Remarques sur le théorème de Springer

Moriani Alex

Le théorème de Springer dit qu'une forme quadratique sur un corps $\mathbb{K}$ (même en caractéristique 2 !) possède un vecteur isotrope non nul si et seulement si elle possède un vecteur isotrope non nul dans une extension de degré impair, voir [1, Exercice 2.5.3], et [2].

Le contre-exemple en degré pair. On ne peut généraliser au cas d'une extension paire comme nous montre l'exemple $Q(x, y) = x^2 + y^2$, sur $\mathbb{R}^2$ elle est définie positive, or sur $\mathbb{C}^2$ le vecteur $(1, i)$ est isotrope non 0.

Le contre-exemple en degré infini. On ne peut non plus le généraliser pour une extension de degré infini comme nous montre le même exemple entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$.

Généralisation pour les extensions transcendantes pures. Cependant le théorème de Springer est vrai si $\mathbb{L} = \mathbb{K}(X)$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$. En effet, si $(R_1, \cdots, R_n)$ est isotrope non 0, avec $R_i \in \mathbb{K}(X) \forall i$ on peut par homogénéité se ramener au cas où les R_i sont des polynômes (multiplier par $ppcm(K_i) \neq 0$) et même premiers entre eux (diviser par le *pgcd* des polynômes ainsi obtenu). L'évaluation en n'importe quel élément de $\mathbb{K}$ est alors un vecteur isotrope non 0 (c'est évident car les R_i sont non tous nuls et nos multiplication et division ne transforme pas un R_i non nul en 0) de $\mathbb{K}^n$. $\diamond$

Bonus : la généralisation pour le corps des fractions de l'anneau des séries entières. Le théorème reste encore vrai sur le corps $\mathbb{K}((X))$.

Soit $Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $(S_1, \cdots, S_n)$ non nul, où $S_i \in \mathbb{K}((X)) \forall i$, et $Q(S_1, \cdots, S_n) = 0$ dans $\mathbb{K}((X))$. Par homogénéité on peut se ramener au cas où les S_i sont des séries (ie. des éléments de $\mathbb{K}[[X]]$).

Soit k la valuation minimale des séries S_i, $1 \leq i \leq n$, où la valuation d'une série est le plus petit rang pour lequel son coefficient est non nul. On peut donc écrire $S_i = X^k T_i$ pour tout i, avec T_i série entière pour tout i et k maximal pour cette propriété. Par maximalité de k, le vecteur $(T_1(0), \cdots, T_n(0))$ est non nul (en fait $T_i(0)$ est exactement le k^{eme} coefficient de S_i). De plus, par homogénéité, $(T_1, \cdots, T_n)$ est isotrope pour Q et donc $(T_1(0), \cdots, T_n(0))$ l'est également. $\diamond$

Références

[1] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de Voyage en Algébrie.* Calvage et Mounet, 2019.

[2] Rached Mneimnong-Huy Nguyen Alain Debreil, Jean-Denis Eiden. *Formes quadratiques et géométrie.* Calvage et Mounet, 2018.