



# Index des exercices

## Chapitre 1.– Algèbre linéaire

*Lagrange et Taylor .....	15
**Dualité et l'algèbre des matrices .....	16
*Dualité injectif/surjectif .....	19
*Variations sur le lemme des noyaux .....	19
**Valeurs propres, trace, nilpotence et systèmes linéaires .....	27
*La réduction au secours des polynômes : borne de Cauchy .....	32
*Disques de Gershgorin .....	34
**Théorème de Kronecker .....	35
*Endomorphismes par multiplication matricielle : un grand classique .....	36
*** $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : une preuve par la réduction .....	38
*Continuité des formes linéaires .....	42
**Suite de polygones dans le plan complexe .....	43
*Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .....	46
**Continuité de l'application $A \mapsto \chi_A$ .....	47
**Une preuve topologique de Cayley-Hamilton .....	48
**Discriminant du polynôme caractéristique .....	50
**Un critère topologique de diagonalisabilité .....	51
**Continuité des racines /continuité des valeurs propres .....	52
***Disques de Gershgorin- un raffinement .....	80
**Adhérence de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables .....	56
**Sans la continuité du spectre, l'astuss! .....	57
***Méthode de Newton pour la décomposition de Dunford .....	58
*Diagonalisabilité sur un corps fini .....	62
**Nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .....	63
**Lemme de Fitting et cardinal du cône nilpotent .....	66
**Décomposition LU (et approuvée!) .....	69
*Décomposition LU sur les corps classiques .....	71
**Complexité de la décomposition LU .....	72



**Décomposition LU modulo permutations .....	74
**Transvections-généralités .....	75
**Engendrement de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$ .....	77
**Connexité du groupe spécial linéaire .....	80
**Forme réduite d'une application affine .....	82
***Forme réduite sur les corps classiques .....	84

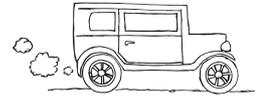
### Chapitre 2.– Formes quadratiques

**Le critère de Klarès de diagonalisation .....	93
**Nullstellensatz quadratique .....	95
**Critères de Sylvester pour la signature .....	97
***Formes de Hankel .....	99
**Le théorème spectral .....	102
**Théorème spectral-Variante avec calcul différentiel .....	103
*Recette simple et facile : l'hyperboloïde à la napolitaine .....	105
***Théorème de descente de Springer sur les formes quadratiques .....	107

### Chapitre 3.– Groupes

**DOC- $GL_n(\mathbb{C})$ : Dense-Ouvert-Connexe .....	114
**Propriétés topologiques du rang .....	117
**Dense ou monogène ? L'alternative .....	118
**Cas particulier de l'alternative .....	119
***Écriture décimale d'une puissance .....	120
**Ellipse de Steiner .....	121
***Unicité de l'ellipse de Steiner .....	123
*Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ , pour $n \neq 4$ . Application .....	124
**Simplicité de $SO(3)$ .....	127
**Classification des groupes simples : l'ordre 60 .....	129
** Formule de Burnside et première application .....	131
**Borne pour le nombre de classes de conjugaison .....	134
**Le tétraèdre .....	135
***Le groupe des isométries du cube .....	138
***Nombre de coloriage d'un solide platonicien à isométrie près .....	141
**Groupes projectifs .....	144
**Isomorphismes exceptionnelles .....	146
**Le groupe $SO_2(\mathbb{F}_p)$ .....	148
***Correspondance drapeaux/ $p$ -Sylow pour $GL_n(\mathbb{F}_p)$ .....	151



**Chapitre 4.– Arithmétique**

**Lancer de dés .....	156
**Formule du crible et applications .....	158
***L'énigme des prisonniers .....	161
*Applications du théorème de Lagrange - le best of .....	163
*Théorème chinois, système de congruences .....	165
**Système de congruences, cas général .....	167
**Critère de cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ .....	169
**Codage RSA .....	171
**Cryptanalyse : attaque probabiliste .....	174
***Polynômes continuants et théorème de de Lagny .....	176
*** (Non-)Irréductibilité des polynômes cyclotomiques .....	180
**Irréductibilité du déterminant .....	182
**Sous-anneaux quadratiques de $\mathbb{C}$ .....	186
*Lemme préliminaire pour certaines équations diophantiennes .....	189
**Le problème des canards .....	190
***Une équation de Mordell .....	193
***Une autre équation de Mordell .....	194
**Symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ .....	195
*Symbole de Legendre pour $a = -1$ et application .....	196
***Lemme de Zolotarev et symbole de Legendre $\left(\frac{2}{p}\right)$ .....	197
**Exemple : réduction de $\phi_8$ .....	199
***Théorème de descente pour la congruence .....	200
**Résultats préliminaires pour certaines représentations entiers .....	202
***Représentations de nombres premiers sous la forme $x^2 + 3y^2$ .....	205
***Représentations d'un entier sous la forme $x^2 + 3y^2$ .....	206
***Version faible du théorème de progression arithmétique de Dirichlet .....	207

