)^{104} = (1-\alpha^2)^4 = \frac{(1-\alpha^2)^5}{(1-\alpha^2)} = \frac{1-\alpha^{10}}{1-\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \neq 1$$

$$(1+\alpha)^{156} = (1-\alpha^2)^6 = (1+\alpha^2)(1-\alpha^2) = 1-2 = -1.$$

Conclusion, comme $\alpha^k \neq 1$, avec $k = 312/2 = 156, 312/3 = 104, 312/13 = 24$, et comme $\alpha^{312} = (-1)^2 = 1$, on en déduit que α est d'ordre 312.

Le ppcm de 5 et 312 vaut 1560. Par le lemme chinois, et vu que C^{1560} se réduit en I_4 modulo 2 et I_4 modulo 5 (puisqu'elle est diagonalisable avec des valeurs propres toutes égales à 1), on a $C^{1560} = \mathrm{I}_4$.

1. Le polynôme minimal de la matrice compagnon de P est P lui-même, voir Carnet de Voyage en Algébrie, Remarque 1.3.22.

Il nous reste à montrer qu'il y a exactement 1560 (sur 10000 nombres à quatre chiffres) qui apparaissent dans la suite. Si $V = (2,0,1,9) \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, alors le k-ième nombre à 4 chiffres qui apparaît dans la suite est $C^{k-1}V$. D'après ce que l'on vient de voir, $C^{k+1560}V = C^kV$. On a donc bien au plus 1560 nombres à 4 chiffres qui apparaissent. Il reste à montrer qu'ils sont distincts. Soit donc $0 \leq i \leq j < 1560$, avec $C^iV = C^jV$. Comme les réductions $\overline{V}_2 = (0,0,1,1)$ et $\overline{V}_5 = (2,0,1,4)$ sont non nulles et que $\overline{C}_2$ et $\overline{C}_5$ sont inversibles (leurs valeurs propres sont clairement non nulles), il vient que $\overline{C}_2^i\overline{V}_2$ et $\overline{C}_5^i\overline{V}_5$ sont non nulles, et donc, l'égalité $C^iV = C^jV$ implique qu'ils sont vecteur propre respectivement de $\overline{C}_2^{j-i}$ et $\overline{C}_5^{j-i}$ pour la valeur propre 1. Donc, $j-i$ est à la fois multiple de 5 et de 312, donc, de 1560, et vu l'inégalité $0 \leq j-i < 1560$, on obtient $i = j$.

Remarque 0.3. Ce sera moins fun l'an prochain puisque 2020 n'aura pas la même période que 2019 ; en effet, $(2,0,2,0)$ se réduit en le vecteur nul modulo 2 (et ce n'est donc pas un vecteur propre !). Faudra se contenter d'une période de 312.

Remarque 0.4. Dans le même ordre d'idée, si p est un nombre premier impair et si l'on prend une suite non nulle de $p-1$ éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on obtient en ajoutant successivement les $p-1$ derniers éléments une suite de $(p-1)$-uplets de période p. La preuve ne nécessite pas de travailler sur des extensions de corps finis, et donc, peut se décliner en un exercice niveau Licence. En effet, on montre que si $C \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{F}_2)$ est la matrice compagnon associée, alors, son polynôme caractéristique est $1 + X + \cdots + X^{p-1}$, qui divise $X^p - 1$ et donc $C^p = \mathrm{I}_{p-1}$. Si, de plus, V est un vecteur non nul tel que $C^kV = V$, avec $1 \leq k < p$, alors, on écrit une identité de Bezout $up + vk = 1$ pour voir que

$$CV = C^{up+vk}V = (C^p)^u \left((C^k)^v V\right) = V.$$

C'est impossible car 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique de P (puisque p est impair).

Remarque 0.5. Après cette suite *à la* Fibonacci, on pourra se voir déconcerté devant la décomposition $1560 = 3 \times 5 \times 8 \times 13$. Comme quoi Fibonacci est partout et que 1560 pourrait bien devenir le nouveau 42, c'est-à-dire une réponse possible à la grande question sur la vie, l'univers et le reste, quoi que la réponse la plus plausible soit tout simplement le chocolat.