Introduction

0.1 Problèmes de répartition

La théorie de l'équirépartition a été développée à partir de 1916 sous l'influence de l'article fondateur de H. Weyl intitulé “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. eins” [1], et est consacrée, du moins sous sa forme primitive, à l'étude de la répartition de parties fractionnaires de nombres réels dans l'intervalle unité. La motivation initiale de H. Weyl, l'obtention de résultats améliorant le théorème d'approximation de L. Kronecker (à savoir, la suite $(\{n\alpha\})_{n\geq 0}$ est dense dans l'intervalle $[0,1[$ pour tout nombre irrationnel α), place l'approximation diophantienne au cœur de cette problématique. Toutefois, les nombreuses applications de l'équirépartition, ainsi que leur diversité, lui confèreront rapidement le statut de théorie à part entière et contribueront fortement à son développement. Dès 1914, alors que les bases n'en sont pas encore totalement jetées, H. Weyl [248], reprenant également les travaux de H. Bohl [46] et W. Sierpinski [226, 227], donne déjà des applications de l'équirépartition des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ pour α irrationnel à l'étude des perturbations en astronomie ou celle du mouvement d'une bille de billard. L'utilisation dans cet article du terme *Ergodenhypothese* laisse d'ailleurs présager de liens qui s'établiront ensuite avec la théorie ergodique. Parallèlement, le concept de répartition uniforme est naturellement étendu aux suites multi-dimensionelles, puis à des espaces plus généraux comme les groupes topologiques, compacts ou quasi-compacts. De même la notion de répartition dans un espace compact ou localement compact par rapport à une mesure borélienne abstraite (sous-entendue différente de la mesure de Lebesgue ou de Haar) fait son apparition, offrant à la théorie toute sa généralité.

De l'importante différence de régularité entre certaines suites réelles, pourtant équiréparties, est née l'idée de plus ou moins bonne répartition. La notion de discrépance[2], mesure de déviation par rapport à une répartition idéale, a été introduite par V. Bergström[3] et constitue initialement une approche quantitative des problèmes de répartition des suites réelles. Il est néanmoins possible d'associer de façon naturelle une notion de discrépance à tous les concepts de répartition évoqués précédemment. Parmi les suites équiréparties (seules à réellement nous intéresser ici), il devient alors possible de distinguer les suites réellement régulières, celles de faible discrépance, des suites tout juste équiréparties dont la discrépance est plus importante. Afin d'estimer la discrépance D_N d'une suite, il est nécessaire d'en obtenir une majoration (par exemple du type $O(f(N))$ où f est une fonction classique) mais il est également utile d'en déterminer une minoration. En effet, cette dernière permettra de juger la pertinence de la majoration obtenue. La discrépance d'une suite étant généralement une fonction oscillante, les minorations recherchées sont du type $\Omega(f(N))$ (c'est-à-dire, $D_N > Cf(N)$ pour une certaine constante C et pour une infinité d'entiers N) où f désigne

[1]Pour une référence complète de l'article voir [249].

[2]Le terme discrépance semble en fait dû à une francisation brutale du terme allemand Diskrepanz qui signifie désaccord, divergence.

[3]Le terme discrépance fut lui probablement introduit un peu plus tard par van der Corput.

une fonction classique. Il est dans un premier temps aisé de constater l'impossibilité d'obtenir des majorations non triviales qui soient valables pour toutes les suites réelles ou toutes les suites du tore de dimension d. En effet, il est toujours possible de construire des suites équiréparties de discrépance arbitrairement grande (mais tout de même en $o(N)$). Aussi, pour majorer est-il indispensable de considérer une suite particulière ou du moins une classe de suites bien précise. Déterminer jusqu'à quel point une suite peut être équirépartie est en revanche un problème plus délicat qui n'est aujourd'hui bien résolu que pour les suites réelles unidimensionnelles par un résultat de W. Schmidt [215] (voir Théorème 0.1.1).

Concernant l'équirépartition des suites réelles unidimensionnelles, deux problèmatiques se distinguent principalement. D'une part, qu'en est-il de la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ ainsi que d'autres suites classiques issues de la théorie des nombres ? D'autre part, existe-t-il des suites dont la répartition est idéale et si c'est le cas, peut-on en donner des constructions explicites ? Ces deux questions bien que fondamentalement différentes se rejoignent, les suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ étant, du moins pour des paramètres quadratiques, de bons candidats pour obtenir des suites de faible discrépance. Il aura d'ailleurs fallu attendre 1981 et les constructions données par H. Faure [108] pour exhiber des suites mieux réparties que toute rotation irrationnelle. La recherche de suites de discrépance minimale est également motivée par l'inégalité de Koksma [149] qui montre que de telles suites offrent de bonnes approximations arithmétiques de calculs d'intégrales de fonctions suffisamment régulières. De plus, la discrépance de la suite permet de majorer les erreurs commises par ces approximations. La discrépance (ou des mesures qui lui sont liées) est également considérée comme une des mesures du caractère aléatoire d'une suite (voir par exemple [199] et [169]).

Le cas des suites réelles à valeurs dans un tore de dimension supérieure traduit la même ambivalence, avec d'un côté l'étude des suites de Kronecker, liée aux propriétés d'approximation diophantienne simultanée, et de l'autre la recherche et la construction de suites de faible discrépance. Cette dernière s'est considérablement développée notamment au cours des vingt dernières années sous l'influence de H. Niederreiter [181, 182, 183, 184, 185] (voir également [229] et [109] pour des résultats antérieurs). En effet, E. Hlawka [127] en obtenant un équivalent multidimensionnel de l'inégalité de Koksma (appelé depuis inégalité de Koksma-Hlawka), montre que les suites de faible discrépance en dimension k donnent de bonnes approximations arithmétiques de calculs d'intégrales de fonctions de k variables suffisamment régulières. La force de cette méthode, dite de quasi-Monte Carlo, est d'obtenir une majoration *a priori* et explicite de l'erreur commise, surpassant ainsi la méthode de Monte Carlo où l'on vérifie *a posteriori* que la suite testée est aléatoire et où l'erreur est de nature probabiliste. On compte de nombreuses applications des méthodes de quasi-Monte Carlo dont certaines semblent particulièrement prometteuses en mathématiques financières (voir [223, 224, 225] ou [89]).

0.1.1 Suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ et suites de Kronecker

Rappelons dans un premier temps les définitions d'équirépartition et de discrépance pour les suites réelles. Une suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs réelles est dite équirépartie modulo un si pour tout couple (a, b), $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[a,b[}(\{x_k\}) = b - a,$$

où $\chi_{[a,b[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b[$. La discrépance de la suite x est définie par

$$D_N(x) = \sup_{0 \le a \le b \le 1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[a,b[}(\{x_k\}) - N(b-a) \right|,$$

et la discrépance à l'origine de la suite x est donnée par

$$D_N^*(x) = \sup_{0 \le \beta \le 1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[0,\beta[}(\{x_k\}) - N\beta \right|.$$

Ces deux notions de discrépance sont équivalentes au sens où elles sont liées par la relation $D_N^* \le D_N \le 2D_N^*$. La première est sans doute plus naturelle, mais la discrépance à l'origine est souvent plus agréable à étudier. Une propriété remarquable est qu'une suite est équirépartie modulo un si et seulement si sa discrépance D_N est négligeable devant N (c'est-à-dire, $D_N = o(N)$). Il est naturel de se demander jusqu'à quel point une suite réelle peut être équirépartie. Le premier élément de réponse fut donné dans les années quarante par T. van Aardenne-Ehrenfest [241, 242] qui montra que $D_N(x)$ ne peut être bornée, quelle que soit la suite x ; ce résultat avait été conjecturé par J. G. van der Corput. Ensuite W. Schmidt [215] régla la question en 1972 en obtenant le résultat suivant :

Théorème 0.1.1 (Schmidt). *Il existe une constante C telle que pour toute suite réelle $x = (x_n)_{n \ge 0}$,*

$$D_N(x) > C \log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

En effet, des exemples de suites satisfaisant à $D_N = O(\log N)$ étaient déjà connus depuis longtemps (voir par exemple [186, 187]). Aussi, considère-t-on qu'une suite réelle est une suite de faible discrépance dès lors que $D_N = O(\log N)$.

Il est connu depuis les travaux de H. Weyl [249], H. Bohl [46] et W. Sierpinski [226, 227], que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si α est irrationnel. De nombreux auteurs ont alors étudié la discrépance de ces suites, à commencer par [31, 32, 124, 125]. Ces travaux ont mis en relief les liens profonds existant entre les qualités d'approximation diophantienne de l'irrationnel α et la discrépance de la suite $(n\alpha)$. Plus précisément, les irrationnels α les moins bien approchés par des nombres rationnels (comme le nombre d'or) offrent les suites $(n\alpha)$ les mieux réparties.

Nous allons à présent rappeler quelques résultats significatifs dans cette direction. Le supremum des réels γ pour lesquels l'inégalité

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\gamma+1}},$$

admet une infinité de solutions entieres q, est appelé le *type* de α. Notamment, tout algébrique irrationnel est de type 1 en vertu du théorème de K. F. Roth [211]. Dans [125] et [186], il est prouvé que pour un irrationnel α de type fini η et tout ε positif, $D_N(n\alpha) = O(N^{-\frac{1}{\eta}+\varepsilon})$. De plus, ce résultat est optimal puisque (voir [32]) pour un irrationnel α de type fini η et pour tout ε positif, il existe une constante C telle que

$$D_N(n\alpha) > CN^{-\frac{1}{\eta}+\varepsilon},$$

pour une infinité d'entiers N. Des démonstrations simples de ces deux résultats sont données dans [152]. On trouve également dans les travaux de H. Behnke [31, 32] les éléments permettant de prouver le résultat suivant :

Théorème 0.1.2 (Behnke). *Soit α un nombre irrationnel dont le développement en fractions continues est donné par $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Alors, $D_N(n\alpha) = O(\log N)$ si et seulement si la suite $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_k$ est bornée.*

Une preuve en est donnée dans [89]. Il en résulte que lorsque α verifie la condition du théorème précédent, donc notamment lorsque α est un nombre à quotients partiels bornés ou un nombre quadratique, la suite $(n\alpha)$ est une suite de faible discrépance. Il est alors naturel d'introduire les quantités

$$\nu(\alpha) = \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N(n\alpha)}{\log N}$$

et

$$\nu^*(\alpha) = \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N^*(n\alpha)}{\log N} \ .$$

Parmi les nombreux travaux sur ce sujet (voir par exemple [25, 26, 27, 95, 97, 158, 198, 217, 218]), notons que Y. Dupain et V. T. Sós [97] obtiennent l'égalité surprenante

$$\inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \nu^*(\alpha) = \nu^*\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4\log(1+\sqrt{2})},$$

plus tard complétée par C. Baxa [25] qui montre que $\nu^*(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = [\nu^*(\sqrt{2}), +\infty[$ (voir aussi [26, 27]). Il est également conjecturé que l'infimum des valeurs de ν est atteint pour le nombre d'or ([26]). Enfin, mentionnons un résultat métrique d'A. Khintchine [147] qui établit que, pour presque tout α, la suite $(n\alpha)$ est bien répartie. Nous en citons une version légèrement plus forte que l'on peut trouver dans [29].

Théorème 0.1.3 (Khintchine). *Pour toute fonction croissante φ,*

$$D_N(n\alpha) = O\left(\log N.\varphi(\log\log N)\right) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} < +\infty,$$

pour presque tout réel α.

Ainsi, comme l'illustrent les résultats précédents, la répartition des suites $(n\alpha)$ est vraiment bien comprise. Le rôle joué par le développement en fraction continue de α est prépondérant dans cette étude. Les résultats les plus fins sont en effet tous obtenus en utilisant le développement d'Ostrowski des entiers et des systèmes de numération associés. Nous reviendrons sur ces développement au paragraphe 0.2.2.

L'étude des suites de Kronecker, c'est-à-dire des suites du type $(n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_k)$, est en revanche beaucoup moins aboutie. Cela s'explique essentiellement par l'absence de bon équivalent multidimensionnel aux fractions continues. Nous ne donnons pas ici les définitions classiques d'équirépartition et de discrépance pour les suites de $\mathbb{R}^k$ (ou de $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$) ; le lecteur pourra par exemple se reporter à [152]. Bien que le critère de Weyl [249] donne aisément que la suite $(n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_k)$ est équirépartie modulo un si et seulement si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et 1 sont rationnellement indépendants, le comportement de la discrépance des suites de Kronecker s'avère toujours mal compris. L'inégalité d'Erdős-Turán-Koksma [150] permet toutefois d'obtenir que, pour toute suite de Kronecker équirépartie et de paramètres algébriques, $D_N = O(N^\varepsilon)$ pour tout ε positif. Cette majoration n'est cependant pas très satisfaisante, comme l'illustre le résultat suivant de J. Beck [29] :

Théorème 0.1.4 (Beck). *Pour toute fonction croissante φ,*

$$D_N(n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_k) = O\left(\log^k N.\varphi(\log\log N)\right) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} < +\infty,$$

pour presque tout k-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ (au sens de la mesure de Lebesgue) .

Ce théorème est réellement l'analogue multidimensionnel du théorème d'A. Khintchine que nous avons énoncé précédemment (voir également un résultat un peu plus faible de W. Schmidt [213] qui utilise l'inégalité d'Erdős-Turán-Koksma). En effet, on s'accorde généralement à penser que l'ordre de grandeur minimal pour la discrépance d'une suite à valeur dans $\mathbb{R}^k$ est $\log^k N$. Cependant ce résultat est seulement conjecturé et la principale minoration de la discrépance des suites de $\mathbb{R}^k$ est due à K. F. Roth [210] (voir également une amélioration due à J. Beck [28] pour $k = 2$).

Théorème 0.1.5 (Roth). *Soit k un entier strictement positif. Il existe une constante C_k telle que pour toute suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,*

$$D_N(x) > C_k \log^{\frac{k}{2}} N,$$

pour une infinité d'entiers N.

Le facteur résiduel $\frac{1}{2}$ dans l'inégalité ci-dessus vient du fait que K. F. Roth minore en fait une autre notion de discrépance, plus souple, la discrépance associé à la norme L^2 (voir par exemple [152]). Pour cette notion de discrépance, il est prouvé dans [65] que la minoration obtenue est en fait optimale.

0.1.2 Concepts généraux de répartition, discrépance locale et ensembles à restes exceptionnels

Comme nous l'avons déjà remarqué, la théorie de l'équirépartition et son aspect quantitatif, la discrépance, ne se limitent pas à l'étude de suites réelles. Le livre référence de L. Kuipers et H. Niederreiter [152], ainsi que l'ouvrage plus récent de M. Drmota et R. F. Tichy [89], l'illustre parfaitement. De nombreuses notions de répartition y sont abordées, chacune possédant plusieurs variantes dans les définitions. Toutefois, il s'en dégage une philosophie commune que nous allons essayer de détailler à présent.

Pour cela plaçons-nous dans un cadre suffisamment large et considérons un espace compact X, muni d'une mesure borélienne de probabilité μ et d'une base $\mathcal{B}$, si possible naturelle, de la topologie de X. On peut alors définir une notion de répartition sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ en demandant à une suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X d'être équirépartie si

$$\forall\, B \in \mathcal{B},\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) = \mu(B),$$

où $\chi_{\{B\}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble B. Cette notion s'avère particulièrement intéressante lorsque la définition de $\mathcal{B}$ garantit que pour toute fonction f continue sur X

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = \int_X f d\mu.$$

Il est de même possible de définir la discrépance de la suite x par :

$$D_N(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) - N\mu(B) \right|.$$

Ainsi, lorsque l'on parle de répartition est-il indispensable de préciser par rapport à quelle mesure et à quelle base de la topologie de l'espace on souhaite travailler. Dans le cas des suites réelles par exemple, la mesure est implicite (il s'agit bien sûr de la mesure de Lebesgue) et la base de la topologie est généralement formée des intervalles de $[0,1[$ ou des intervalles de $[0,1[$ ayant pour origine 0 (pour la discrépance à l'origine).

La discrépance est une mesure uniforme de répartition et il peut donc sembler surprenant, voir inopportun, de parler de discrépance locale. Il s'agit néanmoins d'une notion très utile, qu'il serait illogique de nommer autrement ; cette terminologie apparaît entre autres dans [180] et [30].

Définition 0.1.6. *En conservant les notations précédentes, la discrépance locale de x en B, B désignant un élément de $\mathcal{B}$, est notée $\Delta_N(x;B)$, et est définie par :*

$$\Delta_N(x;B) = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) - N\mu(B) \right|.$$

Ainsi, discrépance et discrépance locale sont-elles liées par la relation

$$D_N(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \Delta_N(x;B).$$

Une première remarque, simple mais néanmoins importante, est que toute minoration d'une discrépance locale fournit immédiatement une minoration pour la discrépance (voir chapitre 3 pour un exemple). Ensuite, si la discrépance détecte bien les irrégularités dans la répartition (grâce au supremum dans la définition), elle ne permet généralement pas de révéler les ensembles pour lesquels la répartition est particulièrement bonne. Ce sont ces deux aspects qui motivent principalement l'étude de la discrépance locale (ainsi qu'un troisième aspect plus dynamique abordé au paragraphe suivant). Enfin, il est intéressant de remarquer que l'étude de la discrépance locale d'une suite n'est pas nécessairement plus simple que celle de sa discrépance. Par exemple, H. Niederreiter [180] calcule sans grande difficultés l'ordre de grandeur de la discrépance de la suite de Farey, mais exhibe pour cette même suite un problème de discrépance locale équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Ensembles à restes exceptionnels

Nous parlerons d'*ensembles à restes exceptionnels* pour nommer un ensemble dont la répartition est soit très mauvaise soit quasiment idéale. Commençons par définir une classe d'ensembles exceptionnellement bons : les ensemble à restes bornés.

Définition 0.1.7. *Un ensemble B est dit à restes bornés pour la suite x, si $\Delta_N(x;B)$ est une suite bornée. Plus généralement, une famille d'ensembles $\mathcal{B}$ est dite à restes uniformément bornés pour la suite x si la suite*

$$\left(\sup_{B\in\mathcal{B}} \Delta_N(x;B) \right)_{N\geq 0}$$

est bornée.

Ces ensembles ont été l'objet de nombreuses études dont nous rappelons les principaux résultats. Le premier d'entre eux, et certainement le plus célèbre, est un théorème datant de 1966 et dû à H. Kesten[4] [146].

Théorème 0.1.8 (Kesten). *Un intervalle de* $[0,1[$ *est à restes bornés pour la suite* $(\{n\alpha\})$ *si et seulement si sa longueur appartient à* $\mathbb{Z}\alpha \mod 1$.

Ensuite, W. Schmidt [216] a montré la rareté de ces ensembles en prouvant que toute suite réelle ne possède au plus qu'un nombre dénombrable d'intervalles à restes bornés, et G. Rauzy [204] a prouvé l'existence d'ensembles non mesurables à restes bornés pour les suite $(n\alpha)$. Les intervalles à restes majorés (respectivement minorés), c'est-à-dire pour lesquels la somme $\sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) - N\mu(B)$ est simplement majorée (respectivement minorée), sont étudiés pour les suites $(n\alpha)$ dans [94] et [96]. Nous développerons au chapitre 2 une méthode permettant de déterminer si l'intervalle $[0,\beta[$ est à restes majorés ou bien minorés pour la suite $(n\alpha)$ lorsque α et β appartiennent à un même corps quadratique.

Pour les suites de Kronecker, un résultat négatif de P. Liardet [159] montre qu'il ne peut exister de pavés non triviaux à restes bornés. Toutefois, G. Rauzy [202] exhibe des ensembles à frontières fractales (voir figure 5) qui sont à restes bornés pour une suite de Kronecker de dimension 2 (voir également [235] pour le cas d'un parallélogramme). Nous détaillerons la construction de ces ensembles au paragraphe 0.2.4.

Les ensembles à restes bornés jouent un rôle important dans l'étude spectrale des systèmes dynamiques ergodiques. Ainsi, H. Furstenberg, H. Keynes et L. Shapiro [119] obtiennent-ils en 1973 une importante généralisation du théorème de H. Kesten :

Théorème 0.1.9 (Furstenberg, Keynes, Shapiro). *Soit* $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ *un système dynamique ergodique. Si un élément* B *de l'ensemble* $\mathcal{B}$ *est, pour presque tout* x, *un ensemble à restes bornés pour la suite* $(T^n(x))_{n\geq 0}$, *alors* $e^{2\pi i\mu(B)}$ *est une valeur propre pour la transformation* T, *c'est-à-dire il existe une fonction mesurable* f *telle que* $f(T(x)) = e^{2\pi i\mu(B)}f(x)$ *pour tout élément* x *de* X. *De plus, si* $e^{2\pi ir}$ *est une valeur propre pour* T, *il existe un ensemble* B *appartenant à* $\mathcal{B}$ *tel que* $\mu(B) = r$ *et tel que* B *soit, pour presque tout* x, *un ensemble à restes bornés pour la suite* $(T^n(x))_{n\geq 0}$.

Le théorème de H. Kesten implique donc que pour tout élément r de $\mathbb{Z}[\alpha]$, $e^{2\pi ir}$ est une valeur propre pour la rotation d'angle α. Dans ce cas, il est déjà connu que le groupe des valeurs propres est en fait égal à $\{e^{2\pi ir},\ r \in \mathbb{Z}[\alpha]\}$. Ainsi, toute valeur propre est-elle ici "réalisée" par un intervalle à restes bornés.

Notons qu'il est également prouvé dans [123] que si, pour tout x appartenant à un ensemble de mesure positive, B est un ensemble à restes majorés pour la suite $(T^n(x))_{n\geq 0}$, alors $e^{2\pi i\mu(B)}$ est encore une valeur propre pour la transformation T (voir également [191] sur ce sujet).

Une autre propriété importante des ensembles à restes bornés est donnée par G. Rauzy dans [204]. L'énoncé de ce résultat étant un peu technique, il nécessite l'introduction de quelques notations que nous allons rappeler. Considérons un entier k, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ et L un réseau de $\mathbb{R}^k$, de sorte que la transformation T définie de $\mathbb{R}^k/L$ dans lui-même par

$$T(x) = x + \alpha \mod L$$

[4] La partie suffisante du théorème est en fait due à Hecke [125].

soit minimale. Soit A une partie de $\mathbb{R}^k$, bornée, d'intérieur non vide et telle que

$$\forall\, x, y \in A, \;\; x - y \in L \Rightarrow x = y.$$

Cette dernière propriété nous permet d'identifier A à son représentant canonique $\overline{A}$ dans $\mathbb{R}^k/L$. L'application induite par T sur A, notée T_A, est alors définie de A dans lui même par :

$$T_A(x) = \inf_{n>0} \{T^n(x) \in A\}\,.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de [204].

Théorème 0.1.10 (Rauzy). *Conservons les notations précédentes et supposons de plus qu'il existe un réseau M de $\mathbb{R}^k$ et $\beta \in \mathbb{R}^k$ tels que :*
(i) $\forall\, x, y \in A, \;\; x - y \in M \Rightarrow x = y,$
(ii) $\forall\, x \in A, \;\; T_A(x) = x + \beta \mod M.$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^k/L$, l'ensemble A est un ensemble à restes bornés pour $(T^n(x))_{n\geq 0}$.

Ainsi, dira-t-on plus simplement (et avec un léger abus de langage) que si l'induit d'une rotation T de $\mathbb{R}^k/L$ sur un ensemble A est à nouveau une rotation (pour un autre réseau), A est un ensemble à restes bornés pour T. Ce résultat a notamment une grande importance dans la représentation géométrique des systèmes substitutifs (se reporter au paragraphe 0.2.3 et à la discussion du paragraphe 0.2.5).

La recherche de "mauvais" ensembles pour la répartition d'une suite n'a jusqu'à présent pas fait l'objet d'une étude intensive. Néanmoins, le résultat suivant de R. Tijdeman et G. Wagner [240] peut être considéré comme une version locale du théorème de W. Schmidt (voir [232] pour un résultat similaire dans le cas des suites $(n\alpha)$).

Théorème 0.1.11 (Tijdeman-Wagner). *Il existe une constante C telle que pour toute suite réelle x,*

$$\Delta_N(x; [0, \beta[) > C \log N,$$

pour presque tout β dans $]0, 1[$.

Ce résultat implique notamment que pour toute rotation d'angle quadratique α, les "mauvais" intervalles sont en fait génériques.

Nous exhiberons au chapitre 2 (voir également [2]) certains de ces ensembles, à savoir les intervalles $[0, \beta[$ pour lesquels β appartient à $(\mathbb{Q}(\alpha) \setminus \mathbb{Z}[\alpha]) \mod 1$. Nous montrons également pour certaines de ces rotations, comme la rotation d'angle le nombre d'or, l'existence d'intervalles du type $[0, \beta[$ qui s'avèrent très particuliers. En effet, ces intervalles vérifient la propriété suivante

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N(n\alpha; [0, \beta[)}{\log N} = \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N^*(n\alpha)}{\log N},$$

qui s'exprime également par

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N(n\alpha; [0, \beta[)}{D_N^*(n\alpha)} = 1, \tag{1}$$

puisque par définition

$$\Delta_N(n\alpha; [0, \beta[) \leq D_N^*(n\alpha).$$

Par exemple, nous obtenons

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{D_N^*(n\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{\log N} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N\left(n\frac{\sqrt{5}-1}{2};\left[0,\frac{\sqrt{5}+5}{10}\right[\right)}{\log N}.$$

Notons qu'ici la renormalisation par le facteur $\log N$ est naturelle puique $D_N^*(n\alpha) = O(\log N)$ lorsque α est quadratique (voir théorème 0.1.2), mais la formulation de (1) évite de connaître préalablement l'ordre de grandeur de D_N^*. L'équation (1) signifie que l'irrégularité uniforme de la suite $(n\alpha)$ est réalisée par l'irrégularité locale de cette suite par rapport à l'intervalle $[0,\beta[$. Ces ensembles à restes exceptionnels n'ont pour l'instant pas du tout été étudiés. La propriété précédente amène pourtant un certain nombre de questions.

Questions : Pour tout nombre α irrationnel, nous introduisons l'ensemble suivant :

$$\left\{\beta\in[0,1[\,,\ \ \limsup_{N\to\infty}\frac{\Delta_N(n\alpha;[0,\beta[)}{D_N^*(n\alpha)} = 1\right\}.$$

Cet ensemble est-il nécessairement non vide ? Si tel est le cas, est-il dénombrable, de mesure nulle ? Quelle en est la dimension de Hausdorff ? Qu'en est-il lorsque l'on remplace la suite $(n\alpha)$ par une suite réelle quelconque ?

0.1.3 Discrépance symbolique

Une idée essentielle dans ce travail est d'introduire et de formaliser des notions de répartition dans un contexte symbolique. Au vu des concepts généraux que nous avons déjà discutés, cela semble légitime. Notre volonté n'est cependant pas de présenter uniquement une énième variation sur le thème de la répartition mais plutôt de montrer que les suites symboliques fournissent un cadre d'étude naturel aux problèmes de discrépance locale et donc *a fortiori* à la recherche d'ensembles exceptionnels. Aussi considérons-nous les suites symboliques comme s'inscrivant réellement au cœur des problèmes de répartition.

Commençons par rappeler les définitions d'équirépartition et de discrépance pour les ensembles finis. Considérons un ensemble fini $\mathcal{A}$. Muni de la topologie discrète, $\mathcal{A}$ est un ensemble compact dont les éléments engendrent naturellement la topologie. Considérons une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{A}$. Une suite $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est dite équirépartie par rapport à μ si :

$$\forall\, a\in\mathcal{A},\ \ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\chi_{\{a\}}(u_k) = \mu(a),$$

où $\chi_{\{a\}}$ désigne la fonction indicatrice du singleton $\{a\}$. Il est facile de constater que chaque élément de notre ensemble $\mathcal{A}$ admet une fréquence dans une suite lorsque celle-ci est équirépartie. *A contrario*, considérons une suite U definie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ et dont les lettres admettent des fréquences. Le vecteur des fréquences $\Lambda=(\Lambda_i)_{i\in\mathcal{A}}$ définit sur l'ensemble $\mathcal{A}$ une mesure de probabilité naturelle pour U. L'existence des fréquences implique que U est équirépartie par rapport à cette mesure de probabilité. Notamment, pour un point fixe de substitution primitive (une définition est donnée au paragraphe 0.2.1) une telle mesure existe toujours (voir par exemple [195]).

Il existe alors une notion de discrépance pour de telles suites.

Définition 0.1.12. *La discrépance $\Delta_N(\mu, U)$ de la suite U par rapport à la mesure μ est définie par :*

$$\Delta_N(\mu, U) = \max_{a \in \mathcal{A}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\chi_{\{a\}}(u_k) - \mu(a) \right) \right|.$$

Ainsi, la discrépance $\Delta_N(\Lambda, U)$ mesure-t-elle la vitesse de convergence du vecteur

$$\left(\frac{|u_0 u_1 \dots u_{N-1}|_a}{N} \right)_{a \in \mathcal{A}}$$

vers le vecteur des fréquences Λ.

Bien que l'étude de la discrépance sur un ensemble fini soit dotée d'un intérêt propre (voir par exemple [89] et [237]), cette notion peut prendre un caractère beaucoup plus général. En effet, considérons une suite $x = (x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace compact X muni d'une mesure de probabilité ν. Étant donnée une partition mesurable $P = (P_1, \dots, P_k)$ de l'espace X, nous pouvons définir la discrépance locale[5] de x par rapport à ν et P par :

$$\Delta_N(x, P) = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\chi_{\{P_i\}}(x) - \nu(P_i) \right) \right|.$$

La suite $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{A} = \{1, \dots, k\}$ et définie par

$$u_n = i \text{ , si } x_n \in P_i,$$

est appelée le *codage naturel* de x par rapport à P. Les définitions précédentes entraînent alors

$$\Delta_N(x, P) = \Delta_N(\mu, U),$$

où μ est la mesure induite par ν sur $\mathcal{A}$ (à savoir, $\mu(i) = \nu(P_i)$). En particulier, la suite $\Delta_N(\mu, U)$ est bornée si et seulement si chaque P_i est un ensemble à restes bornés pour x.

Ainsi, tout problème de discrépance locale (sur n'importe quel espace compact) se réduit-il à l'étude de la répartition d'une suite symbolique. Ceci confère à cette dernière une place centrale, mais rend du même coup utopique l'idée d'obtenir des résultats généraux sur la répartition des suites symboliques. Toutefois, nous montrons au chapitre 3 qu'en restreignant notre étude au cas des suites obtenues comme points fixes de substitutions primitives (ce qui correspond tout de même à une classe assez étendue de suites fournissant de nombreux exemples), il est possible de décrire simplement et avec précision le comportement asymptotique de leurs fonctions de discrépance. En particulier, nous obtenons des résultats sur la répartition des substitutions primitives de type Salem (substitutions primitives dont la matrice d'incidence admet une unique valeur propre de module strictement supérieur à un et au moins une valeur propre de module un). Il s'agit en fait d'un abus de langage car nous ne demandons pas au polynôme caractéristique d'être irréductible. Ainsi, la valeur propre dominante d'une substitution de type Salem n'est-elle pas nécessairement un nombre de Salem.

Parallèlement, il est naturel d'associer à une suite U à valeurs dans un alphabet fini le système dynamique $(\overline{\mathcal{O}(U)}, T)$, où $\overline{\mathcal{O}(U)}$ est la fermeture de l'orbite de la suite U sous l'action du shift T[6].

[5] Nous renvoyons au paragraphe 0.1.2 pour plus de détails sur cette notion.

[6] Une définition plus précise est donnée au paragraphe 0.2.1.

Existe-t-il une notion naturelle de discrépance sur de tels espaces ? Comment se comportent ces systèmes ?

Considérons une suite symbolique U, $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T)$ le sous-shift associé à U, et μ une mesure invariante pour l'action du décalage. On propose alors de définir une notion de discrépance pour un tel système dynamique.

Définition 0.1.13. *La fonction de discrépance du système dynamique $\mathcal{X}$ (par rapport à μ) par :*

$$D_N(\mathcal{X}) = \sup_{V \in \overline{\mathcal{O}(U)}} \sup_{w \in \mathcal{L}(U)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[w]}(T^k(V)) - N\mu([w]) \right|,$$

où $[w]$ désigne le cylindre associé au mot w.

Cette définition est évidemment justifiée par le fait que les cylindres forment une base naturelle de la topologie de $\overline{\mathcal{O}(U)}$. De plus, si (X, T, μ) est un système dynamique uniquement ergodique et f une fonction continue sur X, alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k \to \int f d\mu$$

et la convergence est uniforme. Cependant, la vitesse de convergence dépend de la régularité de la fonction f (voir par exemple les inégalités de [149] ou de Koksma-Hlawka [127]). La quantité

$$\sup_{x \in X} \sup_{f \in \mathcal{C}(X)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k(x) - N \int f d\mu \right|$$

est donc assurément infinie et ne présente aucun intérêt. La fonction de discrépance que nous venons d'introduire mesure la vitesse de convergence uniforme de sommes de Birkhoff, mais en nous restreignant à une classe très régulière de fonctions “presque continues”, à savoir les fonctions indicatrices des cylindres. Cette classe de fonctions étant suffisamment large (les cylindres forment une base de la topologie de $\overline{\mathcal{O}(U)}$) nous pouvons considérer $D_N(\mathcal{X})$ comme une mesure de l'unique ergodicité des sous-shifts (ayant cette propriété).

Un autre aspect intéressant de cette fonction de discrépance est que si la suite $D_N(\mathcal{X})$ est bornée, alors tout cylindre est un ensemble à restes bornés pour $\mathcal{X}$. On obtient ainsi une version symbolique du théorème de H. Kesten, les cylindres représentant l'analogue symbolique des intervalles (en tant que base “canonique” de la topologie). Sous ces hypothèses, le résultat est même nettement plus fort puisque les cylindres forment en fait une famille d'ensembles à restes uniformément bornés (voir définition 0.1.7).

Nous verrons notamment au chapitre 3 que les systèmes associés aux substitutions de Fibonacci et Tribonacci vérifient ces conditions et nous donnerons une condition suffisante (et presque nécessaire) pour qu'un système associé à un point fixe de substitution primitive ait une fonction de discrépance bornée. Plus généralement, nous obtenons une description simple du comportement asymptotique de la fonction de discrépance des systèmes associés aux points fixes de substitutions primitives, systèmes connus pour être uniquement ergodiques [171, 172].

0.2 Combinatoire

0.2.1 Substitutions et développements S-adiques

La notion de substitution ou plus exactement de système dynamique substitutif a été introduite en 1963 par W. H. Gottschalk [121]. De tels systèmes, issus de la dynamique symbolique et dotés d'une structure à la fois simple et riche, interagissent avec de nombreux autres domaines et objets mathématiques dont la combinatoire des mots, la théorie des nombres et l'arithmétique, la théorie ergodique, la théorie spectrale, l'algèbre linéaire, les pavages, les ensembles fractals, les automates et la théorie des langages. Deux ouvrages, [195] et [194], sont d'ailleurs complètement consacrés à l'étude de ces interactions. Une *substitution* est un objet de nature combinatoire et plus précisément il s'agit un morphisme non effaçant défini sur le monoïde libre $\mathcal{A}^* = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{A}^k$ engendré par un ensemble fini $\mathcal{A}$.

Dans la suite nous considérons qu'un ensemble fini $\mathcal{A}$, appelé alphabet, est muni de la topologie discrète et que les ensembles $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et par extension $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sont munis de la topologie produit des topologies discrètes. Une application définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ s'étend par concaténation en un endomorphisme de $\mathcal{A}^*$, puis se prolonge par continuité en une application de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. Ainsi nous définirons toujours une substitution par la donnée d'une application d'un alphabet $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^*$, mais nous considèrerons, suivant le contexte, qu'elle agit sur des mots finis ou infinis. Considérons une substitution σ définie sur un alphabet $\mathcal{A}$ et supposons qu'il existe une lettre a telle que $\sigma(a)$ commence par a et soit un mot de longueur au moins deux. Dans ce cas, la suite $(\sigma^n(a))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, point fixe de la substitution. Par exemple, la substitution de Fibonacci, définie par $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 1$ admet $\sigma^\infty(1) = 1211212112\ldots$ comme unique point fixe. Il est ainsi parfois plus agréable de considérer une substitution comme la donnée d'un tel triplet comme cela est fait dans [98].

Définition 0.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. Une substitution définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est un triplet $(\sigma, a, \mathcal{A})$, où σ est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^+ = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{A}^k$ et telle que a soit un préfixe strict de $\sigma(a)$.*

Plus généralement une suite U à valeurs dans l'alphabet $\mathcal{B}$ est dite *substitutive* s'il existe une suite V, point fixe d'une substitution définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$, et un *morphisme* φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}^*$ tels que $U = \varphi(V)$. On associe alors à la suite U le système dynamique naturel $(\overline{\mathcal{O}(U)}, T)$, où $\overline{\mathcal{O}(U)}$ désigne la fermeture de l'orbite de la suite U sous l'action du décalage ou shift T (défini par $T(U) = (u_n)_{n\geq 1}$). Un tel système est appelé *système dynamique substitutif* associé au triplet $(\sigma, a, \mathcal{A})$ et à la projection φ.

Pour étudier une substitution σ ou le système substitutif associé, il est souvent utile d'introduire la matrice d'incidence de la substitution $M_\sigma = (|\sigma(j)|_i)_{i,j\in\mathcal{A}}$. Cette matrice correspond à une "abélianisation" de la substitution et doit donc être considérée comme un objet plus simple mais qui ne contient pas toute l'information initiale. L'intérêt de définir ces matrices est bien sûr de bénéficier ensuite de la puissance des méthodes de l'algèbre linéaire comme nous le verrons aux chapitres 2 et 3. Notons que la condition de *primitivité*, à savoir, il existe une puissance de la matrice dont les coefficients sont tous strictement positifs, s'avère souvent nécessaire et permet d'éviter certaines substitutions dégénérées. D'un point de vue dynamique, les substitutions apparaissent naturellement dans l'étude des systèmes auto-similaires, c'est-à-dire lorsque le système induit[7] sur un sous-ensemble est isomorphe au système initial. De tels exemples sont en particulier fournis par les rotations quadratiques du tore de dimension un (voir par exemple [5]), certaines rotations algébriques torales en dimensions supérieures [202, 19, 57] ou les échanges d'intervalles dont les longueurs appartiennent à un même corps quadratique [48].

Nous avons remarqué que l'itération d'une substitution permet souvent de définir une suite infinie aux propriétés intéressantes. Nous nous intéressons à présent à une généralisation de ce phénomène. Nous reprenons les notations et la terminologie utilisés dans [194]. Considérons un ensemble fini S de substitutions définies sur un alphabet commun $\mathcal{B}$ et un morphisme φ de $\mathcal{B}$ vers un alphabet $\mathcal{A}$.

Définition 0.2.2. *Soit $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans S telle que pour tout élément $r \in \mathcal{B}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n(r)| = +\infty$. Une suite U définie par $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n(b))$, où $b \in \mathcal{B}$, est appelée suite S-adique[8] et le couple $(\varphi, (\sigma_n)_{n\geq 0})$ est appelé développement S-adique de U.*

Une suite S-adique peut ainsi être engendrée par un nombre fini de substitutions. Des expressions S-adiques explicites sont déjà connues pour les suites sturmiennes, les suites d'Arnoux-Rauzy [23], les codages de rotations [86, 5] et les échanges d'intervalles [117, 5, 163]. Dans ces exemples, les résultats sont même beaucoup plus forts puisque toute les suites du même type (soit sturmiennes, soit d'Arnoux-Rauzy, ...) sont décrites à l'aide d'un même ensemble de substitutions. Ces représentations sont généralement obtenues en utilisant soit le graphe des mots (voir par exemple [38]) soit un procédé d'induction comme celui décrit dans [201] pour les échanges d'intervalles (nous rappelons ce procédé au chapitre 1 dans le cadre des échanges de trois intervalles). Plus généralement, dans [112] S. Ferenczi montre l'existence de développements S-adiques pour toute suite minimale dont la complexité est sous-linéaire (c'est-à-dire, il existe c tel que $p(n) < cn$ pour tout n). Nous rappelons que la fonction de complexité $p(n)$ d'une suite associe à tout entier n strictement positif le nombre de mots distincts de longueur n admettant une occurrence dans cette suite (nous reviendrons sur cette notion au paragraphe 0.2.6). Ce résultat, qui utilise un théorème de [61], est théorique et ne donne pas de description explicite. Bien que sa réciproque soit fausse (il existe des point fixes de substitution de complexité minorée par $cn\log(n)$, $c > 0$ [188]), peut-on caractériser les suites de complexité sous-linéaire en termes de S-adicité ? En d'autres termes, existe-t-il des conditions sur les substitutions et/ou sur les développements permettant de définir une nouvelle notion de suite S-adique équivalente à la complexité sous-linéaire ? La conjecture S-adique (voir par exemple[194]) affirme qu'il est possible d'obtenir une telle caractérisation.

Dans [100], F. Durand donne une condition suffisante de complexité sous-linéaire, la récurrence linéaire, qui est de plus équivalente à une notion restrictive de S-adicité [102]. Une suite est dite linéairement récurrente s'il existe un réel K tel que tout facteur de longueur Kn contienne nécessairement tous les facteurs de longueur n de la suite. Malheureusement, il existe des suites de complexité faible qui ne sont pas linéairement récurrentes comme les suites sturmiennes dont l'angle a un développement en fraction continue non borné [102]. Ainsi, la récurrence linéaire ne permet-elle pas d'obtenir la caractérisation souhaitée. Toutefois, cette notion s'avère utile et pertinente comme l'illustrent notamment les résultats de [100], [157] et [114] ; nous l'utiliserons d'ailleurs à plusieurs reprises dans les chapitres 4 et 5.

[7] Se reporter au paragraphe 0.1.2 pour une définition.

[8] Par analogie avec la terminologie adique introduite par A. Vershik (voir par exemple [246]).

Nous verrons dans la troisième partie de cette thèse que les expressions S-adiques sont particulièrement adaptées à l'étude des phénomènes de répétition intervenant dans les suites symboliques (voir également [208, 40]). Ceci s'explique par le fait que les substitutions "transmettent" les puissances. Enfin, les développements S-adiques semblent propices à l'introduction d'algorithmes de fractions continues multidimensionnels (voir par exemples [200, 251, 23, 86, 117, 163, 5]), produisant alors une description arithmétique des suites. C'est en particulier le cas de l'expression S-adique que nous donnons, au chapitre 1, pour les codages de rotations.

0.2.2 Systèmes de numération

Les systèmes de numération occupent une place centrale dans l'étude de la discrépance, qu'il s'agisse de suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un espace plus abstrait. Limitons nous dans un premier temps au cas des suites à valeurs dans le tore de dimension un. Il existe alors essentiellement deux méthodes pour majorer la discrépance d'une suite.

La première très générale, puisque s'appliquant en théorie à toutes les suites, repose sur l'inégalité d'Erdős-Turán [105, 106] et fait donc intervenir l'étude de sommes d'exponentielles. Très utile pour obtenir des résultats plutôt généraux, elle s'avère pourtant souvent inefficace lors de recherches plus précises. Ainsi, l'inégalité d'Erdős-Turán donne-t-elle aisément que pour un irrationnel α de type fini[9] η et tout ε positif, $D_N(n\alpha) = O(N^{-\frac{1}{\eta}+\varepsilon})$, mais ne permet pas de montrer que $D_N(n\alpha) = O(\log(N))$ lorsque les quotients partiels de α sont bornés. Ce dernier résultat, établi dans [152], nécessite l'introduction de systèmes de numération adaptés, liés au développement d'Ostrowski associé au réel α. Ce développement des entiers est associé à l'échelle de numération $(q_n)_{n\geq 0}$, où les q_n désignent les dénominateurs des convergents de α. Il est également possible d'introduire un développement analogue pour les réels ayant pour base la suite $(q_n\alpha - p_n)_{n\geq 0}$, où les p_n désignent les numérateurs des convergents du réel α (voir [39] pour un survol sur ce sujet).

La seconde méthode de majoration de la discrépance D_N d'une suite consiste à développer dans des systèmes de numération spécifiques d'une part l'entier N et d'autre part les N premiers éléments (réels) de la suite. Ainsi, retrouve-t-on toujours une complémentarité entre développement d'entiers et de réels. Par exemple, nous avons déjà remarqué l'importance et l'efficacité du développement d'Ostrowski (et des systèmes de numération associés) pour l'étude de la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$. Dans le même esprit, la plupart des constructions de suites de faible discrépance sont fondées sur l'utilisation de systèmes de numération ; par exemple, le développement binaire pour la suite de van der Corput et les développements b-adiques pour les suites de Halton ou de Faure.

L'étude de la discrépance symbolique des points fixes de substitutions primitives n'échappe pas à cette règle. C'est pourquoi nous devons également introduire un système de numération adapté qui nous permettra à la fois de développer les entiers et les points fixes de substitutions (jouant ici le rôle des réels). Ce système est introduit par J.-M. Dumont et A. Thomas [92] sous une forme classique. Dans [205], G. Rauzy en donne une version plus visuelle à l'aide de l'automate des préfixes. C'est ce point de vue que nous avons choisi d'adopter.

Définition 0.2.3. *Considérons une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A}$ et notons $Pref_\sigma$ le sous ensemble de $\mathcal{A}^*$ formé des préfixes stricts des images par σ des éléments de $\mathcal{A}$. L'automate des préfixes associé à la substitution σ est défini de la façon suivante :*

[9] Se reporter au paragraphe 0.1.1 pour une définition du type.

– $\mathcal{A}$ *est l'ensemble des états de l'automate,*
– $Pref$ *est l'ensemble des étiquettes,*
– *il existe une flèche de l'état a vers l'état b étiquetée par le mot m si mb est un préfixe de* $\sigma(a)$.

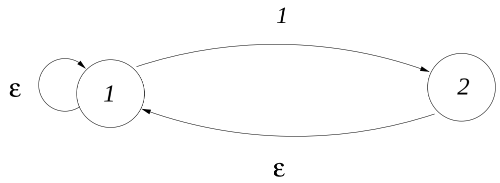

FIG. 1 – Automate des préfixes associé à la substitution de Fibonacci, $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 1$.

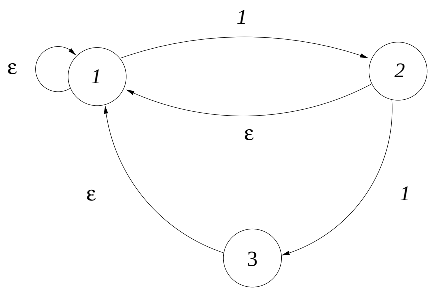

FIG. 2 – Automate des préfixes associé à la substitution de Tribonacci, $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$.

Un chemin étiqueté $\mathcal{C}$ reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ sera noté sous la forme

$$((i_0, i_1, E_0), (i_1, i_2, E_1), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))\,,$$

$i_j \in \mathcal{A}$ pour $0 \leq j \leq n$, $E_j \in Pref_\sigma$ pour $0 \leq j \leq n-1$. On appellera suite des étiquettes associée au chemin $\mathcal{C}$ la suite $(E_0, E_1, \ldots, E_{n-1})$. Le principal théorème concernant l'automate des préfixes associé à un point fixe de substitution est le suivant :

Théorème 0.2.4 (Dumont et Thomas [92], Rauzy [205]). *Conservons les notations de la définition 0.2.3 et supposons de plus qu'il existe* $a \in \mathcal{A}$ *tel que* $\sigma(a)$ *commence par a et* $|\sigma(a)| \geq 2$. *Notons alors* X_σ *l'unique point fixe de* σ *commençant par a. Alors, pour tout entier N, il existe un unique chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à* X_σ*, partant de a et étiqueté par la suite* $(E_0, E_1 \ldots E_n)$ *tel que* $E_0 \neq \varepsilon$ *et* $X_N = \sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\ldots E_n$*, où* X_N *désigne le préfixe de longueur N de la suite* X_σ.

La suite finie X_N se développe donc en $\sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\ldots E_n$, ce qui permet de définir également un développement de l'entier N sous la forme $\sum_{k=0}^{n} |\sigma^k(E_{n-k})|$. Ce système de numération généralisé consitue l'outil principal utilisé dans l'étude, menée au chapitre 3, des problèmes de répartition des systèmes substitutifs. De plus, l'automate des préfixes offre une dimension visuelle, agréable pour comprendre les conditions sofiques intervenant dans ces développements.

Il est naturel de se demander si cette description des entiers ne correspond pas pour certaines substitutions à des développements classiques. Un premier élément de réponse est apporté par les

auteurs de [92] qui remarquent que :
- si la substitution est de longueur constante égale à l, on retrouve l'écriture des entiers en base l,
- dans le cas de la substitution de Fibonacci, on retrouve la numération associée à l'échelle de Fibonacci $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- dans le cas de la substitution de Tribonacci, on retrouve la numération associée à l'échelle de Tribonacci.
Une suite sturmienne caractéristique[10] est laissée invariante par une substitution non triviale si et seulement si son angle est quadratique et son développement en fraction continue satisfait à une condition combinatoire suplémentaire [69] (voir également [250, 189, 35] pour le cas des suites sturmiennes non caractéristiques). Dans ce cas, les auteurs de [69] exhibent de plus la substitution (sous-entendue la plus simple) laissant la suite invariante. Une propriété remarquable est que le développement associé à une telle substitution correspond exactement au développement d'Ostrowski ayant pour base l'angle de la suite sturmienne [4]. Ainsi, il semble que lorsque la substitution est dotée d'un caractère arithmétique clair, la numération obtenue soit parfaitement naturelle. Une explication de ce phénomène vient sans doute du fait que l'on utilise, comme pour les développements classiques, l'algorithme "glouton".

Un autre aspect intéressant, qu'il serait bon d'approfondir, est la possibilité de définir à l'aide de l'automate des préfixes une numération sur les réels, duale en quelque sorte de celle définie pour les entiers. Le développement d'un réel correspond cette fois à la donnée d'un chemin infini dans l'automate. Là encore, certains liens avec des numérations classiques sont déjà établis dans [92] sur quelques exemples.

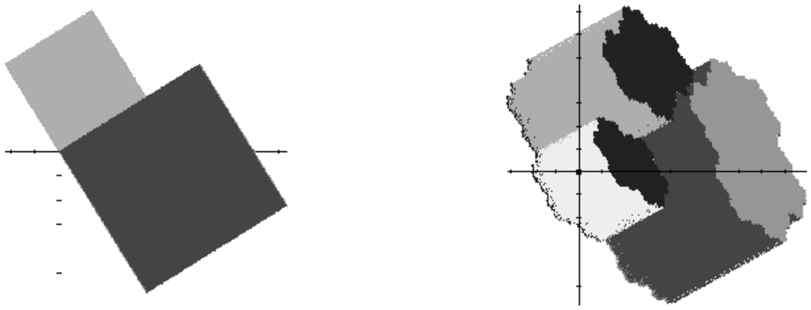

FIG. 3 – Partitions de Markov associées respectivement, aux matrices d'incidence des substitutions de Fibonacci, $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 1$, et de Tribonacci, $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$.

Pour les substitutions de type Pisot qui vérifient une condition suplémentaire, dite de Parry, le développement des réels correspond au β-développement[11] associé au nombre de Pisot et il est possible d'obtenir des théorèmes de Galois (c'est-à-dire, caractériser les développements purement périodiques) à l'aide de l'automate des préfixes (voir [138, 141, 140, 10, 11, 37] pour des résultats dans cette direction). On obtient ainsi qu'un élément x de $[0, 1[$ admet un β-développement purement périodique si et seulement si $(x, x_1, x_2, \ldots, x_d)$, les x_i désignant les conjugués de Galois de x, appartient à un sous-ensemble compact de $[0, 1[\times \mathbb{C}^d$. Les ensembles décrivant les réels dont le développement est purement périodique sont de plus similaires aux partitions de Markov explicites obtenues, toujours à l'aide de l'automate des préfixes, pour certains automorphismes définis par la

[10] Se reporter au paragraphe 0.2.6 pour une définition.
[11] Ces développements ont été introduits par A. Rényi dans [206].

matrice d'incidence de substitutions de type Pisot (voir [170, 222]). Deux exemples de telles partitions sont représentés sur la figure 3. Enfin, l'automate des préfixes, ainsi qu'une généralisation introduite dans [56], intervient également dans la représentation géométrique des systèmes substitutifs (voir [202, 170, 55, 222]).

0.2.3 Représentations géométriques des systèmes substitutifs

Les systèmes dynamiques symboliques jouent un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques généraux et en particulier des systèmes géométriques. En effet, étant donné un système dynamique géométrique (X, T, μ) et P une partition (finie) mesurable de X, il est alors possible de leur associer un système symbolique. Il suffit d'introduire l'ensemble des suites obtenues comme codages naturels des orbites, sous l'action de T, des éléments de X par rapport à la partition P, puis de considérer le sous-shift engendré par ces suites. Sous certaines hypothèses générales sur le système (X, T, μ) et la partition P, ce système symbolique est métriquement isomorphe au système géométrique initial. Au-delà de ce type de constructions, les dynamiciens et en particulier les ergodiciens ont rapidement compris que de tels systèmes abstraits offraient une ressource quasiment inépuisable d'exemples de systèmes dynamiques "simples". Ainsi, les premiers exemples de systèmes ayant telle propriété ou au contraire ne satisfaisant pas à telle autre ont souvent (presque systématiquement) été fournis par des systèmes dynamiques symboliques, à tel point que leur étude est considérée comme une théorie à part entière, la dynamique symbolique.

Une classe importante de systèmes symboliques d'entropie nulle est donnée par les systèmes substitutifs primitifs que nous avons définis au paragraphe 0.2.1. Ils sont suffisamment réguliers pour permettre d'établir de nombreux résultats tels que l'absence de mélange fort [82], l'unique ergodicité [171, 172], ou la continuité des fonctions propres [132] (voir également [195] pour d'autres résultats spectraux). On peut alors se demander si ces systèmes sont réellement nouveaux ou au contraire si ce sont des systèmes géométriques classiques "déguisés". Par exemple, tout sytème associé à une suite sturmienne d'angle quadratique est substitutif et métriquement isomorphe à une rotation du tore de dimension 1 [176]. Donner une représentation géométrique consiste à exhiber un isomorphisme métrique entre le système symbolique initiale et un système géométrique, en obtenant si possible une construction explicite de l'isomorphisme (voir [194], chap. 7).

Propriétés spectrales et représentations géométriques sont liées par le résultat suivant de J. von Neumann : un système, inversible et ergodique, à spectre discret est métriquement isomorphe à une translation minimale sur un groupe compact abélien muni de la mesure de Haar. En particulier, il est conjecturé que tout système substitutif de type Pisot est à spectre discret et que dans ce cas le groupe est un tore de dimension $d-1$ lorsque la substitution compte d lettres. Le premier résultat significatif dans cette direction (si l'on omet celui plus ancien de [176]) est dû à G. Rauzy [202]. Il montre que le système dynamique associé à la substitution de Tribonacci[12], définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$, est isomorphe en mesure à une rotation sur le tore de dimension 2. La construction de cette représentation fait apparaître des ensembles compacts à frontière fractale qui sont des ensembles à restes bornés pour les suites de Kronecker associées à cette rotation. La réunion de ces ensembles est depuis appelée fractal de Rauzy (une description détaillée en est donnée au paragraphe suivant). Plus généralement, des constructions similaires sont données pour les substitutions de type Pisot [19, 57] ; nous montrerons au chapitre 3 (voir aussi [3]) qu'elles produisent de même des ensembles à restes bornés pour les rotations associées. Une méthode analogue de construction d'ensembles fractals à partir de substitutions est introduite dans

[12]Ce nom est donné par analogie avec la substitution de Fibonacci.

[80] et permet également de retrouver ces ensembles (voir [139]) ainsi que le pavage de Penrose. Une autre représentation géométrique des substitutions ne faisant pas intervenir la condition Pisot mais une condition moins restrictive[13] est présentée dans [130].

Il est également possible de représenter explicitement tout système substitutif primitif (et même une classe un peu plus large comme le montre [88]) comme une transformation de l'intervalle. Cette représentation bien qu'un peu abstraite peut être considérée comme géométrique ou du moins comme plus "visuelle" que la représentation symbolique. Elle est de plus très générale comme l'illustre le résultat principal de [22]. Cette construction est basée sur une méthode dite de couper-empiler (cutting-stacking pour les anglophones) ; on parle également de représentation par tours de Rokhlin. Elle a l'avantage de permettre d'exhiber certaines propriétés ergodiques de ces systèmes (voir [111, 113] ou [194]). De plus, de tels systèmes s'avèrent performants pour obtenir des suites de faible discrépance à valeurs dans $[0,1[$. Par exemple, les orbites d'un système simplement représenté (en l'occurrence à l'aide de la substitution définie par $\sigma(1) = 11$) comme celui associé à la transformation de von Neumann-Kakutani[14] (voir figure 4) correspondent à des suites de van der Corput.

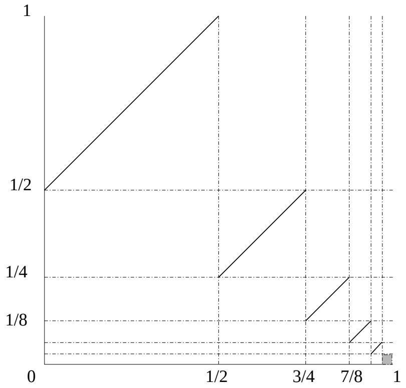

FIG. 4 – Graphe de l'application de von Neumann-Kakutani.

Une généralisation immédiate permet (en considérant la substitution définie par $\sigma(1) = 1^d$) de définir un système dont les orbites sont des suites de Halton en base d (voir [154] et [88]). Il semble également possible de définir par des règles simples (en utilisant non pas une substitution mais plusieurs) un système sur l'intervalle dont les orbites sont des suites de Faure de dimension un ; nous rappelons que ce sont les suites de plus faible discrépance connues actuellement [108]. Il serait évidemment intéressant de généraliser ces constructions, ainsi que leurs relation avec les suites de faible discrépance, à des dimensions supérieures.

Un des intérêts de toutes les représentations géométriques que nous venons d'évoquer est de permettre de traduire les résultats obtenus au chapitre 3 sur la discrépance symbolique des systèmes substitutifs, en terme de répartition pour des suites plus naturelles (c'est-à-dire à caractère arithmétique ou géométrique). Ainsi, par exemple, le fait que la fonction de discrépance symbolique d'une substitution de type Pisot soit bornée (propriété *a priori* plutôt abstraite) permet de déduire que les composantes du fractal de Rauzy associé sont des ensembles à restes bornés pour les suites de Kronecker sous-jacentes (propriété arithmétique et géométrique). L'avantage avec les problèmes de répartition symbolique est que le cardinal de l'alphabet n'est pas un facteur de complexité, alors

[13] Il suffit que la matrice d'incidence de la substitution admette une valeur propre de module strictement inférieur à un.

[14] Cette transformation a été introduite par J. von Neumann dans [247] et étudié ensuite par S. Kakutani [143].

qu'il est beaucoup plus difficile d'étudier des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ qu'à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Passer par une représentation symbolique élimine en partie ces problèmes de dimension. Notons enfin, que les représentations des substitutions ne donnent pas toujours des systèmes définis sur l'intervalle, sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Au vu du théorème de J. von Neumann, nos résultat peuvent s'appliquer également à la répartition de suites issues par exemple de translations sur un groupe compact abélien plus abstrait. En particulier, le système substitutif associé à la substitution de Morse, $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 21$, est isomorphe à une extension à deux points d'une translation (l'addition de 1) sur le groupe $\mathbb{Z}_2$ des entiers 2-adiques (voir [194] ou [88] pour ce résultat ainsi qu'une représentation par tours de Rokhlin de la substitution de Morse). Notre approche permet notamment de retrouver certains ensembles à restes bornés pour cette transformation.

0.2.4 Un exemple représentatif : le fractal de Rauzy

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté plusieurs idées de représentations géométriques des systèmes substitutifs. Nous proposons à présent de détailler l'une d'entre elles, associée à la substitution de Tribonacci.

Dans [202], G. Rauzy introduit une substitution, appelée substitution de Tribonacci, généralisant les propriétés dynamiques, arithmétiques et géométriques de la substitution de Fibonacci. Cette substitution est définie sur un alphabet à trois lettres par

$$\sigma(1) = 12, \ \ \sigma(2) = 13 \ \text{ et } \ \sigma(3) = 1,$$

sa matrice d'incidence est $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique est $x^3 - x^2 - x - 1$. Ce polynôme admet une unique racine réelle strictement supérieure à un, notée θ, et deux racines complexes conjuguées de module strictement inférieur à un, que nous noterons α et $\overline{\alpha}$. Ainsi, θ est-il un nombre de Pisot et l'on dit que σ est une substitution de type Pisot. Le mot de Tribonacci, noté U, est l'unique point fixe de σ défini par $U = \sigma^\infty(1)$. Le but de la représentation géométrique que nous allons donner pour la substitution de Tribonacci est de prouver qu'il existe un isomorphisme métrique entre le système substitutif $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T, \mu)$, où μ désigne l'unique mesure invariante par T, et une rotation de $\mathbb{T}^2$ (muni de la mesure de Haar). Les résultats que nous présentons ici sont issus pour l'essentiel de [202].

L'unique vecteur propre normalisé associé à la valeur propre dominante θ est noté v_f et est égal à $\begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \\ \frac{1}{\theta^3} \end{pmatrix}$. Il correspond au vecteur associé aux fréquences des lettres dans le mot de Tribonacci. Notons alors pour tout entier n,

$$\delta(n) = n \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |u_0 u_1 \ldots u_{n-1}|_1 \\ |u_0 u_1 \ldots u_{n-1}|_2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que le formalisme introduit au paragraphe 0.1.2, conduit pour tout entier n à l'égalité :

$$|\delta(n)|_\infty = \Delta_n(U).$$

Le fait que σ soit une substitution de type Pisot implique que sa fonction de discrépance $\Delta_n(U)$ est bornée (voir chapitre 3). Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ est alors défini comme le compact obtenu en prenant l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ de l'ensemble $\{\delta(n), \ \ n \in \mathbb{N}\}$ (voir figure 5).

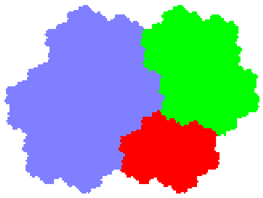

FIG. 5 – Le fractal de Rauzy et ses trois composantes.

Nous pouvons également donner une approche géométrique peut-être plus intuitive, bien que rigoureusement équivalente, de cette construction (voir figure 6). Considérons la ligne brisée de $\mathbb{R}^3$ obtenue en remplaçant successivement les lettres de U par le vecteur d'indice correspondant dans la base canonique. Alors, cette ligne "s'enroule" asymptotiquement autour de la droite portée par le vecteur v_f. En effet, le fait que chaque lettre de la suite U admette une fréquence et que le vecteur

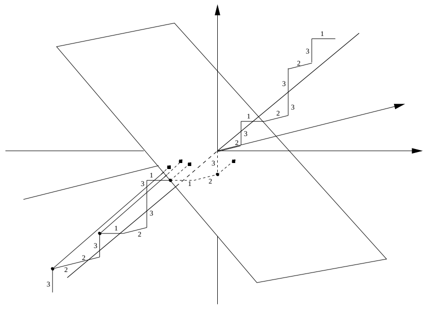

FIG. 6 – La méthode de projection pour obtenir le fractal de Rauzy.

de fréquence associé soit égal à v_f (ce qui est assuré par la primitivité de σ, voir par exemple [195]), implique que la suite $\left(\frac{\delta(n)}{n}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Ici, le résultat est en fait beaucoup plus précis ; comme $\Delta_n(U)$ est bornée, il en est de même de la distance entre la ligne brisée et la droite dilatante. Ainsi, en projetant les sommets de la ligne brisée parallèlement à v_f sur l'hyperplan affine contractant (plongé dans $\mathbb{R}^2$) associé à M_σ, on obtient un ensemble borné qui est l'image par une similitude de l'ensemble $\{\delta(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

En définissant, pour $1 \leq i \leq 3$, les trois sous-ensemble de $\mathcal{R}$ suivant

$$\mathcal{R}_i = \overline{\left\{ n \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |u_0 u_1 \ldots u_{n-1}|_1 \\ |u_0 u_1 \ldots u_{n-1}|_2 \end{pmatrix},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ u_n = i \right\}},$$

on obtient que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$ et que cette union est disjointe en mesure (voir figure 5). Les ensembles $\mathcal{R}_i$ sont appelés composantes du fractal de Rauzy. De manière équivalente, il est possible de définir trois autres sous-ensembles de $\mathcal{R}$ par :

$$\mathcal{R}'_i = \overline{\left\{ n \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |u_0 u_1 \ldots u_{n-1}|_1 \\ |u_0 u_1 \ldots u_{n-1}|_2 \end{pmatrix},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ u_{n-1} = i \right\}}.$$

Le système substitutif $\mathcal{X}$ associé à la substitution de Tribonacci est alors métriquement isomorphe à un échange de morceaux E défini sur $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire que E définit une translation sur chaque morceau $\mathcal{R}_i$), de sorte que $E(\mathcal{R}_i) = \mathcal{R}'_i$ (voir figure 7).

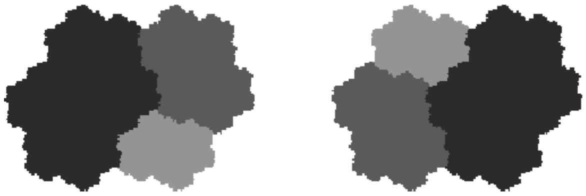

FIG. 7 – L'échange de morceaux E associé au fractal de Rauzy.

L'étape suivante consiste à prouver que le fractal de Rauzy est un domaine fondamental de $\mathbb{R}^2$ associé au réseau classique $\mathbb{Z}^2$. Ce résultat peut sembler surprenant compte tenu de l'apparente complexité de l'ensemble $\mathcal{R}$; on s'en convaincra tout de même au vu de la figure 8. Ceci a une conséquence importante : les trois vecteurs de translation intervenant dans la transformation E sont identiques modulo $\mathbb{Z}^2$. Ainsi, on peut prouver que la translation de vecteur $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{T}^2$ est isomorphe à l'échange E considéré modulo $\mathbb{Z}^2$. Plus précisément, cela signifie que si x est le représentant dans $\mathcal{R}$ de l'élément $\overline{x}$ de $\mathbb{T}^2$, alors $E(x)$ est le représentant dans $\mathcal{R}$ de l'élément $\overline{x+\eta}$. Pour la suite de Kronecker $\left(\left\{n+\frac{1}{\theta}\right\}, \left\{n+\frac{1}{\theta^2}\right\}\right)_{n\geq 0}$, ceci implique que dans $\mathbb{T}^2$ les ensembles $\overline{\mathcal{R}_i}$ sont des ensembles à restes bornés.

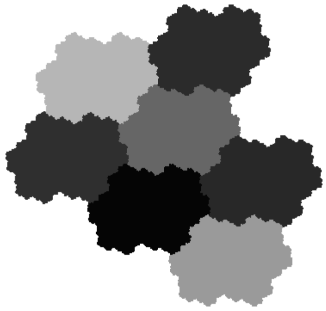

FIG. 8 – Le pavage périodique du plan engendré par le fractal de Rauzy.

En particulier, on obtient que le système substitutif associé à la substitution de Tribonacci est à spectre discret, donné par $\left\{e^{2\pi i r},\ r \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{\theta}\right] + \mathbb{Z}\left[\frac{1}{\theta^2}\right]\right\}$ (puisqu'il est isomorphe à la translation de vecteur η sur $\mathbb{T}^2$). Introduisons, pour tout facteur $w = w_1 w_2 \ldots w_k$ de la suite U, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{R}_w} = \left\{x \in \mathbb{T}^2,\ x + j\eta \in \overline{\mathcal{R}_{w_j}},\ \ 1 \leq j \leq k\right\}.$$

Au chapitre 3, nous montrerons que la fonction de discrépance $D_N(\mathcal{X})$ associée au système substitutif de Tribonacci est bornée ; ce résultat implique non seulement que pour tout facteur w de U, $\overline{\mathcal{R}_w}$ est un ensemble à restes bornés pour la suite de Kronecker $\left(\left\{n+\frac{1}{\theta}\right\}, \left\{n+\frac{1}{\theta^2}\right\}\right)_{n\geq 0}$, mais également la propriété plus forte suivante :

$$\left\{\overline{\mathcal{R}_w},\ w \in \mathcal{L}(U)\right\}$$

est une famille d'ensemble à restes uniformément bornés (voir définition 0.1.7). Ceci permet ensuite de retrouver les valeurs propres de ce système à l'aide du théorème 0.1.9 et produit ainsi une démonstration courte du fait que la rotation de vecteur η est un facteur du système symbolique associé à σ (voir [194]).

Enfin, rappelons brièvement certaines propriétés du fractal de Rauzy : $\mathcal{R}$ est simplement connexe [202], la dimension de Hausdorff de sa frontière peut être calculée et est strictement supérieure à 1 [139], et sa frontière est un quasi-cercle [170]. De plus, la plupart des résultats de ce paragraphe peuvent être étendus, sous certaines conditions, aux substitutions de type Pisot (voir [55, 222, 57, 19]).

Ce procédé de représentation géométrique est aujourd'hui assez bien compris pour les sytèmes substitutifs de type Pisot. Il lie, comme nous venons de le constater, substitutions de type Pisot, rotations toriques et ensembles à restes bornés. De telles représentations restent en revanche plus obscures pour les substitutions primitives de type Salem (c'est-à-dire pour lesquelles la deuxième valeur propre de la matrice d'incidence, par ordre de module décroissant, est de module un). Nous allons maintenant présenter sur un exemple une ébauche du travail qui pourrait être accompli dans ce cas.

Considérons la substitution primitive ξ définie sur l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ par :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1112455 \\ 2 &\longmapsto 111255 \\ 3 &\longmapsto 1123455 \\ 4 &\longmapsto 23445 \\ 5 &\longmapsto 123455 \end{aligned}$$

La matrice M_ξ admet le polynôme $(x-1)^2(-x^3+7x^2-5x+1)$ comme polynôme minimal. Ainsi, la valeur propre dominante de M_ξ est un nombre de Pisot, mais la substitution n'est pas de type Pisot à cause de la valeur propre double 1. En utilisant la méthode de la ligne brisée (voir figure 6), décrite précédemment, et en projetant cette fois sur le plan contractant associé à M_ξ (qui est de dimension deux), on obtient un fractal de Rauzy $\mathcal{R}_\xi$, composé de cinq morceaux. Le système substitutif associé à ξ est de plus métriquement isomorphe à un échange de cinq morceaux E_ξ, représenté sur les figures 9 et 10 (car il vérifie une condition combinatoire, dite de coïncidence).

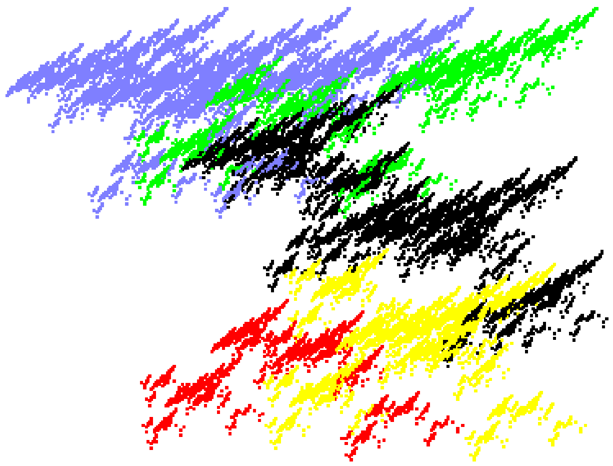

FIG. 9 – Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}_\xi$.

Bien que la situation puisse paraître semblable à celle rencontrée précédemment, il n'y a aucune chance pour que cet échange de cinq morceaux donne, comme dans le cas du fractal de Rauzy, une rotation de $\mathbb{T}^2$. En effet, les composantes du fractal de Rauzy associé à ξ n'étant pas des ensembles à restes bornés pour l'échange de morceaux, le théorème 0.1.10 interdit à E_ξ "d'être une rotation".

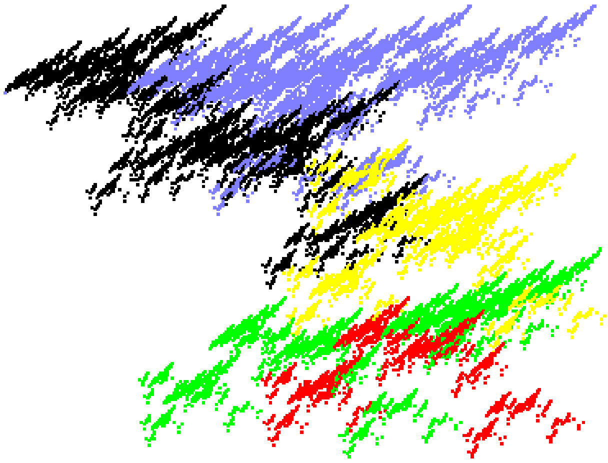

FIG. 10 – L'image par E_ξ de $\mathcal{R}_\xi$.

Toutefois, il semble raisonnable de croire (voir [104] pour un exemple de situation similaire) qu'il existe une rotation de $\mathbb{T}^2$ de paramètres appartenant à un corps cubique et dont l'application induite sur $\mathcal{R}_\xi$ est égale à E_ξ. Nous pouvons de plus montrer, en appliquant les résultats du chapitre 3, que si U désigne le point fixe de ξ alors

$$\Delta_N(U) = \Omega(\log^2 N) \ \text{ et } \ \Delta_N(U) = O(\log^2 N).$$

Ce résultat symbolique pourrait alors être interprété géométriquement de la manière suivante : les composantes de $\mathcal{R}_\xi$, qui sont des ensembles compacts d'intérieur non vide, seraient des ensembles avec une discrépance locale à la fois en $\Omega(\log^2 N)$ et en $O(\log^2 N)$ pour une rotation de $\mathbb{T}^2$. La valeur $\log^2 N$ est particulièrement intéressante puisqu'il est attendu qu'une rotation de $\mathbb{T}^2$, dont les paramètres appartiennent à un corps cubique, ait une discrépance en $O(\log^2 N)$.

0.2.5 Équilibre des suites symboliques

Un mot, fini ou infini, défini sur un alphabet $\mathcal{A}$ est dit équilibré si, pour tout couple (w, w') de facteurs de même longueur, l'inégalité $||\omega|_a - |\omega'|_a| \leq 1$ est vérifiée pour toute lettre a. Cette notion apparaît pour la première fois dans les articles de M. Morse et G. A. Hedlund [175, 176] publiés en 1938 et 1940. Ils prouvent en particulier que toute lettre d'un mot infini équilibré admet une fréquence. Dans [68], E. M. Coven et G. A. Hedlund caractérisent les mots infinis sturmiens en termes d'équilibre : ce sont exactement les mots binaires non ultimement périodiques et équilibrés. Plus récemment, P. Hubert [135] (voir également un résultat très proche et antérieur de R. L. Graham [122]) montre que suites sturmiennes et suites équilibrées définies sur un alphabet à trois lettres ou plus, sont intimement liées ; il donne de plus une caractérisation géométrique simple de ces dernières. Le théorème de E. M. Coven et G. A. Hedlund (Théorème 0.2.7 au paragraphe suivant) a évidemment motivé l'introduction de généralisations de la notion d'équilibre. Par exemple, V. Berthé and R. Tijdeman [41] étudient les propriétés d'équilibre de mots multi-dimensionnels et obtiennent que les mots équilibrés multi-dimensionnels sont périodiques. Une autre généralisation possible, considérée par I. Fagnot et L. Vuillon dans [107] pour les mots sturmiens, consiste à remplacer les occurrences des lettres par des occurrences de mots dans la définition classique. Un autre aspect important de cette théorie provient de la conjecture de Frankel qui stipule qu'il n'existe qu'un seul mot équilibré, à permutation des lettres près, défini sur un alphabet de cardinal

m supérieure ou égale à trois et dont les lettres admettent toutes des fréquences distinctes. Des preuves des cas $m = 3, 4, 5, 6$ figurent dans [174, 17, 238, 239]. Notons enfin qu'en informatique théorique, cette question intervient dans les problèmes d'optimisation pour des réseaux de files d'attente (voir par exemple [120]).

Les résultats évoqués précédemment mettent en relief le fait que la propriété d'équilibre est très rigide et réellement contraignante. Il s'agit certainement d'une des raisons pour lesquelles les mathématiciens ont été amenés à rendre cette notion plus flexible. Une approche fructueuse, notamment du point de vue de la théorie ergodique et de la théorie des nombres, semble venir de l'extension de la propriété d'équilibre à celle plus souple de C-équilibre en imposant $||\omega|_a - |\omega'|_a| \leq C$, pour toute lettre a. Nous montrerons au chapitre 3 que cette notion est profondément liée à celle d'ensemble à restes bornés et qu'elle en est d'une certaine façon l'équivalent symbolique. Ceci est notamment illustré par les exemples suivants. Considérons une rotation du tore $\mathbb{T}^n$, un domaine fondamental de $\mathbb{R}^n$, Ω, et une partition $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n$, telle que l'application induite[15] par la rotation sur chaque Ω_i soit une translation. Un *codage naturel de rotation* est le codage (naturel) d'une rotation par rapport à une telle partition. Le théorème 0.1.10 implique que dans ces conditions les ensembles Ω_i sont des ensembles à restes bornés pour la rotation (voir également [110] pour une réciproque). Cette propriété se traduit symboliquement par le fait qu'un codage naturel de rotation doit être C-équilibré (pour un certain C). Il a longtemps été pensé qu'une suite d'Arnoux-Rauzy (voir [23]) devait être le codage naturel d'une rotation sur le tore de dimension deux. Les auteurs de [63] ont invalidé cette conjecture en exhibant une suite d'Arnoux-Rauzy totalement déséquilibrée (à savoir, qui n'est C-équilibrée pour aucun C), ce qui, au passage, a produit un contre-exemple au fait que toute suite épisturmienne devait être 2-équilibrée (voir [90]). Dans le même esprit, il est conjecturé que tout système dynamique symbolique associé à une substitution de type Pisot est isomorphe en mesure à une rotation minimale sur un tore (voir par exemple [202, 19, 57]). Le fait qu'un point fixe d'une substitution de type Pisot soit C-équilibré (voir chapitre 3) intervient pleinement ici, toujours au vu du théorème 0.1.10.

De même que l'étude de la complexité n'est pas réduite à celle des suites périodiques, sturmiennes ou quasi-sturmiennes, nous n'avons pas voulu restreindre notre étude à celle des mots équilibrés ou C-équilibrés. Pour cela, nous introduisons une mesure de l'équilibre d'une suite permettant de généraliser les propriétés d'équilibre et de C-équilibre.

Définition 0.2.5. *Soit U un mot infini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. La fonction d'équilibre associée à U est définie par :*

$$B_U(n) = \max_{a \in \mathcal{A}} \max_{w,w' \in \mathcal{L}_n(U)} \left\{ \left| |w|_a - |w'|_a \right| \right\}.$$

Nous introduisons également une autre fonction qui généralise la notion d'équilibre introduite dans [107] et qui peut être vue comme mesure uniforme de l'équilibre d'une suite.

Définition 0.2.6. *Soit U un mot infini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. La fonction d'équilibre généralisée associée à U est définie par :*

$$\mathcal{B}_U(n) = \max_{u \in \mathcal{L}(U)} \max_{w,w' \in \mathcal{L}_n(U)} \left\{ \left| |w|_u - |w'|_u \right| \right\}.$$

Au chapitre 3 (voir également [1]), nous étudions les liens qu'entretiennent ces deux fonctions avec les fonctions de discrépance symbolique définies au paragraphe 0.1.3. Nous montrons que lorsque la

[15]Voir paragraphe 0.1.2 pour une définition.

suite U est point fixe d'une substitution primitive, ces liens sont très clairement établis. Cela nous permet de déduire de nos résultats sur les fonctions de discrépance l'ordre de grandeur des fonctions d'équilibre des point fixes de substitutions primitives. Ce travail plutôt qualitatif est à rapprocher de celui de [188] concernant la fonction de complexité. Toutefois, nous montrons également qu'il est possible d'obtenir, au moins sur de nombreux exemples, des résultats bien plus précis, soulignant ainsi un aspect plus quantitatif de notre étude.

0.2.6 Une généralisation géométrique des suites sturmiennes : les codages de rotations

La fonction de complexité p d'une suite associe à chaque entier n le nombre $p(n)$ de facteurs de longueurs n de la suite. L'entropie topologique[16] du sous-shift associé à une suite symbolique est alors égale à $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(p(n))}{n}$. La complexité est donc une notion plus fine que l'entropie topologique qui s'avère particulièrement utile pour distinguer les systèmes d'entropie nulle ; son ordre de grandeur est également un invariant topologique (voir [194] par exemple). La complexité est ainsi considérée comme une mesure naturelle du désordre d'une suite (ou plutôt du système dynamique qui lui est naturellement associé). Notamment, elle permet de caractériser les suites ultimement périodiques (ce sont celles pour lesquelles il existe un entier n tel que $p(n) \leq n$). Les suites sturmiennes correspondent elles aux suites non ultimement périodiques les plus ordonnées (au sens de la complexité) et sont définies comme les suites dont la fonction de complexité vérifie $p(n) = n+1$ pour tout entier n. Elles fournissent certainement l'exemple le plus riche d'interactions entre la combinatoire, la théorie des nombres, la dynamique symbolique et la géométrie, comme l'illustrent les nombreuses recherches consacrées à ce sujet (voir par exemple [164]). Ainsi, les suites sturmiennes peuvent être caractérisées aussi bien de façon combinatoire (par définition) que par des propriétés d'équilibre de leur langage (ce sont exactement les suites binaires non ultimement périodiques équilibrées [68]) ou des propriétés géométriques. Cette dernière caractérisation, sans doute la plus célèbre et la plus spectaculaire, est due à M. Morse et G. A. Hedlund [176] et peut s'énoncer comme suit :

Théorème 0.2.7 (Morse-Hedlund). *Soit u une suite sturmienne définie sur l'alphabet $\{1,2\}$. Il existe alors un unique couple (α, x) appartenant à l'ensemble $]0,1[\times[0,1[$ tel que l'on ait :*
soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n = 1 \Longleftrightarrow \{x + n\alpha\} \in [0, 1-\alpha[),$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n = 1 \Longleftrightarrow \{x + n\alpha\} \in]0, 1-\alpha]).$$

Un autre résultat remarquable montre que la connaissance du développement en fraction continue de l'angle d'une suite sturmienne permet d'engendrer son langage (voir par exemple [23] ainsi que le résultat plus précis de [18]).

Théorème 0.2.8. *Soit u une suite sturmienne associée au couple $(\alpha, x = 0)$. Si le développement en fraction continue de α est $[0; a_1 + 1, a_2, \ldots a_n, \ldots]$, alors*

$$u = \lim_{n\to\infty} \tau_1^{a_1} \circ \tau_2^{a_2} \ldots \tau_1^{a_{2n+1}}(1),$$

[16]La notion d'entropie topologique a été introduite en 1965 par R. L. Adler, A. G. Konheim et M. H. McAndrew [9].

où les substitutions τ_1 et τ_2 sont définies par : $\begin{array}{ccc} & \tau_1 & \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 21 \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccc} & \tau_2 & \\ 1 & \longmapsto & 12 \\ 2 & \longmapsto & 2 \end{array}$.

De nombreuses propriétés combinatoires des suites sturmiennes peuvent être obtenues à l'aide de ce théorème. Ce formalisme n'étant pas usité de tous, certains préfèreront parler de règles de concaténation ou de règles standard (voir par exemple [52, 53, 164, 194]) mais ces différentes appellations (ou visions) partagent les même idées. En particulier, une telle expression (on parlera d'expression S-adique des suites sturmiennes) s'avère très agréable pour traiter les problèmes de répétitions que nous évoquerons au paragraphe 0.2.7 (voir par exemple [243, 118, 14]).

L'intérêt porté aux suites sturmiennes a donné lieu à un nombre important de généralisations unidimensionnelles ou multidimensionnelles, citons entre autres [209, 23, 90, 135, 60, 20, 21, 24, 133, 134, 12, 85, 86, 87, 117, 178, 62, 42, 43, 44]. Parmi ces nombreuses généralisations, l'une d'entre elles, tout à fait naturelle au vu du Théorème 0.2.7, intervient dans les problèmes de répartition pour les suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$. Il s'agit des codages binaires de rotations[17] (voir [12, 86, 87]).

Définition 0.2.9. *Étant donné un triplet (α, β, x) appartenant à $[0,1[^3$, on appelle codage de rotation de paramètres (α, β, x) la suite symbolique $U = (u_n)_{n\geq 0}$ définie sur l'alphabet $\{1,2\}$ par :*

$$u_n = \begin{cases} 1 & si\ \{x + n\alpha\} \in [0, \beta[, \\ 2 & sinon. \end{cases}$$

Le codage de rotation de paramètre (α, β, x) est ainsi obtenu en codant l'orbite de x sous l'action de la rotation d'angle α par rapport à la partition du tore en deux intervalles $[0, \beta[$ et $[\beta, 1[$. Le cas où α est rationnel ne présente que peu d'intérêt, car le codage est alors périodique, et ne sera donc pas considéré dans ce qui suit. Lorsque $\alpha = \beta$ ou $\alpha = 1 - \beta$, le codage définit une suite sturmienne et plus généralement, le cas où $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ correspond à des suites quasi-sturmiennes (voir [126] pour un résultat réciproque).

Définition 0.2.10. *Une suite est dite quasi-sturmienne s'il existe un entier k tel que pour tout entier n, sa fonction de complexité vérifie $p(n) \leq n + k$.*

Il est également prouvé dans [209], que les autres codages (ceux pour lesquels $\beta \notin \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$) vérifient $p(n) = 2n$ pour tout entier n suffisamment grand.

Un point important, abordé au chapitre 1, est que l'application induite d'une rotation d'angle α sur un intervalle $[0, \beta[$, tel que $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et $\alpha < \beta$, est une transformation très particulière, à savoir un échange de trois intervalles non dégénéré (c'est-à-dire qu'il satisfait à la condition I.D.O.C. que nous rappelons dans ce même chapitre). Cette propriété lie ainsi intimement codages de rotations (non quasi-sturmiens) et échanges de trois intervalles I.D.O.C. De même sont intimement liés suites sturmiennes et échanges de deux intervalles (voir par exemple [18]). Pour plus de détails sur les notions d'échanges d'intervalles, le lecteur peut se reporter à [201, 244, 245].

Nous avons dans un premier temps considéré les codages de rotations comme un outil offrant une approche nouvelle pour nos problèmes de répartitions. Toutefois, il est naturel de se demander si les codages de rotation interagissent, aussi clairement que les suites sturmiennes, avec d'autres domaines des mathématiques. Des résultats dans cette direction sont déjà donnés dans [146, 209, 12,

[17] Comme nous considérons uniquement des codages binaires, nous parlerons simplement de codages de rotations.

86] et nous savons également que la plupart des propriétés des suites sturmiennes sont "transmises" aux suites quasi-sturmiennes (ce qui justifie leur appellation). Ce phénomène est expliqué par le fait qu'à un préfixe près, une suite quasi-sturmienne est l'image par une substitution d'une suite sturmienne; le résultat, en fait un peu plus précis, est dû à E. M. Coven [67] et M. E. Paul [190]. On peut alors se demander si les codages de rotations dont les paramètres vérifient $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ sont eux aussi "quasiment" sturmiens ou au contraire si leurs comportements (arithmétiques, combinatoires ou dynamiques) diffèrent réellement de ceux observés dans le cas sturmien. Nous répondons partiellement (et plutôt négativement) à cette question en exhibant aussi bien des traits de caractères communs que des différences fondamentales. Ces éléments de comparaison seront récapitulés dans l'annexe A.

En particulier, nous obtiendrons au chapitre 1 un résultat analogue au théorème 0.2.8 qui servira de base à l'étude des codages de rotations (il s'agit là d'un point commun, mais qui nous permettra ensuite d'exhiber certaines différences). Plus précisément, nous montrons que le langage des codage de rotations non dégénérés (à savoir, pour lesquels $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$) peut être obtenu par itération de quatre substitutions définies sur un alphabet à trois lettres, puis une application de projection. L'ordre d'itération de ces applications est gouverné par un développement bidimensionnel de type "fraction continue" vérifiant un théorème de Lagrange, c'est-à-dire que le développement est ultimement périodique si et seulement si les paramètres appartiennent à un même corps quadratique. Cette description, on parlera de représentation S-adique (voir paragraphe 0.2.1) des codages de rotations, est entièrement explicite et basée sur une approche dynamique, à savoir une version multiplicative de l'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles[18]. Elle permet de plus de s'affranchir de la condition arithmétiquement peu naturelle $\alpha < \min(\beta, 1-\beta)$ imposée dans [86]. Notons également que S. Ferenczi, C. Holton et L. Q. Zamboni [117, 115, 116, 114] ont parallèlement mené une étude approfondie des échanges de trois intervalles basée sur un procédé d'induction différent. Il serait bien sûr intéressant de comprendre et d'établir les liens entre ces deux points de vue ainsi que les spécificités de chacun. Nous utiliserons cette description tout d'abord au chapitre 2, pour obtenir des résultats précis sur la discrépance locale des rotations quadratiques du cercle, puis aux chapitres 5, 6 et 7 pour étudier les phénomènes de répétitions intervenant dans les codages de rotations ainsi que leurs applications à la physique théorique (nature du spectre de certains opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels) et à la théorie des nombres (nature arithmétique de certains nombres réels). Au delà des résultats déjà établis, l'expression que nous donnons des codages de rotations devrait être un outil efficace pour appréhender d'autres questions et permettre alors une compréhension encore plus profonde de la combinatoire de cette classe de suites.

0.2.7 Répétitions, quasi-cristaux et transcendance

S'il est évident que toute suite binaire infinie contient nécessairement des carrés, c'est-à-dire une répétition du type ww, construire un suite binaire sans chevauchement (mot de la forme $awawa$) est déjà plus difficile. Le premier exemple d'une telle suite est dû à A. Thue [236] en 1906. L'exercice, alors purement combinatoire, ne connaissait aucune application particulière. Aujourd'hui la situation est radicalement différente, l'étude des répétitions intervenant dans des domaines variés et souvent inattendus. Afin d'illustrer ce propos, nous allons discuter de leur interaction dans un premier temps avec la théorie des quasi-cristaux puis avec la transcendance de certains nombres réels. Cette problématique est également largement étudiée dans [15].

[18] Pour plus de précisions sur ces procédés d'induction, voir [244, 201, 245, 252, 117].

En 1984, D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias et J. V. Cahn [221] découvrent expérimentalement l'existence de structures non périodiques mais étrangement régulières qui prirent le nom de quasi-cristaux. Ce phénomène totalement inattendu va être à l'origine de nombreuses investigations théoriques, principalement fondées sur l'étude spectrale d'opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels de potentiels le plus souvent associés à des suites binaires, "quasiment périodiques" et classiques de la combinatoire des mots (voir par exemple le survol [70]). Un opérateur de Schrödinger discret unidimensionnel est une application H de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même définie par :

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n),$$

où $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. La suite V est appelée le potentiel de l'opérateur. Par exemple, les potentiels associés à un codage de rotation de paramètres (α, β) sont donnés par :

$$V_\theta(n) = \lambda \chi_{[0,\beta)}(n\alpha + \theta \mod 1),$$

où $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$. Pour certains codages sturmiens ($\beta = \alpha$ ou $\beta = 1 - \alpha$), on obtient des modèles de quasi-cristaux standard qui sont les plus intéressants du point de vue physique. Les modèles provenant des substitutions (et en particulier des substitutions primitives) ont également été étudiés en détail. Il est attendu de l'étude spectrale de ces opérateurs qu'elle révèle un certain nombre de propriétés génériques, traduisant le comportement physique des quasi-cristaux. Dans des termes plus mathématiques, on attend généralement les trois propriétés suivantes, à savoir, la mesure spectrale de tels opérateurs est purement singulière, continue et son support est de mesure (de Lebesgue) nulle. Étant donné une suite (disons binaire), la démarche est alors la suivante :
- on considère un potentiel, qui lui est associé,
- puis, on essaie de montrer les trois propriétés standard pour l'opérateur de Schrödinger sous-jacent.

Le fait que la mesure spectrale soit continue et totalement singulière est connu pour un grand nombre de potentiels (voir [151] et [155]), mais la troisième caractéristique est plus délicate à obtenir. Elle n'est d'ailleurs pas encore connue pour tous les potentiels issus de codages de rotations (voir [7]). Dans le cas des potentiels sturmiens, l'existence de répétitions est un élément clé pour obtenir cette propriété. Plus exactement, il faut utiliser le fait (voir par exemple [14, 71, 40]), qu'une suite sturmienne commence par des carrés arbitrairement longs. Une autre notion importante ici est la récurrence linéaire. Nous rappelons qu'une suite est dite linéairement récurrente s'il existe un réel K tel que tout facteur de longueur Kn contienne nécessairement tous les facteurs de longueurs n de la suite. Il s'agit également d'une notion de répétition, puisque l'on demande aux occurrences des facteurs d'une telle suite d'être peu espacées. Un résultat récent de D. Lenz [157] établit la nullité de la mesure du support de la mesure spectrale pour tous les opérateurs issus de suites linéairement récurrentes. Là encore, répétitions et propriétés spectrales des opérateurs semblent liées. Au chapitre 5 (voir également [7]), nous caractérisons, dans le but d'appliquer ce résultat, les codages de rotations linéairement récurrents, généralisant ainsi une approche de [102].

Il est bien connu que, pour tout entier $b \geq 2$, le développement en base b d'un nombre rationnel est ultimement périodique, mais que peut-on dire sur la régularité du développement d'un irrationnel algébrique ? Cette question fut posée pour la première fois par É. Borel dans [47], qui conjecture qu'un tel développement doit satisfaire à certaines lois suivies par un nombre tiré au hasard. Plus précisément, la conjecture stipule que tout irrationnel algébrique doit être un nombre normal. Nous rappelons qu'un nombre réel θ est normal si pour tout entier b, les b^l mots de longueur l de l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ admettent dans le développement b-adique de θ la fréquence $1/b^l$. La normalité est une notion générique, puisque l'on vérifie rapidement que presque tout nombre réel est un nombre normal. Bien que cette conjecture soit considérée comme totalement hors d'atteinte, certains résultats dans cette direction sont connus depuis déjà plus de soixante dix ans [45, 166, 167, 83, 8, 77, 165]. Ils partagent de plus une philosophie commune : un développement b-adique obtenu par un procédé trop régulier mais non ultimement périodique définit un nombre transcendant. Plus récemment, S. Ferenczi et C. Mauduit [118] ont donné, en reformulant astucieusement un théorème de D. Ridout [207] (voir également [168]), une condition purement combinatoire de transcendance qui illustre bien ce phénomène. Le théorème de D. Ridout est en fait un raffinement (lorsque l'on ajoute une hypothèse de contrôle de la taille des facteurs premiers des dénominateurs et des numérateurs des approximations rationnelles) du célèbre théorème de K. F. Roth [211] et traduit le fait qu'un nombre irrationnel algébrique ne peut être trop bien approché par des nombres rationnels.

Théorème 0.2.11 (Ferenczi-Mauduit). *Soit Θ un nombre irrationnel dont le développement b-adique commence, pour tout entier n, par $0, u_n v_n v_n v'_n$, où u_n est un mot éventuellement vide, v_n un mot non vide admettant v'_n comme préfixe. Si de plus, $|v_n|$ tend vers l'infini, $\limsup(|u_n|/|v_n|) < \infty$ et $\liminf(|v'_n|/|v_n|) > 0$, alors Θ est un nombre transcendant.*

Ainsi, la présence de puissances (plus que des carrés, pas trop loin et arbitrairement longues) dans le développement b-adique d'un nombre réel irrationnel implique la transcendance de ce dernier. En particulier, cette condition est utilisée pour prouver la transcendance des réels dont le développement b-adique est sturmien [118], quasi-sturmien [13], point fixe d'une substitution binaire primitive ou de longueur constante [16] ou une suite d'Arnoux-Rauzy [118, 208]. Au chapitre 6 (voir également [6]), elle nous permettra de montrer la transcendance des nombres réels dont le développement b-adique est soit un codage binaire de rotation irrationnelle, soit le codage naturel d'un échange de trois intervalles non périodique.

Une problématique similaire peut être envisagée avec le développement en fraction continue. En effet, si celui-ci permet de caractériser les nombres réels quadratiques, ceux dont le développement est ultimement périodique, le développement en fractions continues d'un nombre algébrique de degré au moins trois a-t-il un caractère aléatoire ? A. Khintchine [148] est semble-t-il le premier à avoir posé cette question en 1949. Il est conjecturé que la suite des quotients partiels d'un irrationnel algébrique de degré au moins trois est nécessairement non bornée, propriété générique qui remplace ici la notion de normalité. Là encore, cette conjecture paraît réellement hors de portée, puisque l'on ne connaît (quasiment) rien sur le développement en fractions continues d'un réel algébrique non quadratique. Les auteurs de [14] ont récemment obtenu une condition combinatoire de transcendance analogue à celle de [118]. Ce résultat utilise une idée introduite dans [78] et développée dans [196]. Elle est obtenue à partir d'un théorème de W. Schmidt [214] sur l'approximation des nombres algébriques par des nombres quadratiques. Ce théorème, utilisé dans un rôle comparable à celui de D. Ridout, traduit le fait qu'un nombre algébrique de degré supérieur ou égal à trois ne peut être trop bien approché par des nombres algébriques de degré deux. Afin de faciliter la compréhension du lecteur, nous rappelons la condition de [14] dans le cadre particulier, mais souvent suffisant, des sous-shifts uniquement ergodique[19].

Théorème 0.2.12 (Allouche-Davison-Queffelec-Zamboni). *Soit Θ un nombre réel non quadratique dont le développement en fraction continue, noté $[0; U]$, commence, pour tout entier n, par $[0; u_n u'_n \ldots]$, où u_n est un mot non vide admettant u'_n comme préfixe. Si de plus, le sous-shift engendré par U est uniquement ergodique, $|u_n|$ tends vers l'infini et $\liminf \frac{|v_n v'_n|}{|v_n|} > \frac{3}{2}$, alors Θ est un nombre transcendant.*

[19] Se reporter au paragraphe 0.1.3.

À nouveau, la présence de puissances (plus que $\frac{3}{2}$, arbitrairement longues et dès le début) dans le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel non quadratique permet d'en déduire la transcendance. Ce résultat s'applique en particulier aux suites sturmiennes et quasi-sturmiennes [14], à la suite de Thue-Morse [196], à certains points fixes de substitutions [197] et à un certain nombre d'autres exemples [78, 14]. Cette utilisation du théorème de W. Schmidt apparaît déjà sous une forme moins aboutie dans [78] et [196, 197]. Un survol [13] reprend en détail les deux problématiques que nous venons d'évoquer. Notons enfin que la condition de transcendance de [14] a été très recemment étendue dans [79].

Nous montrerons au chapitre 7 que ce critère ne s'applique pas à tous les codages de rotations. En effet, nous exhibons des codages de rotations sans aucune puissance initiale arbitrairement grande.

Dans les deux problématiques que nous venons d'évoquer, le caractère "quasi-périodique" des développements considérés, illustré par la présence de certaines répétitions, interdit l'algébricité des nombres réels associés. Il serait évidemment intéressant d'obtenir des conditions de transcendance similaires pour d'autres développement, comme les β-développements définis dans [206].