Université Aix-Marseille II
Faculté des Sciences de Luminy

Thèse
pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Aix-Marseille II
Spécialité : Mathématiques

soutenue le 18 décembre 2002 par

Boris ADAMCZEWSKI

Approche dynamique et combinatoire de la notion de discrépance

après avis des rapporteurs :

M. Yann BUGEAUD
M. Robert TIJDEMAN

devant le jury composé de :

M. Jean-Paul ALLOUCHE
M. Pierre ARNOUX
M. Jean BERSTEL
Mme. Valérie BERTHÉ, directeur de thèse
M. Yann BUGEAUD

Remerciements

J'adresse naturellement mes premiers remerciements à Valérie Berthé sans qui cette thèse n'aurait pu voir le jour. Son investissement dans ce projet et ses encouragements constants ont été un réel soutien. Sa curiosité mathématique et sa rigueur scientifique furent très stimulantes.

Je suis très honoré que Robert Tijdeman ait accepté la charge de rapporteur. Je le remercie de l'attention qu'il a portée à mon travail.

Je remercie vivement Yann Bugeaud d'avoir également assumé cette tâche. Les discussions que nous avons partagées ont été pour moi particulièrement enrichissantes.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Jean-Paul Allouche dont les nombreux commentaires ont sans conteste contribué à la lisibilité de ce travail. Je suis très heureux qu'il fasse partie de ce jury.

Je remercie Pierre Arnoux de prendre part à ce jury et des suggestions qu'il a eu la gentillesse de m'adresser durant ces deux dernières années.

Je suis très honoré que Jean Berstel ait accepté d'être membre de ce jury.

Je tiens à saluer l'ensemble des membres de l'équipe DAC pour leur gentillesse. Un GRAND merci à Julien et Xavier pour les nombreuses heures passées au tableau, à Anne qui m'a successivement initié aux joies de Latex et de Mupad (et qui ne manquera pas de reconnaître certains fractals !), à Pascal et Sébastien pour leur bonne humeur, sans oublier mes "partenaires de galère" nouveaux et plus anciens, Ali, Nicolas, Driss, Nicolas, Éric ...

Je remercie également Maria Doudekova et Pierre Liardet de l'accueil qu'ils m'ont toujours réservé lors de mes visites au CMI.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à ceux de mes professeurs qui, au cours de ma scolarité, ont su me communiquer leur soif de savoir et leur goût pour l'enseignement.

Il m'est évidemment impossible d'oublier Bruno et nos "révisions", Ô agreg ... (et merci pour ton aide dans l'élaboration des programmes !), ainsi que Pascale qui m'a supporté durant cinq longues années d'étude (on s'appelle ?).

À tous les membres du SMFC, fondateurs, assimilés, pièces rapportées et autres, je voudrais dire (même si vous le savez tous) combien ces années marseillaises ont été importantes et agréables. Quand est-ce qu'on remet ça ?

Je remercie mes parents, ma sœur, et le reste de la famille bien sûr, d'avoir été présents à mes côtés.

Merci enfin à Aurélie dont le soutien, les encouragements et la patience (apparemment sans limite ?) m'ont permis de conserver un "certain" équilibre mental !

Table des matières

Introduction

0.1 Problèmes de répartition

La théorie de l'équirépartition a été développée à partir de 1916 sous l'influence de l'article fondateur de H. Weyl intitulé “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. eins” [1], et est consacrée, du moins sous sa forme primitive, à l'étude de la répartition de parties fractionnaires de nombres réels dans l'intervalle unité. La motivation initiale de H. Weyl, l'obtention de résultats améliorant le théorème d'approximation de L. Kronecker (à savoir, la suite $(\{n\alpha\})_{n\geq 0}$ est dense dans l'intervalle $[0,1[$ pour tout nombre irrationnel α), place l'approximation diophantienne au cœur de cette problématique. Toutefois, les nombreuses applications de l'équirépartition, ainsi que leur diversité, lui confèreront rapidement le statut de théorie à part entière et contribueront fortement à son développement. Dès 1914, alors que les bases n'en sont pas encore totalement jetées, H. Weyl [248], reprenant également les travaux de H. Bohl [46] et W. Sierpinski [226, 227], donne déjà des applications de l'équirépartition des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ pour α irrationnel à l'étude des perturbations en astronomie ou celle du mouvement d'une bille de billard. L'utilisation dans cet article du terme *Ergodenhypothese* laisse d'ailleurs présager de liens qui s'établiront ensuite avec la théorie ergodique. Parallèlement, le concept de répartition uniforme est naturellement étendu aux suites multi-dimensionelles, puis à des espaces plus généraux comme les groupes topologiques, compacts ou quasi-compacts. De même la notion de répartition dans un espace compact ou localement compact par rapport à une mesure borélienne abstraite (sous-entendue différente de la mesure de Lebesgue ou de Haar) fait son apparition, offrant à la théorie toute sa généralité.

De l'importante différence de régularité entre certaines suites réelles, pourtant équiréparties, est née l'idée de plus ou moins bonne répartition. La notion de discrépance[2], mesure de déviation par rapport à une répartition idéale, a été introduite par V. Bergström[3] et constitue initialement une approche quantitative des problèmes de répartition des suites réelles. Il est néanmoins possible d'associer de façon naturelle une notion de discrépance à tous les concepts de répartition évoqués précédemment. Parmi les suites équiréparties (seules à réellement nous intéresser ici), il devient alors possible de distinguer les suites réellement régulières, celles de faible discrépance, des suites tout juste équiréparties dont la discrépance est plus importante. Afin d'estimer la discrépance D_N d'une suite, il est nécessaire d'en obtenir une majoration (par exemple du type $O(f(N))$ où f est une fonction classique) mais il est également utile d'en déterminer une minoration. En effet, cette dernière permettra de juger la pertinence de la majoration obtenue. La discrépance d'une suite étant généralement une fonction oscillante, les minorations recherchées sont du type $\Omega(f(N))$ (c'est-à-dire, $D_N > Cf(N)$ pour une certaine constante C et pour une infinité d'entiers N) où f désigne

[1] Pour une référence complète de l'article voir [249].

[2] Le terme discrépance semble en fait dû à une francisation brutale du terme allemand Diskrepanz qui signifie désaccord, divergence.

[3] Le terme discrépance fut lui probablement introduit un peu plus tard par van der Corput.

une fonction classique. Il est dans un premier temps aisé de constater l'impossibilité d'obtenir des majorations non triviales qui soient valables pour toutes les suites réelles ou toutes les suites du tore de dimension d. En effet, il est toujours possible de construire des suites équiréparties de discrépance arbitrairement grande (mais tout de même en $o(N)$). Aussi, pour majorer est-il indispensable de considérer une suite particulière ou du moins une classe de suites bien précise. Déterminer jusqu'à quel point une suite peut être équirépartie est en revanche un problème plus délicat qui n'est aujourd'hui bien résolu que pour les suites réelles unidimensionnelles par un résultat de W. Schmidt [215] (voir Théorème 0.1.1).

Concernant l'équirépartition des suites réelles unidimensionnelles, deux problèmatiques se distinguent principalement. D'une part, qu'en est-il de la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ ainsi que d'autres suites classiques issues de la théorie des nombres ? D'autre part, existe-t-il des suites dont la répartition est idéale et si c'est le cas, peut-on en donner des constructions explicites ? Ces deux questions bien que fondamentalement différentes se rejoignent, les suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ étant, du moins pour des paramètres quadratiques, de bons candidats pour obtenir des suites de faible discrépance. Il aura d'ailleurs fallu attendre 1981 et les constructions données par H. Faure [108] pour exhiber des suites mieux réparties que toute rotation irrationnelle. La recherche de suites de discrépance minimale est également motivée par l'inégalité de Koksma [149] qui montre que de telles suites offrent de bonnes approximations arithmétiques de calculs d'intégrales de fonctions suffisamment régulières. De plus, la discrépance de la suite permet de majorer les erreurs commises par ces approximations. La discrépance (ou des mesures qui lui sont liées) est également considérée comme une des mesures du caractère aléatoire d'une suite (voir par exemple [199] et [169]).

Le cas des suites réelles à valeurs dans un tore de dimension supérieure traduit la même ambivalence, avec d'un côté l'étude des suites de Kronecker, liée aux propriétés d'approximation diophantienne simultanée, et de l'autre la recherche et la construction de suites de faible discrépance. Cette dernière s'est considérablement développée notamment au cours des vingt dernières années sous l'influence de H. Niederreiter [181, 182, 183, 184, 185] (voir également [229] et [109] pour des résultats antérieurs). En effet, E. Hlawka [127] en obtenant un équivalent multidimensionnel de l'inégalité de Koksma (appelé depuis inégalité de Koksma-Hlawka), montre que les suites de faible discrépance en dimension k donnent de bonnes approximations arithmétiques de calculs d'intégrales de fonctions de k variables suffisamment régulières. La force de cette méthode, dite de quasi-Monte Carlo, est d'obtenir une majoration *a priori* et explicite de l'erreur commise, surpassant ainsi la méthode de Monte Carlo où l'on vérifie *a posteriori* que la suite testée est aléatoire et où l'erreur est de nature probabiliste. On compte de nombreuses applications des méthodes de quasi-Monte Carlo dont certaines semblent particulièrement prometteuses en mathématiques financières (voir [223, 224, 225] ou [89]).

0.1.1 Suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ et suites de Kronecker

Rappelons dans un premier temps les définitions d'équirépartition et de discrépance pour les suites réelles. Une suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs réelles est dite équirépartie modulo un si pour tout couple (a, b), $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[a,b[}(\{x_k\}) = b - a,$$

où $\chi_{[a,b[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[a,b[$. La discrépance de la suite x est définie par

$$D_N(x) = \sup_{0\le a\le b\le 1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[a,b[}(\{x_k\}) - N(b-a) \right|,$$

et la discrépance à l'origine de la suite x est donnée par

$$D_N^*(x) = \sup_{0\le \beta\le 1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[0,\beta[}(\{x_k\}) - N\beta \right|.$$

Ces deux notions de discrépance sont équivalentes au sens où elles sont liées par la relation $D_N^* \le D_N \le 2D_N^*$. La première est sans doute plus naturelle, mais la discrépance à l'origine est souvent plus agréable à étudier. Une propriété remarquable est qu'une suite est équirépartie modulo un si et seulement si sa discrépance D_N est négligeable devant N (c'est-à-dire, $D_N = o(N)$). Il est naturel de se demander jusqu'à quel point une suite réelle peut être équirépartie. Le premier élément de réponse fut donné dans les années quarante par T. van Aardenne-Ehrenfest [241, 242] qui montra que $D_N(x)$ ne peut être bornée, quelle que soit la suite x ; ce résultat avait été conjecturé par J. G. van der Corput. Ensuite W. Schmidt [215] régla la question en 1972 en obtenant le résultat suivant :

Théorème 0.1.1 (Schmidt). *Il existe une constante C telle que pour toute suite réelle $x = (x_n)_{n\ge 0}$,*

$$D_N(x) > C\log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

En effet, des exemples de suites satisfaisant à $D_N = O(\log N)$ étaient déjà connus depuis longtemps (voir par exemple [186, 187]). Aussi, considère-t-on qu'une suite réelle est une suite de faible discrépance dès lors que $D_N = O(\log N)$.

Il est connu depuis les travaux de H. Weyl [249], H. Bohl [46] et W. Sierpinski [226, 227], que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si α est irrationnel. De nombreux auteurs ont alors étudié la discrépance de ces suites, à commencer par [31, 32, 124, 125]. Ces travaux ont mis en relief les liens profonds existant entre les qualités d'approximation diophantienne de l'irrationnel α et la discrépance de la suite $(n\alpha)$. Plus précisément, les irrationnels α les moins bien approchés par des nombres rationnels (comme le nombre d'or) offrent les suites $(n\alpha)$ les mieux réparties.

Nous allons à présent rappeler quelques résultats significatifs dans cette direction. Le supremum des réels γ pour lesquels l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\gamma+1}},$$

admet une infinité de solutions entieres q, est appelé le *type* de α. Notamment, tout algébrique irrationnel est de type 1 en vertu du théorème de K. F. Roth [211]. Dans [125] et [186], il est prouvé que pour un irrationnel α de type fini η et tout ε positif, $D_N(n\alpha) = O(N^{-\frac{1}{\eta}+\varepsilon})$. De plus, ce résultat est optimal puisque (voir [32]) pour un irrationnel α de type fini η et pour tout ε positif, il existe une constante C telle que

$$D_N(n\alpha) > CN^{-\frac{1}{\eta}+\varepsilon},$$

pour une infinité d'entiers N. Des démonstrations simples de ces deux résultats sont données dans [152]. On trouve également dans les travaux de H. Behnke [31, 32] les éléments permettant de prouver le résultat suivant :

Théorème 0.1.2 (Behnke). *Soit α un nombre irrationnel dont le développement en fractions continues est donné par $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Alors, $D_N(n\alpha) = O(\log N)$ si et seulement si la suite $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_k$ est bornée.*

Une preuve en est donnée dans [89]. Il en résulte que lorsque α verifie la condition du théorème précédent, donc notamment lorsque α est un nombre à quotients partiels bornés ou un nombre quadratique, la suite $(n\alpha)$ est une suite de faible discrépance. Il est alors naturel d'introduire les quantités

$$\nu(\alpha) = \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N(n\alpha)}{\log N}$$

et

$$\nu^*(\alpha) = \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N^*(n\alpha)}{\log N} \ .$$

Parmi les nombreux travaux sur ce sujet (voir par exemple [25, 26, 27, 95, 97, 158, 198, 217, 218]), notons que Y. Dupain et V. T. Sós [97] obtiennent l'égalité surprenante

$$\inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \nu^*(\alpha) = \nu^*\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4\log(1+\sqrt{2})},$$

plus tard complétée par C. Baxa [25] qui montre que $\nu^*(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = [\nu^*(\sqrt{2}), +\infty[$ (voir aussi [26, 27]). Il est également conjecturé que l'infimum des valeurs de ν est atteint pour le nombre d'or ([26]). Enfin, mentionnons un résultat métrique d'A. Khintchine [147] qui établit que, pour presque tout α, la suite $(n\alpha)$ est bien répartie. Nous en citons une version légèrement plus forte que l'on peut trouver dans [29].

Théorème 0.1.3 (Khintchine). *Pour toute fonction croissante φ,*

$$D_N(n\alpha) = O\left(\log N.\varphi(\log\log N)\right) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} < +\infty,$$

pour presque tout réel α.

Ainsi, comme l'illustrent les résultats précédents, la répartition des suites $(n\alpha)$ est vraiment bien comprise. Le rôle joué par le développement en fraction continue de α est prépondérant dans cette étude. Les résultats les plus fins sont en effet tous obtenus en utilisant le développement d'Ostrowski des entiers et des systèmes de numération associés. Nous reviendrons sur ces développement au paragraphe 0.2.2.

L'étude des suites de Kronecker, c'est-à-dire des suites du type $(n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_k)$, est en revanche beaucoup moins aboutie. Cela s'explique essentiellement par l'absence de bon équivalent multidimensionnel aux fractions continues. Nous ne donnons pas ici les définitions classiques d'équirépartition et de discrépance pour les suites de $\mathbb{R}^k$ (ou de $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$) ; le lecteur pourra par exemple se reporter à [152]. Bien que le critère de Weyl [249] donne aisément que la suite $(n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_k)$ est équirépartie modulo un si et seulement si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et 1 sont rationnellement indépendants, le comportement de la discrépance des suites de Kronecker s'avère toujours mal compris. L'inégalité d'Erdős-Turán-Koksma [150] permet toutefois d'obtenir que, pour toute suite de Kronecker équirépartie et de paramètres algébriques, $D_N = O(N^\varepsilon)$ pour tout ε positif. Cette majoration n'est cependant pas très satisfaisante, comme l'illustre le résultat suivant de J. Beck [29] :

Théorème 0.1.4 (Beck). *Pour toute fonction croissante φ,*

$$D_N(n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_k) = O\left(\log^k N.\varphi(\log\log N)\right) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} < +\infty,$$

pour presque tout k-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ (au sens de la mesure de Lebesgue) .

Ce théorème est réellement l'analogue multidimensionnel du théorème d'A. Khintchine que nous avons énoncé précédemment (voir également un résultat un peu plus faible de W. Schmidt [213] qui utilise l'inégalité d'Erdős-Turán-Koksma). En effet, on s'accorde généralement à penser que l'ordre de grandeur minimal pour la discrépance d'une suite à valeur dans $\mathbb{R}^k$ est $\log^k N$. Cependant ce résultat est seulement conjecturé et la principale minoration de la discrépance des suites de $\mathbb{R}^k$ est due à K. F. Roth [210] (voir également une amélioration due à J. Beck [28] pour $k = 2$).

Théorème 0.1.5 (Roth). *Soit k un entier strictement positif. Il existe une constante C_k telle que pour toute suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,*

$$D_N(x) > C_k \log^{\frac{k}{2}} N,$$

pour une infinité d'entiers N.

Le facteur résiduel $\frac{1}{2}$ dans l'inégalité ci-dessus vient du fait que K. F. Roth minore en fait une autre notion de discrépance, plus souple, la discrépance associé à la norme L^2 (voir par exemple [152]). Pour cette notion de discrépance, il est prouvé dans [65] que la minoration obtenue est en fait optimale.

0.1.2 Concepts généraux de répartition, discrépance locale et ensembles à restes exceptionnels

Comme nous l'avons déjà remarqué, la théorie de l'équirépartition et son aspect quantitatif, la discrépance, ne se limitent pas à l'étude de suites réelles. Le livre référence de L. Kuipers et H. Niederreiter [152], ainsi que l'ouvrage plus récent de M. Drmota et R. F. Tichy [89], l'illustre parfaitement. De nombreuses notions de répartition y sont abordées, chacune possédant plusieurs variantes dans les définitions. Toutefois, il s'en dégage une philosophie commune que nous allons essayer de détailler à présent.

Pour cela plaçons-nous dans un cadre suffisamment large et considérons un espace compact X, muni d'une mesure borélienne de probabilité μ et d'une base $\mathcal{B}$, si possible naturelle, de la topologie de X. On peut alors définir une notion de répartition sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ en demandant à une suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X d'être équirépartie si

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) = \mu(B),$$

où $\chi_{\{B\}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble B. Cette notion s'avère particulièrement intéressante lorsque la définition de $\mathcal{B}$ garantit que pour toute fonction f continue sur X

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = \int_X f d\mu.$$

Il est de même possible de définir la discrépance de la suite x par :

$$D_N(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) - N\mu(B) \right|.$$

Ainsi, lorsque l'on parle de répartition est-il indispensable de préciser par rapport à quelle mesure et à quelle base de la topologie de l'espace on souhaite travailler. Dans le cas des suites réelles par exemple, la mesure est implicite (il s'agit bien sûr de la mesure de Lebesgue) et la base de la topologie est généralement formée des intervalles de $[0,1[$ ou des intervalles de $[0,1[$ ayant pour origine 0 (pour la discrépance à l'origine).

La discrépance est une mesure uniforme de répartition et il peut donc sembler surprenant, voir inopportun, de parler de discrépance locale. Il s'agit néanmoins d'une notion très utile, qu'il serait illogique de nommer autrement ; cette terminologie apparaît entre autres dans [180] et [30].

Définition 0.1.6. *En conservant les notations précédentes, la discrépance locale de x en B, B désignant un élément de $\mathcal{B}$, est notée $\Delta_N(x;B)$, et est définie par :*

$$\Delta_N(x;B) = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) - N\mu(B) \right|.$$

Ainsi, discrépance et discrépance locale sont-elles liées par la relation

$$D_N(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \Delta_N(x;B).$$

Une première remarque, simple mais néanmoins importante, est que toute minoration d'une discrépance locale fournit immédiatement une minoration pour la discrépance (voir chapitre 3 pour un exemple). Ensuite, si la discrépance détecte bien les irrégularités dans la répartition (grâce au supremum dans la définition), elle ne permet généralement pas de révéler les ensembles pour lesquels la répartition est particulièrement bonne. Ce sont ces deux aspects qui motivent principalement l'étude de la discrépance locale (ainsi qu'un troisième aspect plus dynamique abordé au paragraphe suivant). Enfin, il est intéressant de remarquer que l'étude de la discrépance locale d'une suite n'est pas nécessairement plus simple que celle de sa discrépance. Par exemple, H. Niederreiter [180] calcule sans grande difficultés l'ordre de grandeur de la discrépance de la suite de Farey, mais exhibe pour cette même suite un problème de discrépance locale équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Ensembles à restes exceptionnels

Nous parlerons d'*ensembles à restes exceptionnels* pour nommer un ensemble dont la répartition est soit très mauvaise soit quasiment idéale. Commençons par définir une classe d'ensembles exceptionnellement bons : les ensemble à restes bornés.

Définition 0.1.7. *Un ensemble B est dit à restes bornés pour la suite x, si $\Delta_N(x;B)$ est une suite bornée. Plus généralement, une famille d'ensembles $\mathcal{B}$ est dite à restes uniformément bornés pour la suite x si la suite*

$$\left(\sup_{B\in\mathcal{B}} \Delta_N(x;B) \right)_{N\geq 0}$$

est bornée.

Ces ensembles ont été l'objet de nombreuses études dont nous rappelons les principaux résultats. Le premier d'entre eux, et certainement le plus célèbre, est un théorème datant de 1966 et dû à H. Kesten[4] [146].

Théorème 0.1.8 (Kesten). *Un intervalle de* $[0,1[$ *est à restes bornés pour la suite* $(\{n\alpha\})$ *si et seulement si sa longueur appartient à* $\mathbb{Z}\alpha \mod 1$.

Ensuite, W. Schmidt [216] a montré la rareté de ces ensembles en prouvant que toute suite réelle ne possède au plus qu'un nombre dénombrable d'intervalles à restes bornés, et G. Rauzy [204] a prouvé l'existence d'ensembles non mesurables à restes bornés pour les suite $(n\alpha)$. Les intervalles à restes majorés (respectivement minorés), c'est-à-dire pour lesquels la somme $\sum_{k=0}^{N-1} \chi_{\{B\}}(x_k) - N\mu(B)$ est simplement majorée (respectivement minorée), sont étudiés pour les suites $(n\alpha)$ dans [94] et [96]. Nous développerons au chapitre 2 une méthode permettant de déterminer si l'intervalle $[0,\beta[$ est à restes majorés ou bien minorés pour la suite $(n\alpha)$ lorsque α et β appartiennent à un même corps quadratique.

Pour les suites de Kronecker, un résultat négatif de P. Liardet [159] montre qu'il ne peut exister de pavés non triviaux à restes bornés. Toutefois, G. Rauzy [202] exhibe des ensembles à frontières fractales (voir figure 5) qui sont à restes bornés pour une suite de Kronecker de dimension 2 (voir également [235] pour le cas d'un parallélogramme). Nous détaillerons la construction de ces ensembles au paragraphe 0.2.4.

Les ensembles à restes bornés jouent un rôle important dans l'étude spectrale des systèmes dynamiques ergodiques. Ainsi, H. Furstenberg, H. Keynes et L. Shapiro [119] obtiennent-ils en 1973 une importante généralisation du théorème de H. Kesten :

Théorème 0.1.9 (Furstenberg, Keynes, Shapiro). *Soit* $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ *un système dynamique ergodique. Si un élément* B *de l'ensemble* $\mathcal{B}$ *est, pour presque tout* x*, un ensemble à restes bornés pour la suite* $(T^n(x))_{n\geq 0}$*, alors* $e^{2\pi i\mu(B)}$ *est une valeur propre pour la transformation* T*, c'est-à-dire il existe une fonction mesurable* f *telle que* $f(T(x)) = e^{2\pi i\mu(B)}f(x)$ *pour tout élément* x *de* X*. De plus, si* $e^{2\pi ir}$ *est une valeur propre pour* T*, il existe un ensemble* B *appartenant à* $\mathcal{B}$ *tel que* $\mu(B) = r$ *et tel que* B *soit, pour presque tout* x*, un ensemble à restes bornés pour la suite* $(T^n(x))_{n\geq 0}$.

Le théorème de H. Kesten implique donc que pour tout élément r de $\mathbb{Z}[\alpha]$, $e^{2\pi ir}$ est une valeur propre pour la rotation d'angle α. Dans ce cas, il est déjà connu que le groupe des valeurs propres est en fait égal à $\{e^{2\pi ir},\ r \in \mathbb{Z}[\alpha]\}$. Ainsi, toute valeur propre est-elle ici "réalisée" par un intervalle à restes bornés.

Notons qu'il est également prouvé dans [123] que si, pour tout x appartenant à un ensemble de mesure positive, B est un ensemble à restes majorés pour la suite $(T^n(x))_{n\geq 0}$, alors $e^{2\pi i\mu(B)}$ est encore une valeur propre pour la transformation T (voir également [191] sur ce sujet).

Une autre propriété importante des ensembles à restes bornés est donnée par G. Rauzy dans [204]. L'énoncé de ce résultat étant un peu technique, il nécessite l'introduction de quelques notations que nous allons rappeler. Considérons un entier k, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ et L un réseau de $\mathbb{R}^k$, de sorte que la transformation T définie de $\mathbb{R}^k/L$ dans lui-même par

$$T(x) = x + \alpha \mod L$$

[4] La partie suffisante du théorème est en fait due à Hecke [125].

soit minimale. Soit A une partie de $\mathbb{R}^k$, bornée, d'intérieur non vide et telle que

$$\forall\, x, y \in A, \;\; x - y \in L \Rightarrow x = y.$$

Cette dernière propriété nous permet d'identifier A à son représentant canonique $\overline{A}$ dans $\mathbb{R}^k/L$. L'application induite par T sur A, notée T_A, est alors définie de A dans lui même par :

$$T_A(x) = \inf_{n>0} \left\{T^n(x) \in A\right\}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de [204].

Théorème 0.1.10 (Rauzy). *Conservons les notations précédentes et supposons de plus qu'il existe un réseau M de $\mathbb{R}^k$ et $\beta \in \mathbb{R}^k$ tels que :*
(i) $\forall\, x, y \in A, \;\; x - y \in M \Rightarrow x = y,$
(ii) $\forall\, x \in A, \;\; T_A(x) = x + \beta \mod M.$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^k/L$, l'ensemble A est un ensemble à restes bornés pour $(T^n(x))_{n\geq 0}$.

Ainsi, dira-t-on plus simplement (et avec un léger abus de langage) que si l'induit d'une rotation T de $\mathbb{R}^k/L$ sur un ensemble A est à nouveau une rotation (pour un autre réseau), A est un ensemble à restes bornés pour T. Ce résultat a notamment une grande importance dans la représentation géométrique des systèmes substitutifs (se reporter au paragraphe 0.2.3 et à la discussion du paragraphe 0.2.5).

La recherche de "mauvais" ensembles pour la répartition d'une suite n'a jusqu'à présent pas fait l'objet d'une étude intensive. Néanmoins, le résultat suivant de R. Tijdeman et G. Wagner [240] peut être considéré comme une version locale du théorème de W. Schmidt (voir [232] pour un résultat similaire dans le cas des suites $(n\alpha)$).

Théorème 0.1.11 (Tijdeman-Wagner). *Il existe une constante C telle que pour toute suite réelle x,*

$$\Delta_N(x; [0, \beta[) > C \log N,$$

pour presque tout β dans $]0, 1[$.

Ce résultat implique notamment que pour toute rotation d'angle quadratique α, les "mauvais" intervalles sont en fait génériques.

Nous exhiberons au chapitre 2 (voir également [2]) certains de ces ensembles, à savoir les intervalles $[0, \beta[$ pour lesquels β appartient à $(\mathbb{Q}(\alpha) \setminus \mathbb{Z}[\alpha]) \mod 1$. Nous montrons également pour certaines de ces rotations, comme la rotation d'angle le nombre d'or, l'existence d'intervalles du type $[0, \beta[$ qui s'avèrent très particuliers. En effet, ces intervalles vérifient la propriété suivante

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N(n\alpha; [0, \beta[)}{\log N} = \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N^*(n\alpha)}{\log N},$$

qui s'exprime également par

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N(n\alpha; [0, \beta[)}{D_N^*(n\alpha)} = 1, \tag{1}$$

puisque par définition

$$\Delta_N(n\alpha; [0, \beta[) \leq D_N^*(n\alpha).$$

Par exemple, nous obtenons

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{D_N^*(n\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{\log N} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N\left(n\frac{\sqrt{5}-1}{2};\left[0,\frac{\sqrt{5}+5}{10}\right[\right)}{\log N}.$$

Notons qu'ici la renormalisation par le facteur $\log N$ est naturelle puique $D_N^*(n\alpha) = O(\log N)$ lorsque α est quadratique (voir théorème 0.1.2), mais la formulation de (1) évite de connaître préalablement l'ordre de grandeur de D_N^*. L'équation (1) signifie que l'irrégularité uniforme de la suite $(n\alpha)$ est réalisée par l'irrégularité locale de cette suite par rapport à l'intervalle $[0,\beta[$. Ces ensembles à restes exceptionnels n'ont pour l'instant pas du tout été étudiés. La propriété précédente amène pourtant un certain nombre de questions.

Questions : Pour tout nombre α irrationnel, nous introduisons l'ensemble suivant :

$$\left\{\beta\in[0,1[\,,\ \limsup_{N\to\infty}\frac{\Delta_N(n\alpha;[0,\beta[)}{D_N^*(n\alpha)}=1\right\}.$$

Cet ensemble est-il nécessairement non vide ? Si tel est le cas, est-il dénombrable, de mesure nulle ? Quelle en est la dimension de Hausdorff ? Qu'en est-il lorsque l'on remplace la suite $(n\alpha)$ par une suite réelle quelconque ?

0.1.3 Discrépance symbolique

Une idée essentielle dans ce travail est d'introduire et de formaliser des notions de répartition dans un contexte symbolique. Au vu des concepts généraux que nous avons déjà discutés, cela semble légitime. Notre volonté n'est cependant pas de présenter uniquement une énième variation sur le thème de la répartition mais plutôt de montrer que les suites symboliques fournissent un cadre d'étude naturel aux problèmes de discrépance locale et donc *a fortiori* à la recherche d'ensembles exceptionnels. Aussi considérons-nous les suites symboliques comme s'inscrivant réellement au cœur des problèmes de répartition.

Commençons par rappeler les définitions d'équirépartition et de discrépance pour les ensembles finis. Considérons un ensemble fini $\mathcal{A}$. Muni de la topologie discrète, $\mathcal{A}$ est un ensemble compact dont les éléments engendrent naturellement la topologie. Considérons une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{A}$. Une suite $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est dite équirépartie par rapport à μ si :

$$\forall\, a\in\mathcal{A},\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\chi_{\{a\}}(u_k)=\mu(a),$$

où $\chi_{\{a\}}$ désigne la fonction indicatrice du singleton $\{a\}$. Il est facile de constater que chaque élément de notre ensemble $\mathcal{A}$ admet une fréquence dans une suite lorsque celle-ci est équirépartie. *A contrario*, considérons une suite U definie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ et dont les lettres admettent des fréquences. Le vecteur des fréquences $\Lambda=(\Lambda_i)_{i\in\mathcal{A}}$ définit sur l'ensemble $\mathcal{A}$ une mesure de probabilité naturelle pour U. L'existence des fréquences implique que U est équirépartie par rapport à cette mesure de probabilité. Notamment, pour un point fixe de substitution primitive (une définition est donnée au paragraphe 0.2.1) une telle mesure existe toujours (voir par exemple [195]).

Il existe alors une notion de discrépance pour de telles suites.

Définition 0.1.12. *La discrépance $\Delta_N(\mu,U)$ de la suite U par rapport à la mesure μ est définie par :*

$$\Delta_N(\mu,U) = \max_{a\in\mathcal{A}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \big(\chi_{\{a\}}(u_k) - \mu(a)\big) \right|.$$

Ainsi, la discrépance $\Delta_N(\Lambda,U)$ mesure-t-elle la vitesse de convergence du vecteur

$$\left(\frac{|u_0u_1\dots u_{N-1}|_a}{N}\right)_{a\in\mathcal{A}}$$

vers le vecteur des fréquences Λ.

Bien que l'étude de la discrépance sur un ensemble fini soit dotée d'un intérêt propre (voir par exemple [89] et [237]), cette notion peut prendre un caractère beaucoup plus général. En effet, considérons une suite $x=(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace compact X muni d'une mesure de probabilité ν. Étant donnée une partition mesurable $P=(P_1,\dots,P_k)$ de l'espace X, nous pouvons définir la discrépance locale[5] de x par rapport à ν et P par :

$$\Delta_N(x,P) = \max_{i\in\{1,\dots,k\}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \big(\chi_{\{P_i\}}(x) - \nu(P_i)\big) \right|.$$

La suite $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{A}=\{1,\dots,k\}$ et définie par

$$u_n = i \text{ , si } x_n \in P_i,$$

est appelée le *codage naturel* de x par rapport à P. Les définitions précédentes entraînent alors

$$\Delta_N(x,P) = \Delta_N(\mu,U),$$

où μ est la mesure induite par ν sur $\mathcal{A}$ (à savoir, $\mu(i)=\nu(P_i)$). En particulier, la suite $\Delta_N(\mu,U)$ est bornée si et seulement si chaque P_i est un ensemble à restes bornés pour x.

Ainsi, tout problème de discrépance locale (sur n'importe quel espace compact) se réduit-il à l'étude de la répartition d'une suite symbolique. Ceci confère à cette dernière une place centrale, mais rend du même coup utopique l'idée d'obtenir des résultats généraux sur la répartition des suites symboliques. Toutefois, nous montrons au chapitre 3 qu'en restreignant notre étude au cas des suites obtenues comme points fixes de substitutions primitives (ce qui correspond tout de même à une classe assez étendue de suites fournissant de nombreux exemples), il est possible de décrire simplement et avec précision le comportement asymptotique de leurs fonctions de discrépance. En particulier, nous obtenons des résultats sur la répartition des substitutions primitives de type Salem (substitutions primitives dont la matrice d'incidence admet une unique valeur propre de module strictement supérieur à un et au moins une valeur propre de module un). Il s'agit en fait d'un abus de langage car nous ne demandons pas au polynôme caractéristique d'être irréductible. Ainsi, la valeur propre dominante d'une substitution de type Salem n'est-elle pas nécessairement un nombre de Salem.

Parallèlement, il est naturel d'associer à une suite U à valeurs dans un alphabet fini le système dynamique $(\overline{\mathcal{O}(U)},T)$, où $\overline{\mathcal{O}(U)}$ est la fermeture de l'orbite de la suite U sous l'action du shift T[6].

[5]Nous renvoyons au paragraphe 0.1.2 pour plus de détails sur cette notion.

[6]Une définition plus précise est donnée au paragraphe 0.2.1.

Existe-t-il une notion naturelle de discrépance sur de tels espaces ? Comment se comportent ces systèmes ?

Considérons une suite symbolique U, $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T)$ le sous-shift associé à U, et μ une mesure invariante pour l'action du décalage. On propose alors de définir une notion de discrépance pour un tel système dynamique.

Définition 0.1.13. *La fonction de discrépance du système dynamique $\mathcal{X}$ (par rapport à μ) par :*

$$D_N(\mathcal{X}) = \sup_{V \in \overline{\mathcal{O}(U)}} \sup_{w \in \mathcal{L}(U)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[w]}(T^k(V)) - N\mu([w]) \right|,$$

où $[w]$ désigne le cylindre associé au mot w.

Cette définition est évidemment justifiée par le fait que les cylindres forment une base naturelle de la topologie de $\overline{\mathcal{O}(U)}$. De plus, si (X, T, μ) est un système dynamique uniquement ergodique et f une fonction continue sur X, alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k \to \int f d\mu$$

et la convergence est uniforme. Cependant, la vitesse de convergence dépend de la régularité de la fonction f (voir par exemple les inégalités de [149] ou de Koksma-Hlawka [127]). La quantité

$$\sup_{x \in X} \sup_{f \in \mathcal{C}(X)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k(x) - N \int f d\mu \right|$$

est donc assurément infinie et ne présente aucun intérêt. La fonction de discrépance que nous venons d'introduire mesure la vitesse de convergence uniforme de sommes de Birkhoff, mais en nous restreignant à une classe très régulière de fonctions "presque continues", à savoir les fonctions indicatrices des cylindres. Cette classe de fonctions étant suffisamment large (les cylindres forment une base de la topologie de $\overline{\mathcal{O}(U)}$) nous pouvons considérer $D_N(\mathcal{X})$ comme une mesure de l'unique ergodicité des sous-shifts (ayant cette propriété).

Un autre aspect intéressant de cette fonction de discrépance est que si la suite $D_N(\mathcal{X})$ est bornée, alors tout cylindre est un ensemble à restes bornés pour $\mathcal{X}$. On obtient ainsi une version symbolique du théorème de H. Kesten, les cylindres représentant l'analogue symbolique des intervalles (en tant que base "canonique" de la topologie). Sous ces hypothèses, le résultat est même nettement plus fort puisque les cylindres forment en fait une famille d'ensembles à restes uniformément bornés (voir définition 0.1.7).

Nous verrons notamment au chapitre 3 que les systèmes associés aux substitutions de Fibonacci et Tribonacci vérifient ces conditions et nous donnerons une condition suffisante (et presque nécessaire) pour qu'un système associé à un point fixe de substitution primitive ait une fonction de discrépance bornée. Plus généralement, nous obtenons une description simple du comportement asymptotique de la fonction de discrépance des systèmes associés aux points fixes de substitutions primitives, systèmes connus pour être uniquement ergodiques [171, 172].

0.2 Combinatoire

0.2.1 Substitutions et développements S-adiques

La notion de substitution ou plus exactement de système dynamique substitutif a été introduite en 1963 par W. H. Gottschalk [121]. De tels systèmes, issus de la dynamique symbolique et dotés d'une structure à la fois simple et riche, interagissent avec de nombreux autres domaines et objets mathématiques dont la combinatoire des mots, la théorie des nombres et l'arithmétique, la théorie ergodique, la théorie spectrale, l'algèbre linéaire, les pavages, les ensembles fractals, les automates et la théorie des langages. Deux ouvrages, [195] et [194], sont d'ailleurs complètement consacrés à l'étude de ces interactions. Une *substitution* est un objet de nature combinatoire et plus précisément il s'agit un morphisme non effaçant défini sur le monoïde libre $\mathcal{A}^* = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{A}^k$ engendré par un ensemble fini $\mathcal{A}$.

Dans la suite nous considérons qu'un ensemble fini $\mathcal{A}$, appelé alphabet, est muni de la topologie discrète et que les ensembles $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et par extension $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sont munis de la topologie produit des topologies discrètes. Une application définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ s'étend par concaténation en un endomorphisme de $\mathcal{A}^*$, puis se prolonge par continuité en une application de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. Ainsi nous définirons toujours une substitution par la donnée d'une application d'un alphabet $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^*$, mais nous considèrerons, suivant le contexte, qu'elle agit sur des mots finis ou infinis. Considérons une substitution σ définie sur un alphabet $\mathcal{A}$ et supposons qu'il existe une lettre a telle que $\sigma(a)$ commence par a et soit un mot de longueur au moins deux. Dans ce cas, la suite $(\sigma^n(a))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, point fixe de la substitution. Par exemple, la substitution de Fibonacci, définie par $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 1$ admet $\sigma^\infty(1) = 1211212112\ldots$ comme unique point fixe. Il est ainsi parfois plus agréable de considérer une substitution comme la donnée d'un tel triplet comme cela est fait dans [98].

Définition 0.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. Une substitution définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est un triplet $(\sigma, a, \mathcal{A})$, où σ est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^+ = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{A}^k$ et telle que a soit un préfixe strict de $\sigma(a)$.*

Plus généralement une suite U à valeurs dans l'alphabet $\mathcal{B}$ est dite *substitutive* s'il existe une suite V, point fixe d'une substitution définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$, et un *morphisme* φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}^*$ tels que $U = \varphi(V)$. On associe alors à la suite U le système dynamique naturel $(\overline{\mathcal{O}(U)}, T)$, où $\overline{\mathcal{O}(U)}$ désigne la fermeture de l'orbite de la suite U sous l'action du décalage ou shift T (défini par $T(U) = (u_n)_{n\geq 1}$). Un tel système est appelé *système dynamique substitutif* associé au triplet $(\sigma, a, \mathcal{A})$ et à la projection φ.

Pour étudier une substitution σ ou le système substitutif associé, il est souvent utile d'introduire la matrice d'incidence de la substitution $M_\sigma = (|\sigma(j)|_i)_{i,j\in\mathcal{A}}$. Cette matrice correspond à une "abélianisation" de la substitution et doit donc être considérée comme un objet plus simple mais qui ne contient pas toute l'information initiale. L'intérêt de définir ces matrices est bien sûr de bénéficier ensuite de la puissance des méthodes de l'algèbre linéaire comme nous le verrons aux chapitres 2 et 3. Notons que la condition de *primitivité*, à savoir, il existe une puissance de la matrice dont les coefficients sont tous strictement positifs, s'avère souvent nécessaire et permet d'éviter certaines substitutions dégénérées. D'un point de vue dynamique, les substitutions apparaissent naturellement dans l'étude des systèmes auto-similaires, c'est-à-dire lorsque le système induit[7] sur un sous-ensemble est isomorphe au système initial. De tels exemples sont en particulier fournis par les rotations quadratiques du tore de dimension un (voir par exemple [5]), certaines rotations algébriques torales en dimensions supérieures [202, 19, 57] ou les échanges d'intervalles dont les longueurs appartiennent à un même corps quadratique [48].

Nous avons remarqué que l'itération d'une substitution permet souvent de définir une suite infinie aux propriétés intéressantes. Nous nous intéressons à présent à une généralisation de ce phénomène. Nous reprenons les notations et la terminologie utilisés dans [194]. Considérons un ensemble fini S de substitutions définies sur un alphabet commun $\mathcal{B}$ et un morphisme φ de $\mathcal{B}$ vers un alphabet $\mathcal{A}$.

Définition 0.2.2. *Soit $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans S telle que pour tout élément $r \in \mathcal{B}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n(r)| = +\infty$. Une suite U définie par $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n(b))$, où $b \in \mathcal{B}$, est appelée suite S-adique[8] et le couple $(\varphi, (\sigma_n)_{n\geq 0})$ est appelé développement S-adique de U.*

Une suite S-adique peut ainsi être engendrée par un nombre fini de substitutions. Des expressions S-adiques explicites sont déjà connues pour les suites sturmiennes, les suites d'Arnoux-Rauzy [23], les codages de rotations [86, 5] et les échanges d'intervalles [117, 5, 163]. Dans ces exemples, les résultats sont même beaucoup plus forts puisque toute les suites du même type (soit sturmiennes, soit d'Arnoux-Rauzy, ...) sont décrites à l'aide d'un même ensemble de substitutions. Ces représentations sont généralement obtenues en utilisant soit le graphe des mots (voir par exemple [38]) soit un procédé d'induction comme celui décrit dans [201] pour les échanges d'intervalles (nous rappelons ce procédé au chapitre 1 dans le cadre des échanges de trois intervalles). Plus généralement, dans [112] S. Ferenczi montre l'existence de développements S-adiques pour toute suite minimale dont la complexité est sous-linéaire (c'est-à-dire, il existe c tel que $p(n) < cn$ pour tout n). Nous rappelons que la fonction de complexité $p(n)$ d'une suite associe à tout entier n strictement positif le nombre de mots distincts de longueur n admettant une occurrence dans cette suite (nous reviendrons sur cette notion au paragraphe 0.2.6). Ce résultat, qui utilise un théorème de [61], est théorique et ne donne pas de description explicite. Bien que sa réciproque soit fausse (il existe des point fixes de substitution de complexité minorée par $cn\log(n)$, $c > 0$ [188]), peut-on caractériser les suites de complexité sous-linéaire en termes de S-adicité ? En d'autres termes, existe-t-il des conditions sur les substitutions et/ou sur les développements permettant de définir une nouvelle notion de suite S-adique équivalente à la complexité sous-linéaire ? La conjecture S-adique (voir par exemple[194]) affirme qu'il est possible d'obtenir une telle caractérisation.

Dans [100], F. Durand donne une condition suffisante de complexité sous-linéaire, la récurrence linéaire, qui est de plus équivalente à une notion restrictive de S-adicité [102]. Une suite est dite linéairement récurrente s'il existe un réel K tel que tout facteur de longueur Kn contienne nécessairement tous les facteurs de longueur n de la suite. Malheureusement, il existe des suites de complexité faible qui ne sont pas linéairement récurrentes comme les suites sturmiennes dont l'angle a un développement en fraction continue non borné [102]. Ainsi, la récurrence linéaire ne permet-elle pas d'obtenir la caractérisation souhaitée. Toutefois, cette notion s'avère utile et pertinente comme l'illustrent notamment les résultats de [100], [157] et [114] ; nous l'utiliserons d'ailleurs à plusieurs reprises dans les chapitres 4 et 5.

[7] Se reporter au paragraphe 0.1.2 pour une définition.
[8] Par analogie avec la terminologie adique introduite par A. Vershik (voir par exemple [246]).

Nous verrons dans la troisième partie de cette thèse que les expressions S-adiques sont particulièrement adaptées à l'étude des phénomènes de répétition intervenant dans les suites symboliques (voir également [208, 40]). Ceci s'explique par le fait que les substitutions "transmettent" les puissances. Enfin, les développements S-adiques semblent propices à l'introduction d'algorithmes de fractions continues multidimensionnels (voir par exemples [200, 251, 23, 86, 117, 163, 5]), produisant alors une description arithmétique des suites. C'est en particulier le cas de l'expression S-adique que nous donnons, au chapitre 1, pour les codages de rotations.

0.2.2 Systèmes de numération

Les systèmes de numération occupent une place centrale dans l'étude de la discrépance, qu'il s'agisse de suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un espace plus abstrait. Limitons nous dans un premier temps au cas des suites à valeurs dans le tore de dimension un. Il existe alors essentiellement deux méthodes pour majorer la discrépance d'une suite.

La première très générale, puisque s'appliquant en théorie à toutes les suites, repose sur l'inégalité d'Erdős-Turán [105, 106] et fait donc intervenir l'étude de sommes d'exponentielles. Très utile pour obtenir des résultats plutôt généraux, elle s'avère pourtant souvent inefficace lors de recherches plus précises. Ainsi, l'inégalité d'Erdős-Turán donne-t-elle aisément que pour un irrationnel α de type fini[9] η et tout ε positif, $D_N(n\alpha) = O(N^{-\frac{1}{\eta}+\varepsilon})$, mais ne permet pas de montrer que $D_N(n\alpha) = O(\log(N))$ lorsque les quotients partiels de α sont bornés. Ce dernier résultat, établi dans [152], nécessite l'introduction de systèmes de numération adaptés, liés au développement d'Ostrowski associé au réel α. Ce développement des entiers est associé à l'échelle de numération $(q_n)_{n\geq 0}$, où les q_n désignent les dénominateurs des convergents de α. Il est également possible d'introduire un développement analogue pour les réels ayant pour base la suite $(q_n\alpha - p_n)_{n\geq 0}$, où les p_n désignent les numérateurs des convergents du réel α (voir [39] pour un survol sur ce sujet).

La seconde méthode de majoration de la discrépance D_N d'une suite consiste à développer dans des systèmes de numération spécifiques d'une part l'entier N et d'autre part les N premiers éléments (réels) de la suite. Ainsi, retrouve-t-on toujours une complémentarité entre développement d'entiers et de réels. Par exemple, nous avons déjà remarqué l'importance et l'efficacité du développement d'Ostrowski (et des systèmes de numération associés) pour l'étude de la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$. Dans le même esprit, la plupart des constructions de suites de faible discrépance sont fondées sur l'utilisation de systèmes de numération ; par exemple, le développement binaire pour la suite de van der Corput et les développements b-adiques pour les suites de Halton ou de Faure.

L'étude de la discrépance symbolique des points fixes de substitutions primitives n'échappe pas à cette règle. C'est pourquoi nous devons également introduire un système de numération adapté qui nous permettra à la fois de développer les entiers et les points fixes de substitutions (jouant ici le rôle des réels). Ce système est introduit par J.-M. Dumont et A. Thomas [92] sous une forme classique. Dans [205], G. Rauzy en donne une version plus visuelle à l'aide de l'automate des préfixes. C'est ce point de vue que nous avons choisi d'adopter.

Définition 0.2.3. *Considérons une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A}$ et notons $Pref_\sigma$ le sous ensemble de $\mathcal{A}^*$ formé des préfixes stricts des images par σ des éléments de $\mathcal{A}$. L'automate des préfixes associé à la substitution σ est défini de la façon suivante :*

[9] Se reporter au paragraphe 0.1.1 pour une définition du type.

- $\mathcal{A}$ *est l'ensemble des états de l'automate,*
- $Pref$ *est l'ensemble des étiquettes,*
- *il existe une flèche de l'état a vers l'état b étiquetée par le mot m si mb est un préfixe de $\sigma(a)$.*

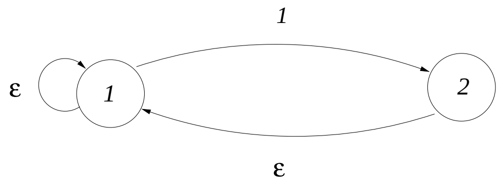


FIG. 1 – Automate des préfixes associé à la substitution de Fibonacci, $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 1$.

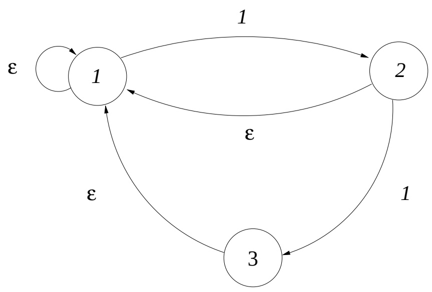


FIG. 2 – Automate des préfixes associé à la substitution de Tribonacci, $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$.

Un chemin étiqueté $\mathcal{C}$ reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ sera noté sous la forme

$$((i_0, i_1, E_0), (i_1, i_2, E_1), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))\,,$$

$i_j \in \mathcal{A}$ pour $0 \leq j \leq n$, $E_j \in Pref_\sigma$ pour $0 \leq j \leq n-1$. On appellera suite des étiquettes associée au chemin $\mathcal{C}$ la suite $(E_0, E_1, \ldots, E_{n-1})$. Le principal théorème concernant l'automate des préfixes associé à un point fixe de substitution est le suivant :

Théorème 0.2.4 (Dumont et Thomas [92], Rauzy [205]). *Conservons les notations de la définition 0.2.3 et supposons de plus qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(a)$ commence par a et $|\sigma(a)| \geq 2$. Notons alors X_σ l'unique point fixe de σ commençant par a. Alors, pour tout entier N, il existe un unique chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_σ, partant de a et étiqueté par la suite $(E_0, E_1 \ldots E_n)$ tel que $E_0 \neq \varepsilon$ et $X_N = \sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\ldots E_n$, où X_N désigne le préfixe de longueur N de la suite X_σ.*

La suite finie X_N se développe donc en $\sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\ldots E_n$, ce qui permet de définir également un développement de l'entier N sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |\sigma^k(E_{n-k})|$. Ce système de numération généralisé consitue l'outil principal utilisé dans l'étude, menée au chapitre 3, des problèmes de répartition des systèmes substitutifs. De plus, l'automate des préfixes offre une dimension visuelle, agréable pour comprendre les conditions sofiques intervenant dans ces développements.

Il est naturel de se demander si cette description des entiers ne correspond pas pour certaines substitutions à des développements classiques. Un premier élément de réponse est apporté par les

auteurs de [92] qui remarquent que :
- si la substitution est de longueur constante égale à l, on retrouve l'écriture des entiers en base l,
- dans le cas de la substitution de Fibonacci, on retrouve la numération associée à l'échelle de Fibonacci $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- dans le cas de la substitution de Tribonacci, on retrouve la numération associée à l'échelle de Tribonacci.
Une suite sturmienne caractéristique[10] est laissée invariante par une substitution non triviale si et seulement si son angle est quadratique et son développement en fraction continue satisfait à une condition combinatoire suplémentaire [69] (voir également [250, 189, 35] pour le cas des suites sturmiennes non caractéristiques). Dans ce cas, les auteurs de [69] exhibent de plus la substitution (sous-entendue la plus simple) laissant la suite invariante. Une propriété remarquable est que le développement associé à une telle substitution correspond exactement au développement d'Ostrowski ayant pour base l'angle de la suite sturmienne [4]. Ainsi, il semble que lorsque la substitution est dotée d'un caractère arithmétique clair, la numération obtenue soit parfaitement naturelle. Une explication de ce phénomène vient sans doute du fait que l'on utilise, comme pour les développements classiques, l'algorithme "glouton".

Un autre aspect intéressant, qu'il serait bon d'approfondir, est la possibilité de définir à l'aide de l'automate des préfixes une numération sur les réels, duale en quelque sorte de celle définie pour les entiers. Le développement d'un réel correspond cette fois à la donnée d'un chemin infini dans l'automate. Là encore, certains liens avec des numérations classiques sont déjà établis dans [92] sur quelques exemples.

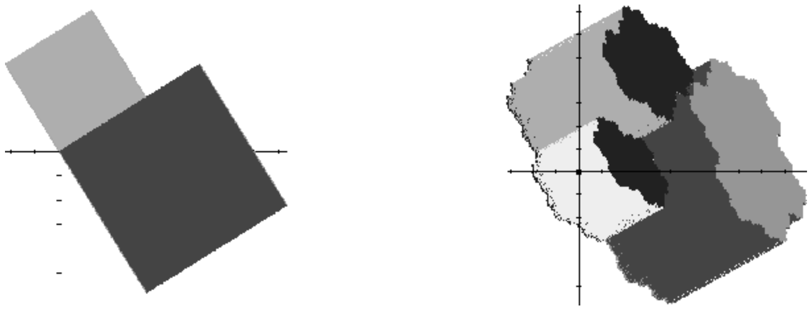


FIG. 3 – Partitions de Markov associées respectivement, aux matrices d'incidence des substitutions de Fibonacci, $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 1$, et de Tribonacci, $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$.

Pour les substitutions de type Pisot qui vérifient une condition suplémentaire, dite de Parry, le développement des réels correspond au β-développement[11] associé au nombre de Pisot et il est possible d'obtenir des théorèmes de Galois (c'est-à-dire, caractériser les développements purement périodiques) à l'aide de l'automate des préfixes (voir [138, 141, 140, 10, 11, 37] pour des résultats dans cette direction). On obtient ainsi qu'un élément x de $[0, 1[$ admet un β-développement purement périodique si et seulement si $(x, x_1, x_2, \ldots, x_d)$, les x_i désignant les conjugués de Galois de x, appartient à un sous-ensemble compact de $[0, 1[\times \mathbb{C}^d$. Les ensembles décrivant les réels dont le développement est purement périodique sont de plus similaires aux partitions de Markov explicites obtenues, toujours à l'aide de l'automate des préfixes, pour certains automorphismes définis par la

[10] Se reporter au paragraphe 0.2.6 pour une définition.
[11] Ces développements ont été introduits par A. Rényi dans [206].

matrice d'incidence de substitutions de type Pisot (voir [170, 222]). Deux exemples de telles partitions sont représentés sur la figure 3. Enfin, l'automate des préfixes, ainsi qu'une généralisation introduite dans [56], intervient également dans la représentation géométrique des systèmes substitutifs (voir [202, 170, 55, 222]).

0.2.3 Représentations géométriques des systèmes substitutifs

Les systèmes dynamiques symboliques jouent un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques généraux et en particulier des systèmes géométriques. En effet, étant donné un système dynamique géométrique (X, T, μ) et P une partition (finie) mesurable de X, il est alors possible de leur associer un système symbolique. Il suffit d'introduire l'ensemble des suites obtenues comme codages naturels des orbites, sous l'action de T, des éléments de X par rapport à la partition P, puis de considérer le sous-shift engendré par ces suites. Sous certaines hypothèses générales sur le système (X, T, μ) et la partition P, ce système symbolique est métriquement isomorphe au système géométrique initial. Au-delà de ce type de constructions, les dynamiciens et en particulier les ergodiciens ont rapidement compris que de tels systèmes abstraits offraient une ressource quasiment inépuisable d'exemples de systèmes dynamiques "simples". Ainsi, les premiers exemples de systèmes ayant telle propriété ou au contraire ne satisfaisant pas à telle autre ont souvent (presque systématiquement) été fournis par des systèmes dynamiques symboliques, à tel point que leur étude est considérée comme une théorie à part entière, la dynamique symbolique.

Une classe importante de systèmes symboliques d'entropie nulle est donnée par les systèmes substitutifs primitifs que nous avons définis au paragraphe 0.2.1. Ils sont suffisamment réguliers pour permettre d'établir de nombreux résultats tels que l'absence de mélange fort [82], l'unique ergodicité [171, 172], ou la continuité des fonctions propres [132] (voir également [195] pour d'autres résultats spectraux). On peut alors se demander si ces systèmes sont réellement nouveaux ou au contraire si ce sont des systèmes géométriques classiques "déguisés". Par exemple, tout sytème associé à une suite sturmienne d'angle quadratique est substitutif et métriquement isomorphe à une rotation du tore de dimension 1 [176]. Donner une représentation géométrique consiste à exhiber un isomorphisme métrique entre le système symbolique initiale et un système géométrique, en obtenant si possible une construction explicite de l'isomorphisme (voir [194], chap. 7).

Propriétés spectrales et représentations géométriques sont liées par le résultat suivant de J. von Neumann : un système, inversible et ergodique, à spectre discret est métriquement isomorphe à une translation minimale sur un groupe compact abélien muni de la mesure de Haar. En particulier, il est conjecturé que tout système substitutif de type Pisot est à spectre discret et que dans ce cas le groupe est un tore de dimension $d-1$ lorsque la substitution compte d lettres. Le premier résultat significatif dans cette direction (si l'on omet celui plus ancien de [176]) est dû à G. Rauzy [202]. Il montre que le système dynamique associé à la substitution de Tribonacci[12], définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$, est isomorphe en mesure à une rotation sur le tore de dimension 2. La construction de cette représentation fait apparaître des ensembles compacts à frontière fractale qui sont des ensembles à restes bornés pour les suites de Kronecker associées à cette rotation. La réunion de ces ensembles est depuis appelée fractal de Rauzy (une description détaillée en est donnée au paragraphe suivant). Plus généralement, des constructions similaires sont données pour les substitutions de type Pisot [19, 57] ; nous montrerons au chapitre 3 (voir aussi [3]) qu'elles produisent de même des ensembles à restes bornés pour les rotations associées. Une méthode analogue de construction d'ensembles fractals à partir de substitutions est introduite dans

[12]Ce nom est donné par analogie avec la substitution de Fibonacci.

[80] et permet également de retrouver ces ensembles (voir [139]) ainsi que le pavage de Penrose. Une autre représentation géométrique des substitutions ne faisant pas intervenir la condition Pisot mais une condition moins restrictive[13] est présentée dans [130].

Il est également possible de représenter explicitement tout système substitutif primitif (et même une classe un peu plus large comme le montre [88]) comme une transformation de l'intervalle. Cette représentation bien qu'un peu abstraite peut être considérée comme géométrique ou du moins comme plus "visuelle" que la représentation symbolique. Elle est de plus très générale comme l'illustre le résultat principal de [22]. Cette construction est basée sur une méthode dite de couper-empiler (cutting-stacking pour les anglophones) ; on parle également de représentation par tours de Rokhlin. Elle a l'avantage de permettre d'exhiber certaines propriétés ergodiques de ces systèmes (voir [111, 113] ou [194]). De plus, de tels systèmes s'avèrent performants pour obtenir des suites de faible discrépance à valeurs dans $[0,1[$. Par exemple, les orbites d'un système simplement représenté (en l'occurrence à l'aide de la substitution définie par $\sigma(1) = 11$) comme celui associé à la transformation de von Neumann-Kakutani[14] (voir figure 4) correspondent à des suites de van der Corput.

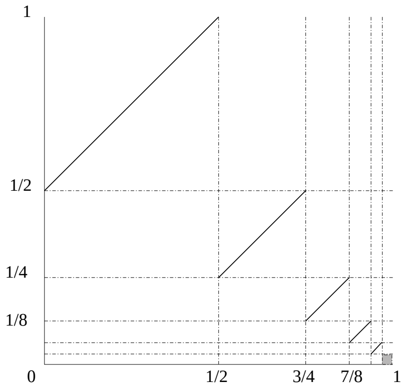


FIG. 4 – Graphe de l'application de von Neumann-Kakutani.

Une généralisation immédiate permet (en considérant la substitution définie par $\sigma(1) = 1^d$) de définir un système dont les orbites sont des suites de Halton en base d (voir [154] et [88]). Il semble également possible de définir par des règles simples (en utilisant non pas une substitution mais plusieurs) un système sur l'intervalle dont les orbites sont des suites de Faure de dimension un ; nous rappelons que ce sont les suites de plus faible discrépance connues actuellement [108]. Il serait évidemment intéressant de généraliser ces constructions, ainsi que leurs relation avec les suites de faible discrépance, à des dimensions supérieures.

Un des intérêts de toutes les représentations géométriques que nous venons d'évoquer est de permettre de traduire les résultats obtenus au chapitre 3 sur la discrépance symbolique des systèmes substitutifs, en terme de répartition pour des suites plus naturelles (c'est-à-dire à caractère arithmétique ou géométrique). Ainsi, par exemple, le fait que la fonction de discrépance symbolique d'une substitution de type Pisot soit bornée (propriété *a priori* plutôt abstraite) permet de déduire que les composantes du fractal de Rauzy associé sont des ensembles à restes bornés pour les suites de Kronecker sous-jacentes (propriété arithmétique et géométrique). L'avantage avec les problèmes de répartition symbolique est que le cardinal de l'alphabet n'est pas un facteur de complexité, alors

[13] Il suffit que la matrice d'incidence de la substitution admette une valeur propre de module strictement inférieur à un.

[14] Cette transformation a été introduite par J. von Neumann dans [247] et étudié ensuite par S. Kakutani [143].

qu'il est beaucoup plus difficile d'étudier des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ qu'à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Passer par une représentation symbolique élimine en partie ces problèmes de dimension. Notons enfin, que les représentations des substitutions ne donnent pas toujours des systèmes définis sur l'intervalle, sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Au vu du théorème de J. von Neumann, nos résultat peuvent s'appliquer également à la répartition de suites issues par exemple de translations sur un groupe compact abélien plus abstrait. En particulier, le système substitutif associé à la substitution de Morse, $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 21$, est isomorphe à une extension à deux points d'une translation (l'addition de 1) sur le groupe $\mathbb{Z}_2$ des entiers 2-adiques (voir [194] ou [88] pour ce résultat ainsi qu'une représentation par tours de Rokhlin de la substitution de Morse). Notre approche permet notamment de retrouver certains ensembles à restes bornés pour cette transformation.

0.2.4 Un exemple représentatif : le fractal de Rauzy

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté plusieurs idées de représentations géométriques des systèmes substitutifs. Nous proposons à présent de détailler l'une d'entre elles, associée à la substitution de Tribonacci.

Dans [202], G. Rauzy introduit une substitution, appelée substitution de Tribonacci, généralisant les propriétés dynamiques, arithmétiques et géométriques de la substitution de Fibonacci. Cette substitution est définie sur un alphabet à trois lettres par

$$\sigma(1) = 12, \;\; \sigma(2) = 13 \;\text{ et }\; \sigma(3) = 1,$$

sa matrice d'incidence est $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique est $x^3 - x^2 - x - 1$. Ce polynôme admet une unique racine réelle strictement supérieure à un, notée θ, et deux racines complexes conjuguées de module strictement inférieur à un, que nous noterons α et $\overline{\alpha}$. Ainsi, θ est-il un nombre de Pisot et l'on dit que σ est une substitution de type Pisot. Le mot de Tribonacci, noté U, est l'unique point fixe de σ défini par $U = \sigma^\infty(1)$. Le but de la représentation géométrique que nous allons donner pour la substitution de Tribonacci est de prouver qu'il existe un isomorphisme métrique entre le système substitutif $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T, \mu)$, où μ désigne l'unique mesure invariante par T, et une rotation de $\mathbb{T}^2$ (muni de la mesure de Haar). Les résultats que nous présentons ici sont issus pour l'essentiel de [202].

L'unique vecteur propre normalisé associé à la valeur propre dominante θ est noté v_f et est égal à $\begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \\ \frac{1}{\theta^3} \end{pmatrix}$. Il correspond au vecteur associé aux fréquences des lettres dans le mot de Tribonacci. Notons alors pour tout entier n,

$$\delta(n) = n \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |u_0u_1 \ldots u_{n-1}|_1 \\ |u_0u_1 \ldots u_{n-1}|_2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que le formalisme introduit au paragraphe 0.1.2, conduit pour tout entier n à l'égalité :

$$|\delta(n)|_\infty = \Delta_n(U).$$

Le fait que σ soit une substitution de type Pisot implique que sa fonction de discrépance $\Delta_n(U)$ est bornée (voir chapitre 3). Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ est alors défini comme le compact obtenu en prenant l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ de l'ensemble $\{\delta(n), \;\; n \in \mathbb{N}\}$ (voir figure 5).

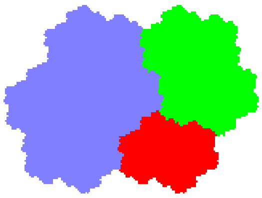


FIG. 5 – Le fractal de Rauzy et ses trois composantes.

Nous pouvons également donner une approche géométrique peut-être plus intuitive, bien que rigoureusement équivalente, de cette construction (voir figure 6). Considérons la ligne brisée de $\mathbb{R}^3$ obtenue en remplaçant successivement les lettres de U par le vecteur d'indice correspondant dans la base canonique. Alors, cette ligne "s'enroule" asymptotiquement autour de la droite portée par le vecteur v_f. En effet, le fait que chaque lettre de la suite U admette une fréquence et que le vecteur

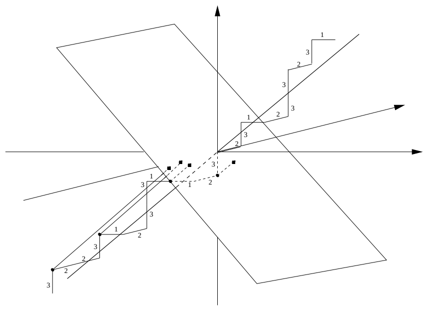


FIG. 6 – La méthode de projection pour obtenir le fractal de Rauzy.

de fréquence associé soit égal à v_f (ce qui est assuré par la primitivité de σ, voir par exemple [195]), implique que la suite $\left(\frac{\delta(n)}{n}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Ici, le résultat est en fait beaucoup plus précis ; comme $\Delta_n(U)$ est bornée, il en est de même de la distance entre la ligne brisée et la droite dilatante. Ainsi, en projetant les sommets de la ligne brisée parallèlement à v_f sur l'hyperplan affine contractant (plongé dans $\mathbb{R}^2$) associé à M_σ, on obtient un ensemble borné qui est l'image par une similitude de l'ensemble $\{\delta(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

En définissant, pour $1 \leq i \leq 3$, les trois sous-ensemble de $\mathcal{R}$ suivant

$$\mathcal{R}_i = \overline{\left\{ n \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |u_0 u_1 \dots u_{n-1}|_1 \\ |u_0 u_1 \dots u_{n-1}|_2 \end{pmatrix},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ u_n = i \right\}},$$

on obtient que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$ et que cette union est disjointe en mesure (voir figure 5). Les ensembles $\mathcal{R}_i$ sont appelés composantes du fractal de Rauzy. De manière équivalente, il est possible de définir trois autres sous-ensembles de $\mathcal{R}$ par :

$$\mathcal{R}'_i = \overline{\left\{ n \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |u_0 u_1 \dots u_{n-1}|_1 \\ |u_0 u_1 \dots u_{n-1}|_2 \end{pmatrix},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ u_{n-1} = i \right\}}.$$

Le système substitutif $\mathcal{X}$ associé à la substitution de Tribonacci est alors métriquement isomorphe à un échange de morceaux E défini sur $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire que E définit une translation sur chaque morceau $\mathcal{R}_i$), de sorte que $E(\mathcal{R}_i) = \mathcal{R}'_i$ (voir figure 7).

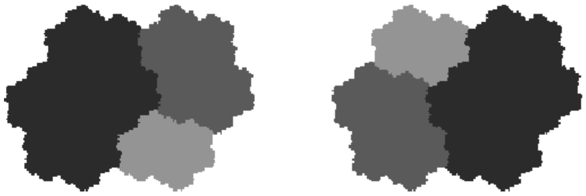


FIG. 7 – L'échange de morceaux E associé au fractal de Rauzy.

L'étape suivante consiste à prouver que le fractal de Rauzy est un domaine fondamental de $\mathbb{R}^2$ associé au réseau classique $\mathbb{Z}^2$. Ce résultat peut sembler surprenant compte tenu de l'apparente complexité de l'ensemble $\mathcal{R}$; on s'en convaincra tout de même au vu de la figure 8. Ceci a une conséquence importante : les trois vecteurs de translation intervenant dans la transformation E sont identiques modulo $\mathbb{Z}^2$. Ainsi, on peut prouver que la translation de vecteur $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{T}^2$ est isomorphe à l'échange E considéré modulo $\mathbb{Z}^2$. Plus précisément, cela signifie que si x est le représentant dans $\mathcal{R}$ de l'élément $\overline{x}$ de $\mathbb{T}^2$, alors $E(x)$ est le représentant dans $\mathcal{R}$ de l'élément $\overline{x+\eta}$. Pour la suite de Kronecker $\left(\left\{n+\frac{1}{\theta}\right\}, \left\{n+\frac{1}{\theta^2}\right\}\right)_{n\geq 0}$, ceci implique que dans $\mathbb{T}^2$ les ensembles $\overline{\mathcal{R}_i}$ sont des ensembles à restes bornés.

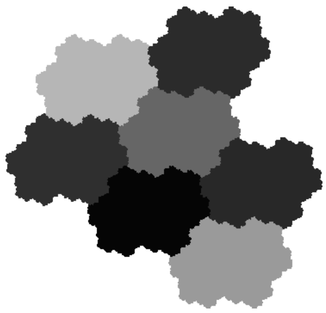


FIG. 8 – Le pavage périodique du plan engendré par le fractal de Rauzy.

En particulier, on obtient que le système substitutif associé à la substitution de Tribonacci est à spectre discret, donné par $\left\{e^{2\pi i r},\ r \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{\theta}\right] + \mathbb{Z}\left[\frac{1}{\theta^2}\right]\right\}$ (puisqu'il est isomorphe à la translation de vecteur η sur $\mathbb{T}^2$). Introduisons, pour tout facteur $w = w_1 w_2 \dots w_k$ de la suite U, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{R}_w} = \left\{x \in \mathbb{T}^2,\ x + j\eta \in \overline{\mathcal{R}_{w_j}},\ 1 \leq j \leq k\right\}.$$

Au chapitre 3, nous montrerons que la fonction de discrépance $D_N(\mathcal{X})$ associée au système substitutif de Tribonacci est bornée ; ce résultat implique non seulement que pour tout facteur w de U, $\overline{\mathcal{R}_w}$ est un ensemble à restes bornés pour la suite de Kronecker $\left(\left\{n+\frac{1}{\theta}\right\}, \left\{n+\frac{1}{\theta^2}\right\}\right)_{n\geq 0}$, mais également la propriété plus forte suivante :

$$\left\{\overline{\mathcal{R}_w},\ w \in \mathcal{L}(U)\right\}$$

est une famille d'ensemble à restes uniformément bornés (voir définition 0.1.7). Ceci permet ensuite de retrouver les valeurs propres de ce système à l'aide du théorème 0.1.9 et produit ainsi une démonstration courte du fait que la rotation de vecteur η est un facteur du système symbolique associé à σ (voir [194]).

Enfin, rappelons brièvement certaines propriétés du fractal de Rauzy : $\mathcal{R}$ est simplement connexe [202], la dimension de Hausdorff de sa frontière peut être calculée et est strictement supérieure à 1 [139], et sa frontière est un quasi-cercle [170]. De plus, la plupart des résultats de ce paragraphe peuvent être étendus, sous certaines conditions, aux substitutions de type Pisot (voir [55, 222, 57, 19]).

Ce procédé de représentation géométrique est aujourd'hui assez bien compris pour les sytèmes substitutifs de type Pisot. Il lie, comme nous venons de le constater, substitutions de type Pisot, rotations toriques et ensembles à restes bornés. De telles représentations restent en revanche plus obscures pour les substitutions primitives de type Salem (c'est-à-dire pour lesquelles la deuxième valeur propre de la matrice d'incidence, par ordre de module décroissant, est de module un). Nous allons maintenant présenter sur un exemple une ébauche du travail qui pourrait être accompli dans ce cas.

Considérons la substitution primitive ξ définie sur l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ par :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1112455 \\ 2 &\longmapsto 111255 \\ 3 &\longmapsto 1123455 \\ 4 &\longmapsto 23445 \\ 5 &\longmapsto 123455 \end{aligned}$$

La matrice M_ξ admet le polynôme $(x-1)^2(-x^3+7x^2-5x+1)$ comme polynôme minimal. Ainsi, la valeur propre dominante de M_ξ est un nombre de Pisot, mais la substitution n'est pas de type Pisot à cause de la valeur propre double 1. En utilisant la méthode de la ligne brisée (voir figure 6), décrite précédemment, et en projetant cette fois sur le plan contractant associé à M_ξ (qui est de dimension deux), on obtient un fractal de Rauzy $\mathcal{R}_\xi$, composé de cinq morceaux. Le système substitutif associé à ξ est de plus métriquement isomorphe à un échange de cinq morceaux E_ξ, représenté sur les figures 9 et 10 (car il vérifie une condition combinatoire, dite de coïncidence).

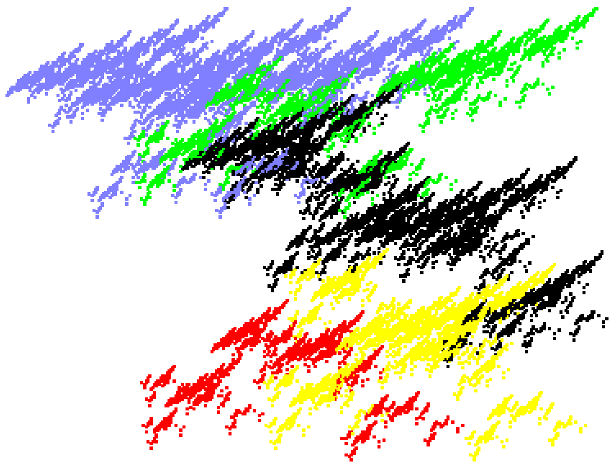


FIG. 9 – Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}_\xi$.

Bien que la situation puisse paraître semblable à celle rencontrée précédemment, il n'y a aucune chance pour que cet échange de cinq morceaux donne, comme dans le cas du fractal de Rauzy, une rotation de $\mathbb{T}^2$. En effet, les composantes du fractal de Rauzy associé à ξ n'étant pas des ensembles à restes bornés pour l'échange de morceaux, le théorème 0.1.10 interdit à E_ξ "d'être une rotation".

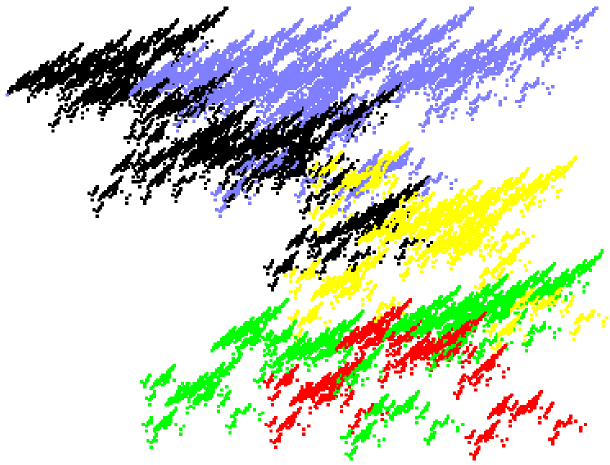


FIG. 10 – L'image par E_ξ de $\mathcal{R}_\xi$.

Toutefois, il semble raisonnable de croire (voir [104] pour un exemple de situation similaire) qu'il existe une rotation de $\mathbb{T}^2$ de paramètres appartenant à un corps cubique et dont l'application induite sur $\mathcal{R}_\xi$ est égale à E_ξ. Nous pouvons de plus montrer, en appliquant les résultats du chapitre 3, que si U désigne le point fixe de ξ alors

$$\Delta_N(U) = \Omega(\log^2 N) \ \text{ et } \ \Delta_N(U) = O(\log^2 N).$$

Ce résultat symbolique pourrait alors être interprété géométriquement de la manière suivante : les composantes de $\mathcal{R}_\xi$, qui sont des ensembles compacts d'intérieur non vide, seraient des ensembles avec une discrépance locale à la fois en $\Omega(\log^2 N)$ et en $O(\log^2 N)$ pour une rotation de $\mathbb{T}^2$. La valeur $\log^2 N$ est particulièrement intéressante puisqu'il est attendu qu'une rotation de $\mathbb{T}^2$, dont les paramètres appartiennent à un corps cubique, ait une discrépance en $O(\log^2 N)$.

0.2.5 Équilibre des suites symboliques

Un mot, fini ou infini, défini sur un alphabet $\mathcal{A}$ est dit équilibré si, pour tout couple (w, w') de facteurs de même longueur, l'inégalité $||\omega|_a - |\omega'|_a| \leq 1$ est vérifiée pour toute lettre a. Cette notion apparaît pour la première fois dans les articles de M. Morse et G. A. Hedlund [175, 176] publiés en 1938 et 1940. Ils prouvent en particulier que toute lettre d'un mot infini équilibré admet une fréquence. Dans [68], E. M. Coven et G. A. Hedlund caractérisent les mots infinis sturmiens en termes d'équilibre : ce sont exactement les mots binaires non ultimement périodiques et équilibrés. Plus récemment, P. Hubert [135] (voir également un résultat très proche et antérieur de R. L. Graham [122]) montre que suites sturmiennes et suites équilibrées définies sur un alphabet à trois lettres ou plus, sont intimement liées ; il donne de plus une caractérisation géométrique simple de ces dernières. Le théorème de E. M. Coven et G. A. Hedlund (Théorème 0.2.7 au paragraphe suivant) a évidemment motivé l'introduction de généralisations de la notion d'équilibre. Par exemple, V. Berthé and R. Tijdeman [41] étudient les propriétés d'équilibre de mots multi-dimensionnels et obtiennent que les mots équilibrés multi-dimensionnels sont périodiques. Une autre généralisation possible, considérée par I. Fagnot et L. Vuillon dans [107] pour les mots sturmiens, consiste à remplacer les occurrences des lettres par des occurrences de mots dans la définition classique. Un autre aspect important de cette théorie provient de la conjecture de Frankel qui stipule qu'il n'existe qu'un seul mot équilibré, à permutation des lettres près, défini sur un alphabet de cardinal

m supérieure ou égale à trois et dont les lettres admettent toutes des fréquences distinctes. Des preuves des cas $m = 3, 4, 5, 6$ figurent dans [174, 17, 238, 239]. Notons enfin qu'en informatique théorique, cette question intervient dans les problèmes d'optimisation pour des réseaux de files d'attente (voir par exemple [120]).

Les résultats évoqués précédemment mettent en relief le fait que la propriété d'équilibre est très rigide et réellement contraignante. Il s'agit certainement d'une des raisons pour lesquelles les mathématiciens ont été amenés à rendre cette notion plus flexible. Une approche fructueuse, notamment du point de vue de la théorie ergodique et de la théorie des nombres, semble venir de l'extension de la propriété d'équilibre à celle plus souple de C-équilibre en imposant $||\omega|_a - |\omega'|_a| \leq C$, pour toute lettre a. Nous montrerons au chapitre 3 que cette notion est profondément liée à celle d'ensemble à restes bornés et qu'elle en est d'une certaine façon l'équivalent symbolique. Ceci est notamment illustré par les exemples suivants. Considérons une rotation du tore $\mathbb{T}^n$, un domaine fondamental de $\mathbb{R}^n$, Ω, et une partition $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n$, telle que l'application induite[15] par la rotation sur chaque Ω_i soit une translation. Un *codage naturel de rotation* est le codage (naturel) d'une rotation par rapport à une telle partition. Le théorème 0.1.10 implique que dans ces conditions les ensembles Ω_i sont des ensembles à restes bornés pour la rotation (voir également [110] pour une réciproque). Cette propriété se traduit symboliquement par le fait qu'un codage naturel de rotation doit être C-équilibré (pour un certain C). Il a longtemps été pensé qu'une suite d'Arnoux-Rauzy (voir [23]) devait être le codage naturel d'une rotation sur le tore de dimension deux. Les auteurs de [63] ont invalidé cette conjecture en exhibant une suite d'Arnoux-Rauzy totalement déséquilibrée (à savoir, qui n'est C-équilibrée pour aucun C), ce qui, au passage, a produit un contre-exemple au fait que toute suite épisturmienne devait être 2-équilibrée (voir [90]). Dans le même esprit, il est conjecturé que tout système dynamique symbolique associé à une substitution de type Pisot est isomorphe en mesure à une rotation minimale sur un tore (voir par exemple [202, 19, 57]). Le fait qu'un point fixe d'une substitution de type Pisot soit C-équilibré (voir chapitre 3) intervient pleinement ici, toujours au vu du théorème 0.1.10.

De même que l'étude de la complexité n'est pas réduite à celle des suites périodiques, sturmiennes ou quasi-sturmiennes, nous n'avons pas voulu restreindre notre étude à celle des mots équilibrés ou C-équilibrés. Pour cela, nous introduisons une mesure de l'équilibre d'une suite permettant de généraliser les propriétés d'équilibre et de C-équilibre.

Définition 0.2.5. *Soit U un mot infini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. La fonction d'équilibre associée à U est définie par :*

$$B_U(n) = \max_{a \in \mathcal{A}} \max_{w, w' \in \mathcal{L}_n(U)} \left\{ \left| |w|_a - |w'|_a \right| \right\}.$$

Nous introduisons également une autre fonction qui généralise la notion d'équilibre introduite dans [107] et qui peut être vue comme mesure uniforme de l'équilibre d'une suite.

Définition 0.2.6. *Soit U un mot infini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. La fonction d'équilibre généralisée associée à U est définie par :*

$$\mathcal{B}_U(n) = \max_{u \in \mathcal{L}(U)} \max_{w, w' \in \mathcal{L}_n(U)} \left\{ \left| |w|_u - |w'|_u \right| \right\}.$$

Au chapitre 3 (voir également [1]), nous étudions les liens qu'entretiennent ces deux fonctions avec les fonctions de discrépance symbolique définies au paragraphe 0.1.3. Nous montrons que lorsque la

[15] Voir paragraphe 0.1.2 pour une définition.

suite U est point fixe d'une substitution primitive, ces liens sont très clairement établis. Cela nous permet de déduire de nos résultats sur les fonctions de discrépance l'ordre de grandeur des fonctions d'équilibre des point fixes de substitutions primitives. Ce travail plutôt qualitatif est à rapprocher de celui de [188] concernant la fonction de complexité. Toutefois, nous montrons également qu'il est possible d'obtenir, au moins sur de nombreux exemples, des résultats bien plus précis, soulignant ainsi un aspect plus quantitatif de notre étude.

0.2.6 Une généralisation géométrique des suites sturmiennes : les codages de rotations

La fonction de complexité p d'une suite associe à chaque entier n le nombre $p(n)$ de facteurs de longueurs n de la suite. L'entropie topologique[16] du sous-shift associé à une suite symbolique est alors égale à $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(p(n))}{n}$. La complexité est donc une notion plus fine que l'entropie topologique qui s'avère particulièrement utile pour distinguer les systèmes d'entropie nulle ; son ordre de grandeur est également un invariant topologique (voir [194] par exemple). La complexité est ainsi considérée comme une mesure naturelle du désordre d'une suite (ou plutôt du système dynamique qui lui est naturellement associé). Notamment, elle permet de caractériser les suites ultimement périodiques (ce sont celles pour lesquelles il existe un entier n tel que $p(n) \leq n$). Les suites sturmiennes correspondent elles aux suites non ultimement périodiques les plus ordonnées (au sens de la complexité) et sont définies comme les suites dont la fonction de complexité vérifie $p(n) = n+1$ pour tout entier n. Elles fournissent certainement l'exemple le plus riche d'interactions entre la combinatoire, la théorie des nombres, la dynamique symbolique et la géométrie, comme l'illustrent les nombreuses recherches consacrées à ce sujet (voir par exemple [164]). Ainsi, les suites sturmiennes peuvent être caractérisées aussi bien de façon combinatoire (par définition) que par des propriétés d'équilibre de leur langage (ce sont exactement les suites binaires non ultimement périodiques équilibrées [68]) ou des propriétés géométriques. Cette dernière caractérisation, sans doute la plus célèbre et la plus spectaculaire, est due à M. Morse et G. A. Hedlund [176] et peut s'énoncer comme suit :

Théorème 0.2.7 (Morse-Hedlund). *Soit u une suite sturmienne définie sur l'alphabet $\{1,2\}$. Il existe alors un unique couple (α, x) appartenant à l'ensemble $]0,1[\times[0,1[$ tel que l'on ait :*
soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n = 1 \iff \{x + n\alpha\} \in [0, 1-\alpha[),$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n = 1 \iff \{x + n\alpha\} \in]0, 1-\alpha]).$$

Un autre résultat remarquable montre que la connaissance du développement en fraction continue de l'angle d'une suite sturmienne permet d'engendrer son langage (voir par exemple [23] ainsi que le résultat plus précis de [18]).

Théorème 0.2.8. *Soit u une suite sturmienne associée au couple $(\alpha, x=0)$. Si le développement en fraction continue de α est $[0; a_1+1, a_2, \ldots a_n, \ldots]$, alors*

$$u = \lim_{n\to\infty} \tau_1^{a_1} \circ \tau_2^{a_2} \ldots \tau_1^{a_{2n+1}}(1),$$

[16] La notion d'entropie topologique a été introduite en 1965 par R. L. Adler, A. G. Konheim et M. H. McAndrew [9].

où les substitutions τ_1 et τ_2 sont définies par : $\begin{array}{ccc} & \tau_1 & \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 21 \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccc} & \tau_2 & \\ 1 & \longmapsto & 12 \\ 2 & \longmapsto & 2 \end{array}$.

De nombreuses propriétés combinatoires des suites sturmiennes peuvent être obtenues à l'aide de ce théorème. Ce formalisme n'étant pas usité de tous, certains préfèreront parler de règles de concaténation ou de règles standard (voir par exemple [52, 53, 164, 194]) mais ces différentes appellations (ou visions) partagent les même idées. En particulier, une telle expression (on parlera d'expression S-adique des suites sturmiennes) s'avère très agréable pour traiter les problèmes de répétitions que nous évoquerons au paragraphe 0.2.7 (voir par exemple [243, 118, 14]).

L'intérêt porté aux suites sturmiennes a donné lieu à un nombre important de généralisations unidimensionnelles ou multidimensionnelles, citons entre autres [209, 23, 90, 135, 60, 20, 21, 24, 133, 134, 12, 85, 86, 87, 117, 178, 62, 42, 43, 44]. Parmi ces nombreuses généralisations, l'une d'entre elles, tout à fait naturelle au vu du Théorème 0.2.7, intervient dans les problèmes de répartition pour les suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$. Il s'agit des codages binaires de rotations[17] (voir [12, 86, 87]).

Définition 0.2.9. *Étant donné un triplet (α,β,x) appartenant à $[0,1[^3$, on appelle codage de rotation de paramètres (α,β,x) la suite symbolique $U=(u_n)_{n\geq 0}$ définie sur l'alphabet $\{1,2\}$ par :*

$$u_n = \begin{cases} 1 & si\ \{x+n\alpha\} \in [0,\beta[, \\ 2 & sinon. \end{cases}$$

Le codage de rotation de paramètre (α,β,x) est ainsi obtenu en codant l'orbite de x sous l'action de la rotation d'angle α par rapport à la partition du tore en deux intervalles $[0,\beta[$ et $[\beta,1[$. Le cas où α est rationnel ne présente que peu d'intérêt, car le codage est alors périodique, et ne sera donc pas considéré dans ce qui suit. Lorsque $\alpha=\beta$ ou $\alpha=1-\beta$, le codage définit une suite sturmienne et plus généralement, le cas où $\beta \in \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ correspond à des suites quasi-sturmiennes (voir [126] pour un résultat réciproque).

Définition 0.2.10. *Une suite est dite quasi-sturmienne s'il existe un entier k tel que pour tout entier n, sa fonction de complexité vérifie $p(n)\leq n+k$.*

Il est également prouvé dans [209], que les autres codages (ceux pour lesquels $\beta \notin \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$) vérifient $p(n)=2n$ pour tout entier n suffisamment grand.

Un point important, abordé au chapitre 1, est que l'application induite d'une rotation d'angle α sur un intervalle $[0,\beta[$, tel que $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ et $\alpha<\beta$, est une transformation très particulière, à savoir un échange de trois intervalles non dégénéré (c'est-à-dire qu'il satisfait à la condition I.D.O.C. que nous rappelons dans ce même chapitre). Cette propriété lie ainsi intimement codages de rotations (non quasi-sturmiens) et échanges de trois intervalles I.D.O.C. De même sont intimement liés suites sturmiennes et échanges de deux intervalles (voir par exemple [18]). Pour plus de détails sur les notions d'échanges d'intervalles, le lecteur peut se reporter à [201, 244, 245].

Nous avons dans un premier temps considéré les codages de rotations comme un outil offrant une approche nouvelle pour nos problèmes de répartitions. Toutefois, il est naturel de se demander si les codages de rotation interagissent, aussi clairement que les suites sturmiennes, avec d'autres domaines des mathématiques. Des résultats dans cette direction sont déjà donnés dans [146, 209, 12,

[17] Comme nous considérons uniquement des codages binaires, nous parlerons simplement de codages de rotations.

86] et nous savons également que la plupart des propriétés des suites sturmiennes sont "transmises" aux suites quasi-sturmiennes (ce qui justifie leur appellation). Ce phénomène est expliqué par le fait qu'à un préfixe près, une suite quasi-sturmienne est l'image par une substitution d'une suite sturmienne ; le résultat, en fait un peu plus précis, est dû à E. M. Coven [67] et M. E. Paul [190]. On peut alors se demander si les codages de rotations dont les paramètres vérifient $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ sont eux aussi "quasiment" sturmiens ou au contraire si leurs comportements (arithmétiques, combinatoires ou dynamiques) diffèrent réellement de ceux observés dans le cas sturmien. Nous répondons partiellement (et plutôt négativement) à cette question en exhibant aussi bien des traits de caractères communs que des différences fondamentales. Ces éléments de comparaison seront récapitulés dans l'annexe A.

En particulier, nous obtiendrons au chapitre 1 un résultat analogue au théorème 0.2.8 qui servira de base à l'étude des codages de rotations (il s'agit là d'un point commun, mais qui nous permettra ensuite d'exhiber certaines différences). Plus précisément, nous montrons que le langage des codage de rotations non dégénérés (à savoir, pour lesquels $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$) peut être obtenu par itération de quatre substitutions définies sur un alphabet à trois lettres, puis une application de projection. L'ordre d'itération de ces applications est gouverné par un développement bidimensionnel de type "fraction continue" vérifiant un théorème de Lagrange, c'est-à-dire que le développement est ultimement périodique si et seulement si les paramètres appartiennent à un même corps quadratique. Cette description, on parlera de représentation S-adique (voir paragraphe 0.2.1) des codages de rotations, est entièrement explicite et basée sur une approche dynamique, à savoir une version multiplicative de l'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles[18]. Elle permet de plus de s'affranchir de la condition arithmétiquement peu naturelle $\alpha < \min(\beta, 1-\beta)$ imposée dans [86]. Notons également que S. Ferenczi, C. Holton et L. Q. Zamboni [117, 115, 116, 114] ont parallèlement mené une étude approfondie des échanges de trois intervalles basée sur un procédé d'induction différent. Il serait bien sûr intéressant de comprendre et d'établir les liens entre ces deux points de vue ainsi que les spécificités de chacun. Nous utiliserons cette description tout d'abord au chapitre 2, pour obtenir des résultats précis sur la discrépance locale des rotations quadratiques du cercle, puis aux chapitres 5, 6 et 7 pour étudier les phénomènes de répétitions intervenant dans les codages de rotations ainsi que leurs applications à la physique théorique (nature du spectre de certains opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels) et à la théorie des nombres (nature arithmétique de certains nombres réels). Au delà des résultats déjà établis, l'expression que nous donnons des codages de rotations devrait être un outil efficace pour appréhender d'autres questions et permettre alors une compréhension encore plus profonde de la combinatoire de cette classe de suites.

0.2.7 Répétitions, quasi-cristaux et transcendance

S'il est évident que toute suite binaire infinie contient nécessairement des carrés, c'est-à-dire une répétition du type ww, construire un suite binaire sans chevauchement (mot de la forme $awawa$) est déjà plus difficile. Le premier exemple d'une telle suite est dû à A. Thue [236] en 1906. L'exercice, alors purement combinatoire, ne connaissait aucune application particulière. Aujourd'hui la situation est radicalement différente, l'étude des répétitions intervenant dans des domaines variés et souvent inattendus. Afin d'illustrer ce propos, nous allons discuter de leur interaction dans un premier temps avec la théorie des quasi-cristaux puis avec la transcendance de certains nombres réels. Cette problématique est également largement étudiée dans [15].

[18]Pour plus de précisions sur ces procédés d'induction, voir [244, 201, 245, 252, 117].

En 1984, D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias et J. V. Cahn [221] découvrent expérimentalement l'existence de structures non périodiques mais étrangement régulières qui prirent le nom de quasi-cristaux. Ce phénomène totalement inattendu va être à l'origine de nombreuses investigations théoriques, principalement fondées sur l'étude spectrale d'opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels de potentiels le plus souvent associés à des suites binaires, "quasiment périodiques" et classiques de la combinatoire des mots (voir par exemple le survol [70]). Un opérateur de Schrödinger discret unidimensionnel est une application H de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même définie par :

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n),$$

où $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. La suite V est appelée le potentiel de l'opérateur. Par exemple, les potentiels associés à un codage de rotation de paramètres (α, β) sont donnés par :

$$V_\theta(n) = \lambda\chi_{[0,\beta)}(n\alpha + \theta \mod 1),$$

où $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$. Pour certains codages sturmiens ($\beta = \alpha$ ou $\beta = 1 - \alpha$), on obtient des modèles de quasi-cristaux standard qui sont les plus intéressants du point de vue physique. Les modèles provenant des substitutions (et en particulier des substitutions primitives) ont également été étudiés en détail. Il est attendu de l'étude spectrale de ces opérateurs qu'elle révèle un certain nombre de propriétés génériques, traduisant le comportement physique des quasi-cristaux. Dans des termes plus mathématiques, on attend généralement les trois propriétés suivantes, à savoir, la mesure spectrale de tels opérateurs est purement singulière, continue et son support est de mesure (de Lebesgue) nulle. Étant donné une suite (disons binaire), la démarche est alors la suivante :
- on considère un potentiel, qui lui est associé,
- puis, on essaie de montrer les trois propriétés standard pour l'opérateur de Schrödinger sous-jacent.

Le fait que la mesure spectrale soit continue et totalement singulière est connu pour un grand nombre de potentiels (voir [151] et [155]), mais la troisième caractéristique est plus délicate à obtenir. Elle n'est d'ailleurs pas encore connue pour tous les potentiels issus de codages de rotations (voir [7]). Dans le cas des potentiels sturmiens, l'existence de répétitions est un élément clé pour obtenir cette propriété. Plus exactement, il faut utiliser le fait (voir par exemple [14, 71, 40]), qu'une suite sturmienne commence par des carrés arbitrairement longs. Une autre notion importante ici est la récurrence linéaire. Nous rappelons qu'une suite est dite linéairement récurrente s'il existe un réel K tel que tout facteur de longueur Kn contienne nécessairement tous les facteurs de longueurs n de la suite. Il s'agit également d'une notion de répétition, puisque l'on demande aux occurrences des facteurs d'une telle suite d'être peu espacées. Un résultat récent de D. Lenz [157] établit la nullité de la mesure du support de la mesure spectrale pour tous les opérateurs issus de suites linéairement récurrentes. Là encore, répétitions et propriétés spectrales des opérateurs semblent liées. Au chapitre 5 (voir également [7]), nous caractérisons, dans le but d'appliquer ce résultat, les codages de rotations linéairement récurrents, généralisant ainsi une approche de [102].

Il est bien connu que, pour tout entier $b \geq 2$, le développement en base b d'un nombre rationnel est ultimement périodique, mais que peut-on dire sur la régularité du développement d'un irrationnel algébrique ? Cette question fut posée pour la première fois par É. Borel dans [47], qui conjecture qu'un tel développement doit satisfaire à certaines lois suivies par un nombre tiré au hasard. Plus précisément, la conjecture stipule que tout irrationnel algébrique doit être un nombre normal. Nous rappelons qu'un nombre réel θ est normal si pour tout entier b, les b^l mots de longueur l de l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ admettent dans le développement b-adique de θ la fréquence $1/b^l$. La normalité est une notion générique, puisque l'on vérifie rapidement que presque tout nombre réel est un nombre normal. Bien que cette conjecture soit considérée comme totalement hors d'atteinte, certains résultats dans cette direction sont connus depuis déjà plus de soixante dix ans [45, 166, 167, 83, 8, 77, 165]. Ils partagent de plus une philosophie commune : un développement b-adique obtenu par un procédé trop régulier mais non ultimement périodique définit un nombre transcendant. Plus récemment, S. Ferenczi et C. Mauduit [118] ont donné, en reformulant astucieusement un théorème de D. Ridout [207] (voir également [168]), une condition purement combinatoire de transcendance qui illustre bien ce phénomène. Le théorème de D. Ridout est en fait un raffinement (lorsque l'on ajoute une hypothèse de contrôle de la taille des facteurs premiers des dénominateurs et des numérateurs des approximations rationnelles) du célèbre théorème de K. F. Roth [211] et traduit le fait qu'un nombre irrationnel algébrique ne peut être trop bien approché par des nombres rationnels.

Théorème 0.2.11 (Ferenczi-Mauduit). *Soit Θ un nombre irrationnel dont le développement b-adique commence, pour tout entier n, par $0, u_n v_n v_n v'_n$, où u_n est un mot éventuellement vide, v_n un mot non vide admettant v'_n comme préfixe. Si de plus, $|v_n|$ tend vers l'infini, $\limsup(|u_n|/|v_n|) < \infty$ et $\liminf(|v'_n|/|v_n|) > 0$, alors Θ est un nombre transcendant.*

Ainsi, la présence de puissances (plus que des carrés, pas trop loin et arbitrairement longues) dans le développement b-adique d'un nombre réel irrationnel implique la transcendance de ce dernier. En particulier, cette condition est utilisée pour prouver la transcendance des réels dont le développement b-adique est sturmien [118], quasi-sturmien [13], point fixe d'une substitution binaire primitive ou de longueur constante [16] ou une suite d'Arnoux-Rauzy [118, 208]. Au chapitre 6 (voir également [6]), elle nous permettra de montrer la transcendance des nombres réels dont le développement b-adique est soit un codage binaire de rotation irrationnelle, soit le codage naturel d'un échange de trois intervalles non périodique.

Une problématique similaire peut être envisagée avec le développement en fraction continue. En effet, si celui-ci permet de caractériser les nombres réels quadratiques, ceux dont le développement est ultimement périodique, le développement en fractions continues d'un nombre algébrique de degré au moins trois a-t-il un caractère aléatoire ? A. Khintchine [148] est semble-t-il le premier à avoir posé cette question en 1949. Il est conjecturé que la suite des quotients partiels d'un irrationnel algébrique de degré au moins trois est nécessairement non bornée, propriété générique qui remplace ici la notion de normalité. Là encore, cette conjecture paraît réellement hors de portée, puisque l'on ne connaît (quasiment) rien sur le développement en fractions continues d'un réel algébrique non quadratique. Les auteurs de [14] ont récemment obtenu une condition combinatoire de transcendance analogue à celle de [118]. Ce résultat utilise une idée introduite dans [78] et développée dans [196]. Elle est obtenue à partir d'un théorème de W. Schmidt [214] sur l'approximation des nombres algébriques par des nombres quadratiques. Ce théorème, utilisé dans un rôle comparable à celui de D. Ridout, traduit le fait qu'un nombre algébrique de degré supérieur ou égal à trois ne peut être trop bien approché par des nombres algébriques de degré deux. Afin de faciliter la compréhension du lecteur, nous rappelons la condition de [14] dans le cadre particulier, mais souvent suffisant, des sous-shifts uniquement ergodique[19].

Théorème 0.2.12 (Allouche-Davison-Queffelec-Zamboni). *Soit Θ un nombre réel non quadratique dont le développement en fraction continue, noté $[0; U]$, commence, pour tout entier n, par $[0; u_n u'_n \ldots]$, où u_n est un mot non vide admettant u'_n comme préfixe. Si de plus, le sous-shift engendré par U est uniquement ergodique, $|u_n|$ tends vers l'infini et $\liminf \frac{|v_n v'_n|}{|v_n|} > \frac{3}{2}$, alors Θ est un nombre transcendant.*

[19] Se reporter au paragraphe 0.1.3.

À nouveau, la présence de puissances (plus que $\frac{3}{2}$, arbitrairement longues et dès le début) dans le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel non quadratique permet d'en déduire la transcendance. Ce résultat s'applique en particulier aux suites sturmiennes et quasi-sturmiennes [14], à la suite de Thue-Morse [196], à certains points fixes de substitutions [197] et à un certain nombre d'autres exemples [78, 14]. Cette utilisation du théorème de W. Schmidt apparaît déjà sous une forme moins aboutie dans [78] et [196, 197]. Un survol [13] reprend en détail les deux problématiques que nous venons d'évoquer. Notons enfin que la condition de transcendance de [14] a été très recemment étendue dans [79].

Nous montrerons au chapitre 7 que ce critère ne s'applique pas à tous les codages de rotations. En effet, nous exhibons des codages de rotations sans aucune puissance initiale arbitrairement grande.

Dans les deux problématiques que nous venons d'évoquer, le caractère "quasi-périodique" des développements considérés, illustré par la présence de certaines répétitions, interdit l'algébricité des nombres réels associés. Il serait évidemment intéressant d'obtenir des conditions de transcendance similaires pour d'autres développement, comme les β-développements définis dans [206].

Description de la thèse

Cette thèse est composée de sept chapitres, séparés en trois parties, et de deux appendices. La première partie est consacrée à une étude dynamique et arithmétique des suites $(n\alpha)$ et correspond aux chapitres 1 et 2. Dans la deuxième partie, composée des chapitres 3 et 4, nous étudions les propriétés de répartition et d'équilibre des substitutions primitives. Dans la dernière partie, nous utilisons l'approche dynamique du premier chapitre pour déterminer les répétitions intervenant dans les codages binaires de rotations. Puis nous appliquons ces résultats à l'étude spectrale d'opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels ainsi qu'à la transcendance de certains nombres réels. Cette partie correspond aux chapitres 5, 6 et 7. Dans un premier appendice, nous récapitulons les résultats obtenus pour les codages de rotations et nous dressons un tableau de comparaison entre les codages non dégénérés, sturmiens et quasi-sturmiens. Enfin, nous donnons, dans un second appendice, plusieurs programmes écrits en langage MUPAD et destinés à la vérification de critères algorithmiques introduits au cours de cette thèse.

Le **chapitre 1** est consacré à une étude dynamique des codages de rotations. Il a fait l'objet d'un article intitulé *Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité* accepté pour publication au *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*. Le résultat principal est l'obtention d'une expression S-adique explicite et naturelle pour les codages de rotations et les codages naturels d'échanges de trois intervalles. Nous introduisons également un développement en fractions continues bidimensionnel qui vérifie un théorème de Lagrange, c'est-à-dire que le développement est ultimement périodique si et seulement si les paramètres appartiennent à un même corps quadratique. Nous en déduisons ensuite une caractérisation des codages substitutifs primitifs. Ce travail sert ensuite de base aux chapitre 2, 5 et 6.

Dans le **chapitre 2**, nous utilisons certains résultats du chapitre 1 pour étudier le comportement asymptotique de sommes liées à la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$, pour des paramètres quadratiques. Nous obtenons notamment une propriété de forte irrégularité (au sens de Sós) ainsi que l'existence, sur quelques exemples, d'ensembles à restes exceptionnels donnant une discrépance locale particulièrement grande. Nous développons également une méthode permettant de déterminer si l'intervalle $[0,\beta[$ est à restes majorés ou bien minorés pour la suite $(n\alpha)$ lorsque α et β appartiennent à un même corps quadratique. Ce chapitre a fait l'objet d'un article intitulé *Répartition des suite* $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *et substitutions* accepté pour publication dans la revue *Acta Arithmetica*.

Les fonctions de discrépance symbolique sont introduites au **chapitre 3**. Dans le cas des points fixes de substitutions primitives, nous étudions avec précision leur comportement asymptotique. Nous montrons que ce comportement est en partie imposé par le spectre de la matrice d'incidence de la substitution, ce qui permet de le décrire simplement. En particulier, nous obtenons des résultats sur la répartition des substitutions primitives de type Salem (c'est-à-dire pour lesquelles la deuxième valeur propre de la matrice d'incidence, par ordre de module décroissant, est de module un). Nous donnerons également une condition suffisante (et presque nécessaire) pour qu'un système associé à un point fixe de substitution primitive ait une fonction de discrépance bornée. En particulier, nous verrons que l'ensemble des cylindres des systèmes associés aux substitutions de Fibonacci et de Tribonacci forment des familles d'ensembles à restes uniformément bornés pour ces sous-shifts. Nous étudions ensuite une application de ces résultats à la théorie spectrale des systèmes substitutifs. Ce chapitre fait l'objet d'un article intitulé *Symbolic discrepancy and self-similar dynamics* soumis pour publication au *Annales de l'Institut Fourier*.

Le **chapitre 4** est consacré à l'étude des propriétés d'équilibre des points fixes de substitutions primitives et reprend l'article *Balances for fixed points of primitive substitutions* accepté pour publication dans la revue *Theoretical Computer Science*. Nous introduisons deux fonctions généralisant la notion d'équilibre. Nous montrons que, dans le cas des points fixes de substitutions primitives, les propriétés d'équilibre et celles de répartition étudiées au chapitre 3 sont très liées. Nous en déduisons pour ces suites le comportement asymptotique des fonctions d'équilibre et donc notamment des propriétés d'équilibre uniforme.

Dans le **chapitre 5**, nous reprenons l'étude des codages de rotations introduits au chapitre 1. Ces suites binaires servent de modèle dans l'étude d'opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels. Nous donnons une caractérisations des codages linéairement récurrents en fonction du développement en fraction continue défini au chapitre 1 ; puis nous en déduisons que le support de la mesure spectrale d'un opérateur de Schrödinger associé à une telle suite est de mesure de Lebesgue nulle. Ce chapitre a été écrit en collaboration avec David Damanik[20]. Il fait l'objet d'un article intitulé *Linearly recurrent circle map subshifts and an application to Schrödinger operators*, publié dans la revue *Annales Henri Poincaré*.

Le **chapitre 6** utilise la description S-adique des codages de rotations établie au chapitre 1, pour montrer le résultat suivant : si le développement b-adique d'un nombre réel est un codage binaire de rotation ou le codage naturel d'un échange de trois intervalles non périodique, alors ce nombre est transcendant. Ce chapitre correspond à l'article *On the transcendence of real numbers with a regular expansion* écrit en collaboration avec Julien Cassaigne[21] et soumis pour publication à la revue *Journal of Number Theory*.

Nous continuons l'étude des répétitions intervenant dans les codages de rotations et leurs applications au **chapitre 7**. Nous donnons en particulier une caractérisation des codages ne contenant pas de puissances arbitrairement grandes, en fonction du développement introduit au chapitre 1. Nous exhibons également des codages sans aucune puissance initiale asymptotique. En particulier, nous prouvons que, contrairement aux suites sturmiennes, les codages de rotations ne commencent pas tous par des carrés arbitrairement longs. Nous discutons enfin de l'application de ces résultats à la transcendance des fractions continues associées aux codages de rotations.

[20] Californya Institute of Technology.
[21] Institut de Mathématiques de Luminy.

Première partie

Répartition des rotations quadratiques du cercle

Chapitre 1

Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la structure dynamique et combinatoire des codages de rotations. Nous exhibons un système S-adique décrivant le langage de ces suites. Cette représentation sera ensuite utilisée pour obtenir certaines propriétés dynamiques, combinatoires et arithmétiques de ces codages. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article accepté pour publication au *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*.

1.1 Introduction

Étant donné un nombre irrationnel α, $\alpha \in [0,1[$, nous nous intéressons aux problèmes de répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à un intervalle $[0,\beta[$, où $\beta \in [0,1[$. Plus précisément, nous cherchons à comprendre le comportement asymptotique de la somme :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right),$$

où $\chi_{[0,\beta[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\beta[$. L'étude de ces sommes est intimement liée à celle de la discrépance à l'origine des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et constitue donc un problème classique de théorie des nombres. Nous rappelons que la discrépance à l'origine de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta\in[0,1[} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right).$$

Considérons un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Introduisons alors la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'alphabet binaire $\{a,b\}$ par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite symbolique contient exactement l'information nécessaire et suffisante pour évaluer la quantité que nous désirons étudier. En effet, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right) = |u_0u_1\ldots u_{N-1}|_a - N\beta.$$

Remarquons que le codage U de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, que nous appelons codage de rotation de paramètres (α, β), doit être vu comme une opération de simplification, en ce sens qu'il paraît plus aisé d'étudier une suite définie sur un alphabet fini qu'une suite à valeurs dans l'intervalle $[0, 1[$. Nous devons donc à présent comprendre l'évolution du nombre de a apparaissant dans un préfixe arbitraire de U. Lorsque la suite U fait intervenir des phénomènes d'autosimilarité, c'est-à-dire si U est liée à un point fixe de substitution, nous montrons dans [2] qu'il existe un outil puissant pour mener cette étude.

Ainsi, notre problème initial de théorie des nombres semble trouver sa solution à travers une meilleure compréhension d'une classe de suites symboliques définies sur un alphabet binaire : les codages de rotations. Dans cet article, nous traitons les codages de rotations de façon indépendante. Nous remarquons en effet que cette classe de suites intervient de façon naturelle dans plusieurs domaines des mathématiques (voir par exemple [86, 87, 209] pour des approches combinatoires). Nous pensons qu'il convient donc d'étudier dans un premier temps ces suites en tant que telles. Gardant à l'esprit les motivations initiales, nous orientons tout de même notre travail de façon à obtenir des résultat utiles pour les problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, certains résultats démontrés dans la suite serviront de point de départ pour l'étude menée dans [2].

Revenons à présent aux codages de rotations et notons que de telles suites ont une interprétation géométrique simple puisqu'elles peuvent être obtenues en codant l'orbite, sous l'action d'une rotation d'angle irrationnel, de l'origine du cercle de périmètre unité découpé en deux intervalles. Lorsque la longueur de l'un des deux intervalles est égale à l'angle de rotation (divisé par 2π), la suite obtenue est une suite sturmienne ; cela signifie que le nombre de facteurs de longueur n de cete suite est exactement égal à $n+1$. Les codages de rotations constituent donc une généralisation géométrique naturelle des suites sturmiennes. Ces dernières fournissent certainement l'exemple le plus prolifique d'interactions entre la dynamique symbolique, la géométrie et la théorie des nombres, comme en témoigne l'abondante littérature consacrée à ce sujet (voir le survol [164, Chap. 2]). Elles peuvent être caractérisées aussi bien par des propriétés combinatoires (par définition) que par des propriétés d'équilibre de leur langage [68] ou encore géométriques [176]. Un résultat remarquable montre que la connaissance du développement en fraction continue de l'angle d'une suite sturmienne permet d'engendrer son langage, voir par exemple [23]. Il est donc naturel de se demander si les liens des codages de rotations avec les différents domaines des mathématiques sont aussi clairement établis que pour les suites sturmiennes.

Nous rappelons que certains codages de rotations, que nous qualifierons de non dégénérés, sont intimement liés à des suites obtenues en codant l'orbite de l'origine sous l'action d'un échange de trois intervalles. Nous explicitons ce lien et nous montrons, en utilisant un procédé d'induction, qu'un codage de rotation non dégénéré peut être obtenu en itérant quatre substitutions définies sur un alphabet à trois lettres puis en appliquant un morphisme de projection de cet alphabet vers l'alphabet binaire $\{a, b\}$. L'ordre d'itération des substitutions est gouverné par un développement bidimensionnel de type “fraction continue” des paramètres de la rotations. Ce résultat est à rapprocher de ceux de [161, 162, 163], de P. Arnoux et G. Rauzy [23], pour les suites sturmiennes, et G. Didier [86], pour les codages de rotations. Nous montrons que notre algorithme vérifie un théorème de Lagrange, en ce sens que le développement d'un couple de paramètres est ultimement périodique si et seulement si ces paramètres appartiennent à un même corps quadratique. Nous utilisons ensuite cette propriété pour caractériser les codages de rotations faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité. Nous en déduisons un résultat que nous utiliserons dans [2] pour répondre à des problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous appliquons finalement un de nos résultats pour obtenir une propriété de déséquilibre du langage des codages de rotations liés à ces phénomènes d'autosimilarité.

1.2 Définitions et notations

1.2.1 Suites symboliques

Nous rappelons ici les définitions et les notations usuelles concernant les suites symboliques. On appelle alphabet un ensemble $\mathcal{A}$, fini et non vide. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés lettres. Un mot (fini) sur $\mathcal{A}$ est une suite finie de lettres de $\mathcal{A}$ et un mot infini sur $\mathcal{A}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ indexée par $\mathbb{N}$. La longueur d'un mot fini w, notée $|w|$, est le nombre de lettres le composant. Le mot vide, noté ε, est l'unique mot de longueur 0. On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots de longueur fini sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites sur $\mathcal{A}$.

Soit $U = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite symbolique définie sur un alphabet $\mathcal{A}$. On appelle facteur de U tout mot fini de la forme $u_i u_{i+1} \dots u_j$, $0 \leq i \leq j$. On note $\mathcal{L}_n(U)$ l'ensemble des facteurs de longueur n de U et $\mathcal{L}(U)$ l'ensemble de tous les facteurs de U $\left(\mathcal{L}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n(U)\right)$. L'ensemble $\mathcal{L}(U)$ est appelé le langage de U. Une suite dans laquelle tout facteur admet une infinité d'occurrences est dite *récurrente.* Lorsque de plus ces occurrences sont séparées par des lacunes bornées, la suite est dite *uniformément récurrente.* Un facteur w de U est appelé *facteur spécial droit* s'il existe deux occurrences de w dans U suivies par des lettres différentes. Si w est un facteur de U et a une lettre de $\mathcal{A}$, alors $|w|_a$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot w. On définit la *fonction de complexité* de U comme la fonction qui à tout entier strictement positif n associe le nombre $P_n(U) = \#\mathcal{L}_n(U)$. L'application classique de décalage (shift en anglais), notée $\mathcal{S}$, associe à une suite $U = (u_k)_{k\geq 0}$ la suite $\mathcal{S}(U) = (u_k)_{k\geq 1}$. A l'aide de cette application, on associe à toute suite U le *système dynamique symbolique* $(\overline{\mathcal{O}(U)}, \mathcal{S})$, où $\overline{\mathcal{O}(U)}$ désigne la fermeture, dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ muni du produit des topologies discrètes, de l'orbite de la suite U sous l'action du décalage $\mathcal{S}$. Un système dynamique est *minimal* s'il ne contient pas de fermé invariant non trivial. Pour un système dynamique associé à une suite symbolique, ceci est équivalent au fait que la suite soit uniformément récurrente.

On définit sur $\mathcal{A}^*$ une opération, dite de concaténation, qui consiste simplement à juxtaposer deux mots. Muni de cette opération, l'ensemble $\mathcal{A}^*$ est un monoïde libre dont l'élément neutre est ε. Une application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$, appelée *substitution* sur l'alphabet $\mathcal{A}$, se prolonge par concaténation en un endomorphisme du monoïde $\mathcal{A}^*$ puis en une application de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. Étant donnée une substitution ξ définie sur $\mathcal{A}$, on appelle *matrice d'incidence* de ξ, la matrice $M_\xi = (|\xi(j)|_i)_{(i,j)\in\mathcal{A}^2}$.

1.2.2 Codages de rotations

Définition 1.2.1. *Étant donné un couple (α, β) appartenant à $[0,1[^2$, on appelle codage de rotation de paramètres (α, β) la suite symbolique $U = (u_n)_{n\geq 0}$ définie sur l'alphabet $\{a, b\}$ par :*

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0, \beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite nous ne considérerons pas tous les codages de rotations. Le cas où α est rationnel ne présente que peu d'intérêt, car le codage est alors périodique. Le cas où $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ ne sera pas traité ici, il relève plus de l'étude des suites sturmiennes, comme le mettent en évidence les paragraphes 1.4 et 1.8 ; il sera donc considéré comme dégénéré.

Définition 1.2.2. *Un codage de rotation est dit non dégénéré si et seulement si ses paramètres (α, β) vérifient :*
- α est irrationnel,

- $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
Un tel codage est dit de paramètres admissibles si de plus $\alpha < \beta$.

1.2.3 Échanges d'intervalles

Les échanges d'intervalles font partie des exemples classiques de systèmes dynamiques. Ils ont été notamment étudiés par M. Keane [145], G. Rauzy [201] et W. Veech [244, 245].

Définition 1.2.3. *Soient s un entier supérieur ou égal à deux, σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, s\}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ un vecteur de $\mathbb{R}^s$ à coordonnées strictement positives. Posons $I = [0, |\lambda|[$, où $|\lambda| = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$ et, pour $1 \leq i \leq s$, $I_i = \left[\sum_{j<i} \lambda_j, \sum_{j \leq i} \lambda_j\right[$, de sorte que $|I_i| = \lambda_i$. L'échange d'intervalles associé au couple (λ, σ) est la transformation T de I dans lui-même, définie comme l'isométrie par morceaux qui consiste à réordonner les intervalles I_i selon la permutation σ. De façon plus précise, si $x \in I_i$:*

$$T(x) = x + a_i, \text{ où } a_i = \sum_{k<\sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma_k} - \sum_{k<i} \lambda_k.$$

Un échange de s intervalles est donc entièrement déterminé par la donnée d'un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ de $\mathbb{R}^s$ à coordonnées strictement positives et d'une permutation σ de $\mathfrak{S}_s$. L'échange de s intervalles associé au couple (λ, σ) sera noté $((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s); \sigma)$. On code naturellement l'orbite d'un point de I, sous l'action d'un échange d'intervalles $((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s); \sigma)$, en associant à chaque élément de cette orbite le numéro de l'intervalle auquel il appartient.

1.3 Liens entre codages de rotations et échanges de trois intervalles

Étant donné un couple (α, β) appartenant à $[0, 1[^2$, on s'intéresse aux suites obtenues en codant l'orbite d'un point x de l'intervalle unité sous l'action de la rotation d'angle α par rapport à la partition de l'intervalle $[0, 1[$ en $[0, \beta[\cup [\beta, 1[$, appelée *rotation de paramètres* (α, β). Plus exactement, un tel codage, $\mathcal{C}(x, R_\alpha, \beta)$, est défini comme suit :

$$\mathcal{C}(x, R_\alpha, \beta) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ avec } c_n = \begin{cases} a & \text{si } \{x + n\alpha\} \in [0, \beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1}$$

A tout x de l'intervalle unité, on associe ainsi une suite $\mathcal{C}(x, R_\alpha, \beta)$ sur l'alphabet $\{a, b\}$. Dans le cas où $x = 0$, $\mathcal{C}(x, R_\alpha, \beta)$ est un codage de rotation au sens de la définition 1.2.1. Nous montrons dans ce paragraphe que l'étude des codages de rotations non dégénérés est intimement liée à celle des échanges de trois intervalles.

Si λ est un élément de l'intervalle $]0, 1[$, on définit l'application de premier retour de Poincaré de R_α sur $[0, \lambda[$, P_λ^α, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} P_\lambda^\alpha : & [0, \lambda[& \longrightarrow & [0, \lambda[\\ & x & \longmapsto & \{x + n\alpha\}, \end{array}$$

où $n = \min\{k \in \mathbb{N}^* / \{x + k\alpha\} \in [0, \lambda[\}$.

Remarque 1.3.1. *Dans le cas où α est un nombre irrationnel, la densité de la suite $(\{n\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$ permet de définir P_λ^α pour tout élément λ de l'intervalle $]0, 1[$.*

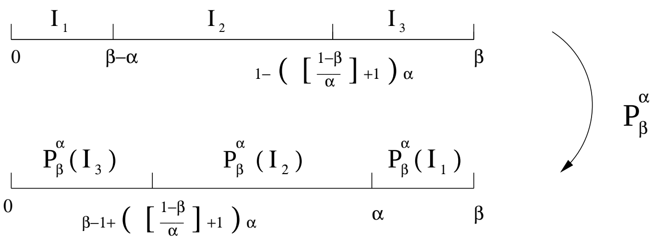


FIG. 1.1 – L'application de premier retour sur $[0,\beta[$.

Dans toute la suite, α désignera un nombre irrationnel positif et strictement inférieur à 1. Supposons que $\alpha < \beta$, P_β^α est alors défini comme l'échange d'intervalles suivant :

Remarque 1.3.2. *Notons que P_β^α est en fait un échange de deux intervalles dès lors qu'il existe un entier k strictement positif tel que $\beta = 1 - k\alpha$. Dans ce cas, P_β^α est métriquement isomorphe à une rotation de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Si $\alpha < \beta$ et $\beta \neq 1 - k\alpha$, P_β^α est l'échange de trois intervalles suivant :

$$P_\beta^\alpha = \left(\left(\beta - \alpha, 1 - \left\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \right\rfloor \alpha - \beta, \beta + \left(\left\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1\right)\alpha - 1\right); (321)\right). \tag{1.2}$$

Pour x appartenant à $[0,\beta[$, nous noterons $\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3))$ la suite obtenue en codant l'orbite de x sous l'action de P_β^α par rapport à la partition de $[0,\beta[$ en $I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Plus exactement, $\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3))$ est définie par :

$$\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3)) = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ avec } p_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (P_\beta^\alpha)^n(x) \in I_1, \\ 2 & \text{si } (P_\beta^\alpha)^n(x) \in I_2, \\ 3 & \text{si } (P_\beta^\alpha)^n(x) \in I_3. \end{cases}$$

Alors :

$$\mathcal{C}(x, R_\alpha, \beta) = \Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor}\left(\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3))\right),$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_k : & \{1,2,3\}^* & \longrightarrow & \{a,b\}^* \\ & 1 & \longmapsto & a, \\ & 2 & \longmapsto & ab^{k+1}, \\ & 3 & \longmapsto & ab^k, \end{array}$$

l'application Φ_k étant le morphisme de monoïde libre étendu par concaténation à $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$.

Supposons à présent que $\alpha > \beta$, l'application P_β^α est alors plus complexe à décrire. Cependant, nous allons voir que le codage de rotation de paramètres (α, β) est fortement lié à un codage de rotation de paramètres (α', β'), avec $\alpha' < \beta'$, ce qui nous permettra de ne considérer ensuite que les couples (α, β) pour lesquels $\alpha < \beta$.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$, on note $(\overline{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\overline{U_n} = \begin{cases} a & \text{si } U_n = b, \\ b & \text{si } U_n = a. \end{cases}$$

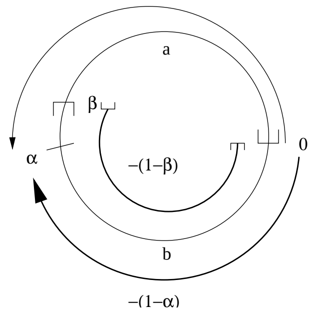


FIG. 1.2 – Cas $\alpha > \beta$.

Alors :

$$\mathcal{C}(0, R_\alpha, \beta) = a\mathcal{S}\left(\overline{\mathcal{C}(0, R_{(1-\alpha)}, 1-\beta)}\right), \tag{1.3}$$

où $\mathcal{S}$ désigne le shift usuel sur $\{a, b\}^*$. Pour cela, il suffit de remarquer que $-(1-\alpha) \equiv \alpha \mod 1$ et $-(1-\beta) \equiv \beta \mod 1$, comme l'illustre la figure 1.2. On effectue en réalité un changement d'orientation ; on échange le rôle de a et de b pour tenir compte de cette nouvelle orientation et on échange ensuite la première lettre du codage pour tenir compte du sens d'ouverture des intervalles de la partition. Or, si $\alpha > \beta$ alors $(1-\alpha) < (1-\beta)$. On peut donc obtenir $\mathcal{C}(0, R_{(1-\alpha)}, 1-\beta)$ à partir du codage d'un échange de trois intervalles si $1-\beta \neq 1-k(1-\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui est le cas dès que $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. En résumé, si $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$ avec $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors :

$$\mathcal{C}(0, R_\alpha, \beta) = \begin{cases} \Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor}\left(\mathcal{C}(0, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3)\right) & \text{si } \alpha < \beta, \\ a\mathcal{S}\left(\overline{\Phi_{\lfloor \frac{\beta}{1-\alpha} \rfloor}\left(\mathcal{C}(0, P_{1-\beta}^{1-\alpha}, (I_1, I_2, I_3))\right)}\right) & \text{si } \alpha > \beta. \end{cases} \tag{1.4}$$

Nous allons à présent montrer une propriété, en quelque sorte réciproque, pour certains échanges de trois intervalles.

Définition 1.3.3. *Étant donné $T = ((l_1, l_2, l_3); \sigma)$ et $T' = ((l'_1, l'_2, l'_3); \sigma')$, deux échanges de trois intervalles, on dit que T et T' sont équivalents et on note $T \sim T'$, si les conditions suivantes sont vérifiées :*
- $\sigma = \sigma'$,
- Les vecteurs (l_1, l_2, l_3) et (l'_1, l'_2, l'_3) sont homothétiques.

Remarque 1.3.4. *Deux échanges d'intervalles équivalents engendrent la même dynamique.*

Proposition 1.3.5. *Soit T un échange de trois intervalles $((l_1, l_2, l_3); \sigma)$, avec $\sigma = (321)$. Il existe alors un échange d'intervalles T' équivalent à T, tel que T' soit l'application de premier retour P_β^α sur $[0, \beta[$ d'une rotation de paramètres (α, β).*

Démonstration. Nous allons utiliser un procédé d'exduction (procédé dual de l'induction décrite en 1.4.1). Considérons l'échange de quatre intervalles $T_1 = ((l_1, l_2, l_3, l_2); (3412))$, puis l'échange T_1 normalisé, noté $\widetilde{T_1}$, défini par :

$$\widetilde{T_1} = \left(\left(\frac{l_1}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_2}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_3}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_2}{l_1 + 2l_2 + l_3}\right); (3412)\right).$$

L'application $\widetilde{T_1}$ n'est autre qu'un échange de deux intervalles avec un point marqué sur chacun, comme on peut le constater sur la figure 1.3.

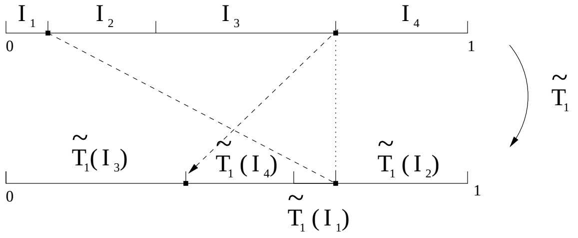


FIG. 1.3 – L'échange $\widetilde{T_1}$.

Posons alors $\alpha = \frac{l_2+l_3}{l_1+2l_2+l_3}$ et $\beta = \frac{l_1+l_2+l_3}{l_1+2l_2+l_3}$, et considérons la rotation de paramètres (α, β). L'application de premier retour associée à cette rotation, sur l'intervalle $[0, \beta[$, P_β^α, est, comme le montre la figure 1.4, l'échange de trois intervalles suivant :

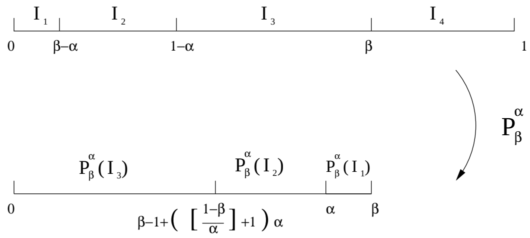


FIG. 1.4 – L'application de premier retour sur $[0, \beta[$.

$$P_\beta^\alpha = \left(\left(\frac{l_1}{l_1+2l_2+l_3}, \frac{l_2}{l_1+2l_2+l_3}, \frac{l_3}{l_1+2l_2+l_3} \right); (321) \right).$$

Et ainsi : $P_\beta^\alpha \sim T$. □

Ce résultat souligne donc un peu plus la grande interaction existant entre les codages de rotations et les échanges de trois intervalles.

1.4 Échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C.

Dans ce paragraphe, nous étudions l'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles satisfaisant à une condition introduite par M. Keane [145], dite condition I.D.O.C., que nous définissons un peu plus loin. Dans [201], G. Rauzy utilise le terme d'échanges réguliers.

1.4.1 Induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles

Commençons par rappeler les définitions utiles pour étudier l'induction de Rauzy. Nous donnons ces définitions dans le cas d'échanges de trois intervalles ; le lecteur pourra se reporter à [201] pour le cas général.

Définition 1.4.1. *Une permutation de $\mathfrak{S}_s$, $s \in \mathbb{N}^*$, est dite irréductible si elle ne laisse invariant aucun ensemble de la forme $\{1, ..., t\}$, avec $t < s$.*

Remarque 1.4.2. *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ n'est pas irréductible, alors $T_{(\sigma,l)}$, $l = (l_1, l_2, l_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, peut être décomposée en (au moins) deux transformations (échanges d'intervalles avec moins d'intervalles), l'une sur $[0, a[$ et l'autre sur $[a, |l|[$ avec $a \in \{l_1, l_1 + l_2\}$.*

Les permutations irréductibles de trois éléments sont (321), (312) et (231). Nous noterons $\mathfrak{S}_3^0$ l'ensemble des permutations irréductibles de trois éléments.

Définition 1.4.3. *Si $(\sigma, l) \in \mathfrak{S}_3^0 \times (\mathbb{R}_+^*)^3$, posons $0 = a_1 < a_2 = l_1 < a_3 = l_1 + l_2 < a_4 = l_1 + l_2 + l_3$. L'application $T_{(\sigma,l)}$ satisfait à la condition I.D.O.C. si les deux ensembles $\{T^k(a_2),\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{T^k(a_3),\ k \in \mathbb{Z}\}$ sont infinis et disjoints. Ce qui s'écrit de manière équivalente :*

$$T^k(a_i) = a_j,\ i \text{ et } j \in \{2, 3\},\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (k = 0 \text{ et } i = j).$$

Remarque 1.4.4. *Si $T_{(\sigma,l)}$ satisfait à la condition I.D.O.C. alors $T_{(\sigma,l)}$ est minimal (voir [145]).*

Définition 1.4.5. *Soit $T_{(\sigma,l)}$ un échange d'intervalle minimal. Un intervalle de la forme $[0, r[$, où $0 < r < |l|$, est dit admissible pour $T_{(\sigma,l)}$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, tels que :*

i) $T^k_{(\sigma,l)}(a_i) = r$,

ii) *si $k > 0$, pour tout k tel que $0 < h < k$, $T^h_{(\sigma,l)}(a_i) \notin [0, r[$,*
si $k \leq 0$, pour tout k tel que $k < h \leq 0$, $T^h_{(\sigma,l)}(a_i) \notin [0, r[$.

Nous allons maintenant présenter les principaux résultats concernant l'induction de Rauzy dans le cas des échanges de trois intervalles. Les énoncés et les démonstrations sont donnés, dans le cas général, dans [201].

Proposition 1.4.6. *Avec les notations de la définition précédente, l'intervalle $[0, l_1[$ est admissible et l'intervalle $[0, \max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)}))[$ est le plus grand intervalle admissible pour $T_{(\sigma,l)}$.*

Le principal résultat de [201] est le suivant :

Théorème 1.4.7 (Rauzy [201]). *Étant donné $T_{(\sigma,l)}$ un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C., si $I = [0, r[$ est un intervalle admissible pour $T_{(\sigma,l)}$, alors la transformation S induite par $T_{(\sigma,l)}$ sur I est définie partout. Il existe $\tau \in \mathfrak{S}_3^0$ et $\mu \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $S = T_{(\tau,\mu)}$; de plus $T_{(\tau,\mu)}$ satisfait à la condition I.D.O.C.*

Définition 1.4.8. *L'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. est l'application suivante :*

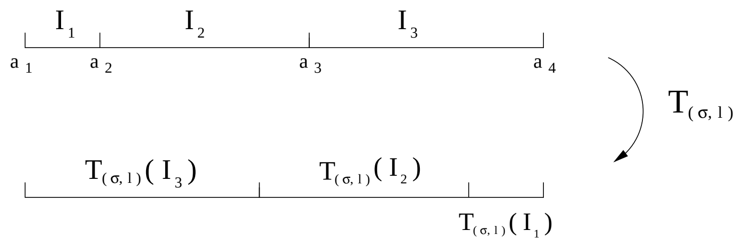
$$\begin{array}{rccc} \Psi: & IET_3 & \longrightarrow & IET_3 \\ & T_{(\sigma,l)} & \longmapsto & T_{(\sigma',l')} \end{array},$$

où $T_{(\sigma',l')}$ est l'application induite par $T_{(\sigma,l)}$ sur le plus grand intervalle admissible, à savoir l'intervalle $[0, \max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)}))[$ et IET_3 désigne l'ensemble des échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C.

Étudions, pour chaque élément de $\mathfrak{S}_3^0$, l'induction de Rauzy.

• Cas 1 : $\sigma = (321)$

Si $l_1 < l_3$, on a :



Alors, le plus grand intervalle admissible pour $T_{(\sigma,l)}$ est $[0, l_2 + l_3[$. L'échange d'intervalles induit est représenté sur la figure 1.5.

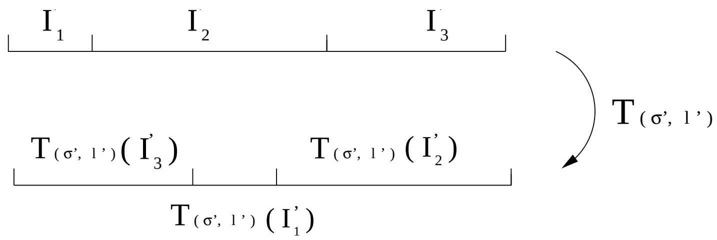


FIG. 1.5 – Échange d'intervalle induit.

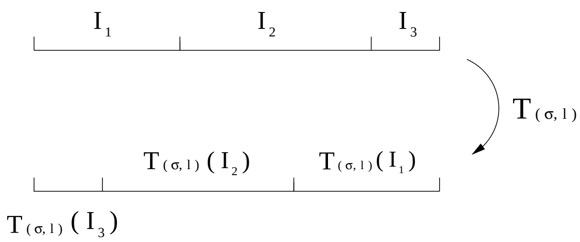
Donc : $\sigma' = (312)$ et $\begin{cases} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 \\ l'_3 = l_3 - l_1 \end{cases}$, ou encore : $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (l')$.

On notera : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si U est la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma,l)}$ et V la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma',l')}$ alors :

$$\sigma_1(V) = U,$$

où σ_1 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{array}$. La matrice A_1 est la matrice d'incidence de σ_1.

Si $l_1 > l_3$, on a :



La substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (231)$. Et il vient $\begin{cases} l'_1 = l_1 - l_3 \\ l'_2 = l_3 \\ l'_3 = l_2 \end{cases}$,

ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (l')$. On notera alors : $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_4(V) = U,$$

où σ_4 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 13 \\ 3 & \longmapsto & 2 \end{array}$. La matrice A_4 est la matrice d'incidence de σ_4.

• Cas 2 : $\sigma = (312)$.

Alors $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = a_3$ si et seulement si $l_1 + l_2 < l_1 + l_3$ et donc si et seulement si $l_2 < l_3$. De même $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = T_{(a_3)}$ est équivalent à $l_2 > l_3$.

Si $l_2 < l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (321)$ et $\begin{cases} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 \\ l'_3 = l_3 - l_2 \end{cases}$,

ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (l')$. On notera : $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_3(V) = U,$$

où σ_3 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 23 \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{array}$. La matrice A_3 est la matrice d'incidence de σ_3.

Si $l_2 > l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (312)$ et $\begin{cases} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 - l_3 \\ l'_3 = l_3 \end{cases}$,

ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (l')$. On notera : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_2(V) = U,$$

où σ_2 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 23 \end{array}$. La matrice A_2 est la matrice d'incidence de σ_2.

• Cas 3 : $\sigma = (231)$.

Alors $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = a_3$ si et seulement si $l_1 + l_2 < l_2 + l_3$ et donc si et seulement si $l_1 < l_3$. De même $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = T_{(a_3)}$ est équivalent à $l_1 > l_3$.

Si $l_1 < l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (231)$ et $\begin{cases} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 \\ l'_3 = l_3 - l_1 \end{cases}$,

ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (l')$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_1(V) = U,$$

où σ_1 est la substitution définie précédemment.

Si $l_1 > l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (321)$ et $\begin{cases} l'_1 = l_1 - l_3 \\ l'_2 = l_3 \\ l'_3 = l_2 \end{cases}$,

ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (l')$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_4(V) = U,$$

où σ_4 est la substitution définie précédemment.

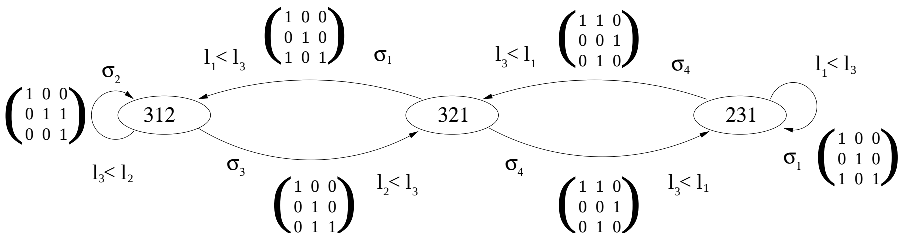


FIG. 1.6 – Graphe d'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles.

Nous pouvons résumer l'étude précédente à l'aide du graphe G suivant :

Ainsi, l'orbite positive d'un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. sous l'action de Ψ, l'induction de Rauzy, peut se représenter par un chemin infini sur le graphe G.

1.4.2 Codages de rotations et condition I.D.O.C.

Nous avons vu que l'induction de Rauzy était bien définie pour les échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. Il est donc naturel de se demander à quelles conditions sur (α, β) un échange d'intervalles associé, par induction comme au paragraphe 1.3, à une rotation de paramètres (α, β) satisfait à la condition I.D.O.C. C'est cette question que nous allons traiter à présent.

Lemme 1.4.9. *Soit U une suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action d'un échange de trois intervalles. Si l'échange satisfait à la condition I.D.O.C., alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; P_n(U) = 2n + 1,$$

sinon,

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; P_n(U) \leq n + k.$$

La suite $(P_n(U))_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne ici la fonction de complexité de la suite U définie au paragraphe 1.2.

Démonstration. Notons T l'échange de trois intervalles $((l_1, l_2, l_3); \sigma)$, $(l_1, l_2, l_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, a_1=0, a_2=l_1, a_3=$l_1 + l_2$ et a_4=$l_1 + l_2 + l_3$. Notons également, comme au paragraphe 1.3, I_1, I_2 et I_3 les trois intervalles de l'échange T. Si l'échange satisfait à la condition I.D.O.C., alors d'après [145] l'orbite du point 0 sous l'action de T est dense dans $[0, 1[$. Nous pouvons donc affirmer que pour tout $a_0 a_1 \ldots a_n \in \{1, 2, 3\}^{n+1}$:

$$a_0 a_1 \ldots a_n \in \mathcal{L}(U) \Leftrightarrow T^{-n}(I_{a_n}) \cap T^{-(n-1)}(I_{a_{n-1}}) \cap \ldots \cap (I_{a_0}) \neq \emptyset. \tag{1.5}$$

Remarquons à présent que si $[a, b[\subset [0, 1[$ alors $T^{-1}([a, b[)$ est une union disjointe d'intervalles semi-ouverts à droite dont les extrémités appartiennent à l'ensemble $\{T^{-1}(a), T^{-1}(b), a_1, a_2, a_3, a_4\}$. En appliquant cette remarque aux intervalles I_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, on en déduit que pour tout entier N et tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $T^{-N}(I_j)$ est une union disjointe d'intervalles semi-ouverts à droite dont les extrémités appartiennent à l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_N = & \; \{T^{-k}(a_l), \, 0 \leq k \leq N, \, l \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{a_4\} \\ = & \; \{T^{-k}(a_l), \, 0 \leq k \leq N, \, l \in \{2, 3\}\} \cup \{a_1, a_4\}. \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence sur la longueur des mots conduit alors à montrer, en utilisant l'équation (1.5), que pour tout entier n, $P_n(U) = \#(\mathcal{O}_n) - 1$. Comme T satisfait à la condition I.D.O.C., on est assuré que pour tout entier N

$$\#(\mathcal{O}_{N+1}) - \#(\mathcal{O}_N) = 2.$$

Ainsi, $P_1(U) = 3$ implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(U) = 2n + 1.$$

Lorsque T ne satisfait pas à la condition I.D.O.C., l'équation (1.5) n'est plus nécessairement vérifiée, mais on est tout de même assuré que pour tout $a_0a_1 \dots a_n \in \{1,2,3\}^{n+1}$:

$$a_0a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}(U) \Rightarrow T^{-n}(I_{a_n}) \cap T^{-(n-1)}(I_{a_{n-1}}) \cap \dots \cap (I_{a_0}) \neq \emptyset.$$

On en déduit alors que pour tout entier n, $P_n(U) \leq \#(\mathcal{O}_n) - 1$. Or le fait que T ne satisfait pas à la condition I.D.O.C. implique

$$\exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq K,\ (\#(\mathcal{O}_{N+1}) - \#(\mathcal{O}_N)) \leq 1.$$

Ceci entraîne, comme $(P_n(U))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est soit strictement croissante soit ultimement constante, que

$$\exists j \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq j,\ (P_{n+1}(U) - P_n(U)) \leq 1.$$

Et ainsi :

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(U) \leq n + k.$$

□

Proposition 1.4.10. *Soit T un échange de trois intervalles $((l_1, l_2, l_3); (321))$, associé, par induction, à une rotation de paramètres (α, β). Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et si $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors T satisfait à la condition I.D.O.C.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 1.4.11. *Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite sur l'alphabet $\mathcal{A}=\{1,2,3\}$ et vérifiant :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(U) \leq n + k.$$

Alors étant donné un alphabet fini $\mathcal{B}$ et un morphisme de monoïde libre σ de $\mathcal{A}^*$ vers $\mathcal{B}^*$, étendu par concaténation de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vers $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$:

$$\exists k' \in \mathbb{N}^* \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(\sigma(U)) \leq n + k'.$$

Démonstration du lemme 1.4.11. Considérons donc σ, où $\sigma : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$, avec $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ et posons $V = \sigma(U)$, $V = v_1v_2 \dots v_i \dots$, avec $v_i \in \mathcal{B}$. Nous devons alors montrer qu'il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(V) \leq n + k'$. Considérons également le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\sigma}: & \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \{1, 2, \dots, |\sigma(1)| + |\sigma(2)| + |\sigma(3)|\}^* \\ \\ & 1 & \longmapsto & 12 \dots |\sigma(1)|, \\ & 2 & \longmapsto & (|\sigma(1)| + 1) \dots (|\sigma(1)| + |\sigma(2)|), \\ & 3 & \longmapsto & (|\sigma(1)| + |\sigma(2)| + 1) \dots (|\sigma(1)| + |\sigma(2)| + |\sigma(3)|). \end{array}$$

La substitution $\widetilde{\sigma}$ est ainsi parfaitement définie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ par concaténation. Posons $\widetilde{V} = \widetilde{\sigma}(U)$ et considérons le morphisme :

$$\mathcal{P} : \{1, 2, \ldots, |\sigma(1)| + |\sigma(2)| + |\sigma(3)|\}^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$$

$$i \longmapsto \begin{cases} \sigma(1)_i & \text{si } i \leq |\sigma(1)|, \\ \sigma(2)_{i-|\sigma(1)|} & \text{si } |\sigma(1)| < i \leq (|\sigma(1)| + |\sigma(2)|), \\ \sigma(3)_{i-(|\sigma(1)|+|\sigma(2)|)} & \text{si } (|\sigma(1)| + |\sigma(2)|) < i. \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{P}(\widetilde{V}) = V$ et $\mathcal{P}$ étant une projection "lettre à lettre" :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ P_n(V) \leq P_n(\widetilde{V}).$$

Il nous suffit ainsi de montrer que :

$$\exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^* \ P_n(\widetilde{V}) \leq n + k'.$$

Notons $\widetilde{V} = \tilde{v}_1\tilde{v}_2 \ldots \tilde{v}_i \ldots$ et considérons $\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} \ldots \tilde{v}_{i+l} \in \mathcal{L}(\widetilde{V})$ tel que $\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} \ldots \tilde{v}_{i+l}$ admette deux prolongements à droite dans $\widetilde{V}$ (il ne peut évidemment pas en avoir plus pour l assez grand compte tenu de l'hypothèse faite sur U et de la définition de $\widetilde{\sigma}$). Ceci revient à dire que :

$$\exists (r, s) \in \{1, 2, \ldots |\sigma(1)| + |\sigma(2)| + |\sigma(3)|\}^2, \ r \neq s, \text{ tel que}$$
$$\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} \ldots \tilde{v}_{i+l}r \in \mathcal{L}(\widetilde{V}) \text{ et } \tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} \ldots \tilde{v}_{i+l}s \in \mathcal{L}(\widetilde{V}).$$

Par construction de $\widetilde{\sigma}$:

$$\exists!\ u_ju_{j+1} \ldots u_h \in \mathcal{L}(U) \text{ tel que } W\widetilde{\sigma}(u_ju_{j+1} \ldots u_h)W' = \tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} \ldots \tilde{v}_{i+l},$$

où W et W' sont respectivement suffixe strict et préfixe strict d'images de letrres par $\widetilde{\sigma}$. Donc $W'r$ et$W's$ sont préfixes d'images de lettres par $\widetilde{\sigma}$. Or $r \neq s$ implique $W' = \varepsilon$ (car les images de lettres distinctes par $\widetilde{\sigma}$ n'ont aucune lettre commune). Ainsi $\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} \ldots \tilde{v}_{i+l} = W\widetilde{\sigma}(u_ju_{j+1} \ldots u_h)$, où $u_ju_{j+1} \ldots u_h$ est un facteur spécial droit de U.

Considérons alors deux facteurs spéciaux droits de $\widetilde{V}$, $\widetilde{V_1}$ et $\widetilde{V_2}$, de même longueur suffisamment grande. D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \widetilde{V_1} = W_1\widetilde{\sigma}(U_1), & \text{où } U_1 \text{ est un facteur spécial droit de } U \\ & \text{et } W_1 \text{ est suffixe strict d'image de lettre par } \widetilde{\sigma}, \\ \widetilde{V_2} = W_2\widetilde{\sigma}(U_2), & \text{où } U_2 \text{ est un facteur spécial droit de } U \\ & \text{et } W_2 \text{ est suffixe strict d'image de lettre par } \widetilde{\sigma}. \end{cases}$$

De plus, pour tout i dans $\{1, 2, 3\}$, $\sigma(i) \notin \mathcal{L}(W_j)$, $j \in \{1, 2\}$. Si $|\widetilde{V_1}|$ est assez grande alors $|U_1|$ et $|U_2|$ sont assez grandes pour affirmer que U_1 est suffixe de U_2 (ou inversement). En effet, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n(U) \leq n + k$ et donc $(P_{n+1}(U) - P_n(U)) \leq 1$, si n est assez grand.

Supposons, par exemple que U_1 soit suffixe de U_2. Alors, si $U_1 \neq U_2$ $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\sigma(i) \in \mathcal{L}(W_1)$, ce qui est impossible car W_1 est suffixe strict d'image de lettre par $\widetilde{\sigma}$. Donc $U_1 = U_2$. En notant $U = U_1 = U_2$, on obtient $\begin{cases} \widetilde{V_1} = W_1\widetilde{\sigma}(U) \\ \widetilde{V_2} = W_2\widetilde{\sigma}(U) \end{cases}$.

Par construction de $\widetilde{\sigma}$, $\exists!\ i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $W_1 \in \mathcal{L}(\widetilde{\sigma}(i))$ et $\exists!\ j \in \{1, 2, 3\}$ tel que $W_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{\sigma}(j))$. Donc $\widetilde{\sigma}(iU)$ et $\widetilde{\sigma}(jU)$ sont deux facteurs spéciaux droits de $\widetilde{V}$ et ainsi iU et jU sont deux facteurs spéciaux droits de U. Mais alors iU est suffixe de jU (ou inversement), ce qui implique $i = j$ puis $W_1 = W_2$ et finalement $\widetilde{V_1} = \widetilde{V_2}$. Ceci montre l'existence de $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P_n(\widetilde{V}) \leq n + k'$. $\square$

Démonstration de la proposition 1.4.10. Soit $T = ((l_1, l_2, l_3); (321))$ un échange de trois intervalles associé à une rotation de paramètres (α, β), avec $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Notons U la suite obtenue sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange T et V le codage de rotation de paramètres (α, β). Alors, il existe un morphisme σ de $\{1, 2, 3\}^*$ vers $\{a, b\}^*$ vérifiant $\sigma(U) = V$. Or si $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, d'après [209]

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > N : P_n(V) = 2n.$$

Donc, d'après le lemme précédent il ne peut exister d'entier k pour lequel $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P_n(U) \leq n + k$. Le lemme 1.4.9 entraîne alors que l'échange T doit satisfaire la condition I.D.O.C. □

Lorsque $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, l'échange d'intervalles obtenu par induction à partir de la rotation de paramètres (α, β) est en fait un échange de deux intervalles ou un échange de trois intervalles ne satisfaisant pas à la condition I.D.O.C. ; c'est-à-dire qu'après un nombre fini d'étapes d'induction, l'échange obtenu sera un échange de deux intervalles. C'est une des raisons expliquant que le cas $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ relève davantage des suites sturmiennes. Dans [209], G. Rote montre également que la nature de la fonction de complexité d'un codage de rotation de paramètres (α, β) dépend du fait que β appartienne à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ ou non.

1.5 Algorithme d'induction pour les rotations de paramètres admissibles

Nous avons précédemment défini une application Ψ de IET_3 dans lui-même, appelée induction de Rauzy. Nous pouvons, à présent, donner une expression précise de l'application Ψ, similaire à celle donnée par F. Schweiger [219, pp. 93–101], sous la forme suivante :

$$\Psi : IET_3 \longrightarrow IET_3$$

$$T = ((l_1, l_2, l_3); \sigma) \longmapsto \begin{cases} \text{si } \sigma = (321), & \begin{cases} ((l_1, l_2, l_3 - l_1); (312)) \\ \text{si } l_3 > l_1, \\ ((l_1 - l_3, l_2, l_3); (231)) \\ \text{si } l_1 > l_3, \end{cases} \\ \text{si } \sigma = (312), & \begin{cases} ((l_1, l_2 - l_3, l_3); (312)) \\ \text{si } l_2 > l_3, \\ ((l_1, l_2, l_3 - l_2); (321)) \\ \text{si } l_3 > l_2, \end{cases} \\ \text{si } \sigma = (231), & \begin{cases} ((l_1, l_2, l_3 - l_1); (231)) \\ \text{si } l_3 > l_1, \\ ((l_1 - l_3, l_2, l_3); (321)) \\ \text{si } l_1 > l_3. \end{cases} \end{cases}$$

Considérons alors G_1, G_2 et G_3, les trois sous-graphes, du graphe G introduit au paragraphe 1.4, que nous définissons à l'aide de la figure 1.7. On peut aisément vérifier à l'aide de la définition précédente de Ψ, que si l'orbite positive d'un échange de trois intervalles T, sous l'action de Ψ, était ultimement contenue dans l'un des sous-graphes G_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, alors une des longueurs des intervalles d'un des échanges $\Psi^n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, serait nulle, ce qui est impossible puisque les échanges $\Psi^n(T)$ satisfont la condition I.D.O.C. Ainsi, si l'on considère la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des permutations données par l'orbite de T sous l'action de Ψ, cette suite contient une infinité de fois chacune des trois permutations irréductibles possibles.

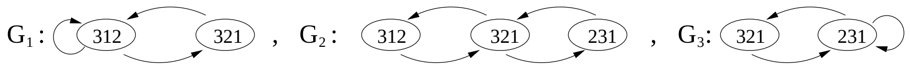


FIG. 1.7 – Les graphes G_1, G_2 et G_3.

Notamment, lorsque $\sigma = (321)$, on peut être assuré qu'il existe un entier positif n tel que $\sigma_n = (321)$. Ceci nous permet d'établir une version multiplicative de l'algorithme d'induction de Rauzy pour les échanges dont la permutation est (321), sous la forme suivante :

$$\Psi_M : (\mathbb{R}_+^*)^3 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$$

$$(l_1, l_2, l_3) \longmapsto \begin{cases} \left(l_1, l_2 - \left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor (l_3 - l_1), -l_2 + \left(\left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor + 1 \right) (l_3 - l_1) \right) \\ \text{si } l_1 < l_3 \ , \\ \left(-l_2 + \left(\left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor + 1 \right) (l_1 - l_3), l_2 - \left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor (l_1 - l_3), l_3 \right) \\ \text{si } l_1 > l_3 \ . \end{cases}$$

Si A_1, A_2, A_3 et A_4 désignent les matrices introduites au paragaphe 1.4, alors en notant pour tout entier k, $\mathcal{A}_k = (A_1 A_2^k A_3)$ et $\mathcal{B}_k = (A_4 A_1^k A_4)$, il vient :

$$\Psi_M(l_1, l_2, l_3) = \begin{cases} \left(\mathcal{A}^{-1}_{\left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \right)^t & \text{si } l_1 < l_3, \\ \left(\mathcal{B}^{-1}_{\left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \right)^t & \text{si } l_1 > l_3. \end{cases}$$

La matrice A^t désignant, dans l'expression ci-dessus, la transposée de la matrice A.

On obtient alors, en posant $k = \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma_n = (321)\}$, l'égalité suivante :

$$(\Psi_M(l_1, l_2, l_3); (321)) = \Psi^k\left((l_1, l_2, l_3); (321)\right).$$

Remarque 1.5.1. *Cette version multiplicative de l'induction de Rauzy est propre aux échanges de trois intervalles. En particulier, il ne s'agit pas de l'algorithme proposé par A. Zorich dans [252]. Nous utilisons la symétrie du graphe G, introduit au paragraphe 1.4, pour privilégier d'une certaine façon la permutation* (321). *L'algorithme étudié dans [252] ne distingue aucune permutation, mais prend plutôt en compte la nature des transitions intervenant entre les différentes permutations.*

Soit $T = ((l_1, l_2, l_3); (321))$ un échange de trois intervalles, satisfaisant à la condition I.D.O.C. Notons U la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de T et V la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $\Psi^k(T)$, où $k = \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma_n = (321)\}$. Il vient alors :

$$\left(\sigma_1 \sigma_2^{\left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor} \sigma_3 \right)(V) = U, \quad \text{si } l_1 < l_3,$$

$$\left(\sigma_4 \sigma_1^{\left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor} \sigma_4 \right)(V) = U, \quad \text{si } l_1 > l_3.$$

Nous proposons maintenant de généraliser cette remarque. Considérons un échange de trois intervalles, $T = ((l_1^0, l_2^0, l_3^0); (321))$, satisfaisant à la condition I.D.O.C. Pour tout entier n, notons

$$(l_1^n, l_2^n, l_3^n) = \Psi_M^n((l_1^0, l_2^0, l_3^0)),\ a_n = \left\lfloor \left| \frac{l_2^n}{l_1^n - l_3^n} \right| \right\rfloor \text{ et } i_n = \begin{cases} 0 & si \quad l_1^n < l_3^n \\ 1 & si \quad l_1^n > l_3^n \end{cases}.$$

Ainsi, $i_n = 1$ si la permutation de l'échange de trois intervalles induit, par l'induction (additive) de Rauzy Ψ, à partir de l'échange d'intervalles $\left(\Psi_M^n((l_1^0, l_2^0, l_3^0));\ (321)\right)$ est la permutation (231) et $i_n = 0$ si cette permutation est (312). Le coefficient a_n nous renseigne lui sur le nombre d'étapes d'induction additive de Rauzy nécessaires pour obtenir à partir de l'échange d'intervalles $\left(\Psi_M^n((l_1^0, l_2^0, l_3^0)); (321)\right)$ un échange d'intervalles dont la permutation est à nouveau (321). Ces coefficients ont ainsi une interprétation géométrique simple dans le graphe G de la figure 1.6.

Notons également $U^{(n)}$ la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange de trois intervalles $((l_1^n, l_2^n, l_3^n); (321))$. Alors :

$$\begin{aligned} U^{(0)} = \quad & \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_0} \sigma_3)^{i_0} (\sigma_4 \sigma_1^{a_0} \sigma_4)^{1-i_0} \right) \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_1} \sigma_3)^{i_1} \right. \\ & \left. (\sigma_4 \sigma_1^{a_1} \sigma_4)^{1-i_1} \right) \\ & \ldots \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_n} \sigma_3)^{i_n} (\sigma_4 \sigma_1^{a_n} \sigma_4)^{1-i_n} \right) (U^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Ce résultat est simplement obtenu en itérant la remarque précédente. Le fait que $i_n \in \{0, 1\}$ implique que soit $i_n = 0$ soit $1 - i_n = 0$.

Proposition 1.5.2. *Avec les notations précédentes, il vient :*

$$U^{(0)} = \lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1).$$

Démonstration. Le fait que, pour tout entier n, $U^{(n)}$ commence par la lettre 1 nous permet d'affirmer que $\prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1)$ est préfixe de $U^{(0)}$. Il nous suffit donc à présent de montrer que l'expression $\lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1)$ a un sens pour la topologie produit des topologies discrètes sur $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ et définit bien une suite infinie. Or $(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)(1) = 12^{a_j}$ et $(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)(1) = 13$. On obtient ainsi l'égalité : $\prod_{j=0}^{n+1} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1) = \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1W_{n+1})$, $W_{n+1} \in \{1, 2, 3\}^*$. Ceci implique alors que le mot $\prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1)$ est un préfixe du mot $\prod_{j=0}^{n+1} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1)$ et nous pouvons donner un sens à l'expression $\lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1)$. De plus $\left| \prod_{j=0}^{n+1} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1) \right| \geq \left| \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1) \right|$ et l'inégalité est stricte si $i_n = 1$ ou $a_{n+1} > 0$. Ceci ce produit infiniment souvent d'après l'étude menée au début de ce paragaphe sur les graphes G_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Nous pouvons alors affirmer que le mot $\lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)^{i_j} (\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)^{1-i_j} \right) (1)$ est infini et ainsi conclure. $\square$

Remarque 1.5.3. *Nous avons proposé un algorithme linéaire dépendant de trois variables pour obtenir les coefficients a_j et i_j. Ceci peut sembler naturel puisqu'il s'agit d'un algorithme de décomposition des longueurs d'échanges de trois intervalles. Cependant, la décomposition est la même pour deux échanges équivalents. C'est pourquoi, nous proposons dans la suite un algorithme de deux variables fournissant ces mêmes coefficients.*

Considérons la transformation projective suivante :

$$\mathcal{D} :]0,1[\times\mathbb{R}_+^* \longrightarrow]0,1[\times\mathbb{R}_+^*$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{\{\frac{x}{y-1}\}}{\frac{1}{y-1}-\lfloor\frac{x}{y-1}\rfloor}, \dfrac{1}{\frac{1}{y-1}-\lfloor\frac{x}{y-1}\rfloor}\right) & si \quad y > 1, \\ \left(\{\frac{x}{1-y}\}, \frac{y}{1-y} - \lfloor\frac{x}{1-y}\rfloor\right) & si \quad y < 1, \\ (0,1) & si \quad y = 1. \end{cases}$$

Si $T = ((l_1, l_2, l_3); (321))$ est un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C., posons $x_0 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$, $y_0 = \frac{l_2+l_3}{l_1+l_2}$ ($x_0 \in]0,1[$ et $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$) et $(x_n, y_n) = \mathcal{D}^n(x_0, y_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le fait que l'échange T vérifie la condition I.D.O.C. assure que $y_n \neq 1$ pour tout entier n et nous permet ainsi de poser $a_n = \left\lfloor\left|\frac{x_n}{y_n-1}\right|\right\rfloor$ et $i_n = \begin{cases} 1 & si \quad y_n < 1 \\ 0 & si \quad y_n > 1 \end{cases}$.

Proposition 1.5.4. *La suite de coefficients $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que celle définie dans la proposition précédente.*

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur n.

Définition 1.5.5. *Considérons un couple de paramètres admissibles (α, β) et l'échange de trois intervalles T qui lui est associé. Nous appellerons développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β) la suite $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtenue comme nous l'avons décrit précédemment à partir de l'échange T.*

Si $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ mais $\alpha > \beta$, nous appellerons développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β) le développement $\mathcal{D}$ associé au couple de paramètres admissibles $(1-\alpha, 1-\beta)$.

Théorème 1.5.6. *Si U désigne un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α, β) et $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β), alors :*
si $\alpha < \beta$,

$$U = \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j}\left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right),$$

si $\alpha > \beta$,

$$U = \lim_{n\to\infty} a\mathcal{S}\left(\overline{\phi_{\lfloor\frac{\beta}{1-\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j}\left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right)}\right)$$

où les applications $\mathcal{S}$, ϕ_k et — sont celles définies dans le paragraphe 1.3.

Preuve. La preuve est immédiate d'après les propositions 1.5.4 et 1.5.2 et l'équation (1.4).

Corollaire 1.5.7. *Avec les notations du théorème précédent, le système dynamique symbolique associé à un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α, β), est engendré par la suite :*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j}\left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right),\ si\ \alpha < \beta,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a\mathcal{S}\left(\overline{\phi_{\lfloor\frac{\beta}{1-\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j}\left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right)}\right),$$

si $\alpha > \beta$.

Preuve. La preuve est immédiate d'après le théorème précédent car le système est minimal si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Corollaire 1.5.8. *Pour tout $x \in [0,1[$ et tout couple de paramètres non dégénérés (α,β), le langage de la suite $\mathcal{C}(x,R_\alpha,\beta)$ définie par l'équation (1.1) est le même que celui de la suite :*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right), \text{ si } \alpha < \beta,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a\mathcal{S}\left(\overline{\phi_{\lfloor \frac{\beta}{1-\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right)} \right),$$

si $\alpha > \beta$.

Preuve. Il suffit d'invoquer la densité de la suite $\{x + n\alpha\}$, pour α irrationnel, et le corollaire 1.5.7.

Les deux corollaires précédents sont très proches du résultat de [86]. Cependant le travail de G. Didier présente deux inconvénients majeurs pour notre étude. Tout d'abord, les paramètres (α,β) des codages de rotations considérés dans [86] vérifient $\alpha \leq \min\{\beta, 1-\beta\}$. Cette condition n'est pas du tout adaptée au problème de théorie des nombres qui a motivé notre étude, contrairement à la condition, arithmétiquement et combinatoirement plus naturelle, $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Ensuite, le théorème principal de [86] donne la constuction, pour tout couple (α,β) vérifiant $\alpha \leq \min\{\beta, 1-\beta\}$, d'une suite du système dynamique engendré par le codage de rotation de paramètres (α,β) ; mais ne construit pas le codage de rotation de paramètres (α,β), comme nous le faisons dans le théorème 1.5.6. Là encore, pour répondre aux problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, il est nécessaire de construire explicitement ce codage. C'est pourquoi nous n'avons pu utiliser le résultat de [86].

1.6 Caractérisation des couples (α,β) dont le développement $\mathcal{D}$ est ultimement périodique

Nous cherchons à caractériser les couples pour lesquels le développement $\mathcal{D}$ associé, introduit au paragraphe précédent, est ultimement périodique. Ceci revient à déterminer les couples (α,β) pour lesquels l'orbite, sous l'action de l'induction de Rauzy Ψ, de l'échange de trois intervalles associé à la rotation de paramètres (α,β) peut se représenter par un chemin ultimement périodique dans le graphe G introduit au paragraphe 1.4.

Proposition 1.6.1. *Étant donné un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$ vérifiant $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, si α et β appartiennent à un même corps quadratique alors le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) est ultimement périodique.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du résultat de M. D. Boshernitzan et C. R. Carrol [48], dont une version affaiblie et adaptée aux échanges de trois intervalles peut être donnée sous la forme suivante :

Théorème 1.6.2 (Boshernitzan et Carrol [48]). *Soit T, $T = ((l_1,l_2,l_3);\sigma)$, un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. Si les longueurs l_1, l_2 et l_3 appartiennent à un même corps quadratique, alors l'orbite de l'échange T, sous l'action de Ψ, est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G du paragraphe 1.4.*

Démonstration de la proposition 1.6.1. Si (α,β) est un couple de paramètres admissibles au sens de la définition 1.2.2, alors l'échange de trois intervalles associé, par induction, à la rotation de paramètres (α,β) est donné, d'après l'équation (1.2), par :

$$T=\left(\left(\beta-\alpha, 1-\left\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\right\rfloor\alpha-\beta, \beta+\left(\left\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\alpha-1\right);(321)\right).$$

Si de plus α et β appartiennent à un même corps quadratique, il en est alors clairement de même pour les longueurs des trois intervalles de l'échange T. Ainsi, l'orbite de T, sous l'action de Ψ, est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G. C'est-à-dire, le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) est ultimement périodique.

Dans le cas où α et β appartiennent à un même corps quadratique, mais que $\alpha>\beta$, alors le couple $(1-\alpha,1-\beta)$ vérifie les conditions suivantes :
$1-\alpha$ et $1-\beta$ appartiennent à un même corps quadratique et $1-\alpha<1-\beta$.
D'après la définition 1.5.5, le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) est là encore ultimement périodique. □

Nous allons à présent démontrer la propriété réciproque, à savoir :

Proposition 1.6.3. *Étant donné un couple $(\alpha,\beta)\in[0,1[^2$ vérifiant $\alpha\notin\mathbb{Q}$ et $\beta\notin\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, si le développement $\mathcal{D}$ associé à ce couple de paramètres est ultimement périodique, alors α et β appartiennent à un même corps quadratique.*

Pour établir cette proposition, nous utilisons le résultat suivant démontré dans [48] :

Proposition 1.6.4. *Soit T, $T=((l_1,l_2,l_3);\sigma)$, un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. et dont le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs l_1,l_2 et l_3 est de rang 2. Si l'orbite de l'échange T, sous l'action de Ψ, est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G du paragraphe 1.4, alors l'échange T est équivalent à un échange dont les longueurs l_1,l_2 et l_3 appartiennent à un même corps quadratique.*

Démonstration de la proposition 1.6.3. . Soit (α,β) un couple dont le développement $\mathcal{D}$ est ultimement périodique et tel que $\alpha<\beta$. Notons $T=((l_1,l_2,l_3);(321))$ l'échange de trois intervalles associé par induction à la rotation de paramètres (α,β). Ainsi, d'après l'équation (1.2) :

$$(l_1,l_2,l_3)=\left(\beta-\alpha, 1-\left\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\right\rfloor\alpha-\beta, \beta+\left(\left\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\alpha-1\right). \tag{1.6}$$

L'ultime périodicité du développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) implique que l'orbite de T sous l'action de ψ est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G. L'irrationalité de α entraîne que le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs l_1,l_2 et l_3 est de rang supérieur à 2. En normalisant l'échange T, on obtient l'échange $\widetilde{T}$ défini par :

$$\widetilde{T}=\left(\left(\frac{l_1}{l_1+l_2+l_3},\frac{l_2}{l_1+l_2+l_3},\frac{l_3}{l_1+l_2+l_3}\right);(321)\right).$$

Le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs de l'échange $\widetilde{T}$ est encore de rang supérieur à 2, mais le fait d'être normalisé lui interdit évidemment d'être de rang maximum, à savoir 3. Ainsi, le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs de l'échange $\widetilde{T}$ est de rang 2. De plus $\widetilde{T}$ est équivalent à T et donc l'orbite de $\widetilde{T}$ sous l'action de ψ est elle aussi représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G. D'après la proposition 1.6.4, il existe donc un échange de trois intervalles $T'=((l'_1,l'_2,l'_3);(321))$, équivalent à $\widetilde{T}$, dont les longueurs appartiennent à un même corps quadratique. Mais le fait que $\widetilde{T}$ soit normalisé et qu'il soit équivalent à T' implique l'égalité suivante :

$$\widetilde{T} = \left(\left(\frac{l'_1}{l'_1+l'_2+l'_3}, \frac{l'_2}{l'_1+l'_2+l'_3}, \frac{l'_3}{l'_1+l'_2+l'_3} \right) ; (321) \right).$$

Les longueurs des intervalles de l'échange $\widetilde{T}$ appartiennent donc aussi au même corps quadratique. D'après l'équation (1.6), il en est de même pour les quantités $\frac{\beta-\alpha}{\beta}$ et $\frac{1-\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor\alpha-\beta}{\beta}$, ce qui entraîne que α et β appartiennent également au même corps quadratique.

Si le couple (α, β) vérifie $\alpha > \beta$ et que le développement $\mathcal{D}$ associé à ce couple est ultimement périodique, alors le raisonnement précédent conduit à montrer que $(1-\alpha)$ et $(1-\beta)$ appartiennent à un même corps quadratique. On en déduit immédiatement qu'il en est de même pour α et β. □

Nous pouvons, à présent réunir les deux propositions précédentes pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 1.6.5. *Soit $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β) est ultimement périodique si et seulement si α et β appartiennent à un même corps quadratique.*

1.7 Caractérisation des suites primitives substitutives obtenues comme codages de rotations

Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer pour quels paramètres, (α, β), le codage de rotation de paramètres (α, β) définit une suite substitutive primitive. Nous pourrons alors déterminer les codages de rotations faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité.

1.7.1 Le cas des couples de paramètres admissibles dont le développement $\mathcal{D}$ est ultimement périodique

Lorsqu'une famille de suites symboliques peut être engendrée par un système adique, les suites obtenues par un développement ultimement périodique dans ce système sont liées à un point fixe de substitution. Nous allons à présent exploiter cette remarque dans le cas des codages de rotations. Commençons par rappeler quelques définitions liées à la notion de substitution.

Définition 1.7.1. *Une substitution ξ, définie sur un alphabet $\mathcal{A}$, est dite primitive s'il existe un entier k tel que pour tout élément β de $\mathcal{A}$ et tout élément γ de $\mathcal{A}$, γ soit facteur de $\xi^k(\beta)$.*

Remarque 1.7.2. *Le fait qu'une substitution ξ soit primitive est équivalent au fait que sa matrice M_ξ d'incidence soit primitive, c'est-à-dire admette une puissance dont tous les coefficients soient strictement positifs.*

Définition 1.7.3. *Une suite U définie sur un alphabet $\mathcal{A}$ est dite primitive substitutive s'il existe une substitution primitive ξ sur un alphabet $\mathcal{B}$ et un morphisme $\phi : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ tels que $\phi(X_\xi) = U$ où X_ξ est point fixe de la substitution ξ.*

Proposition 1.7.4. *Soit (α, β) un couple de paramètres admissibles au sens de la définition 1.2.2. Si α et β appartiennent à un même corps quadratique, alors le codage de rotation de paramètres (α, β) définit une suite substitutive primitive.*

Démonstration. Si α et β appartiennent à un même corps quadratique, alors d'après le théorème 1.6.5, le développement $\mathcal{D}$, $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associé au couple (α, β) est ultimement périodique. Il vient donc : $\exists\ k \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \geq k\ (a_{n+T}, i_{n+T}) = (a_n, i_n)$. Or le théorème 1.5.6 entraîne, en notant U le codage de rotation de paramètres (α, β), que :

$$\begin{aligned}
U &= \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right) (1) \right), \\
&= \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{Tn+k-1} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right) (1) \right), \\
&= \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right) \xi^n(1) \right),
\end{aligned}$$

où $\xi = \prod_{j=k}^{k+T-1} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)$. On pose alors :

$$\phi = \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=k}^{k+T-1} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right) \right),$$

$\phi : \{1,2,3\}^* \longrightarrow \{a,b\}^*$. On obtient

$$U = \phi(\lim_{n\to\infty} \xi^n(1)),$$

ou encore $U = \phi(\xi^\infty(1))$, où $\xi^\infty(1) = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe de la substitution ξ. De plus, $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$, car

$$(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4)(1) = 12^{a_j} \text{ et } (\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3)(1) = 13.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que ξ est une substitution primitive. Notons, pour tout entier k, $\mathcal{A}_k = (A_1 A_2^k A_3)$ et $\mathcal{B}_k = (A_4 A_1^k A_4)$, où les matrices A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, ont été introduites au paragraphe 1.4. Alors, si l'on note M_ξ la matrice associée à la substitution ξ, on a

$$M_\xi = \prod_{j=k}^{k+T-1} (\mathcal{A}_{a_j}^{i_j})(\mathcal{B}_{a_j}^{1-i_j}).$$

Si $(C, D) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, $C = (c_{i,j})$, $D = (d_{i,j})$, nous dirons que $C \geq D$ si $c_{i,j} \geq d_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$. De même, nous dirons que $C > D$ si $c_{i,j} > d_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$. Si C est positive, alors pour tout entier k, les quatre inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{A}_k C \geq C,\ C\mathcal{A}_k \geq C,\ \mathcal{B}_k C \geq C \text{ et } C\mathcal{B}_k \geq C.$$

Pour cela, il suffit de constater que $\begin{cases} \mathcal{A}_k = I_3 + A'_k & \text{avec } A'_k \geq 0 \\ \mathcal{B}_k = I_3 + B'_k & \text{avec } B'_k \geq 0 \end{cases}$.

Dans le paragraphe 1.5, nous avons vu que l'orbite d'un échange de trois intervalles associé à une rotation de paramètres admissibles (α, β), sous l'action de l'induction de Rauzy Ψ, n'est pas ultimement contenue dans l'un des sous-graphes G_i, $i \in \{1,2,3\}$, définis dans ce même paragraphe. Ceci entraîne :

$\exists j_1 \in \{k, k+1, \ldots, k+T-1\}$ tel que $i_{j_1} = 0$,
$\exists j_2 \in \{k, k+1, \ldots, k+T-1\}$ tel que $i_{j_2} = 1$,
$\exists j_3 \in \{k, k+1, \ldots, k+T-1\}$ tel que $a_{j_3} \geq 1$.
Or, pour deux entiers k et l tels que $k > l$, $\mathcal{A}_k \geq \mathcal{A}_l \geq 0$ et $\mathcal{B}_k \geq \mathcal{B}_l \geq 0$. Les remarques précédentes permettent d'affirmer que l'une au moins des quatre inégalités suivantes est vérifiée :
$M_\xi \geq \mathcal{A}_0\mathcal{B}_1 = P_1 \geq 0$,
$M_\xi \geq \mathcal{A}_1\mathcal{B}_0 = P_2 \geq 0$,
$M_\xi \geq \mathcal{B}_1\mathcal{A}_0 = P_3 \geq 0$,
$M_\xi \geq \mathcal{B}_0\mathcal{A}_1 = P_4 \geq 0$.
Or, on vérifie aisément que $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, $\exists\ k_i \in \mathbb{N}$ tel que $P_i^{k_i} > 0$. Donc $M_\xi^{\max_{i\in\{1,2,3,4\}}(k_i)} > 0$ et ainsi ξ est bien primitive. □

Notons que la primitivité de la substitution ξ est créée par la répétition des blocs de matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$. Les matrices A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ n'étant pas supérieures à l'identité (au sens de l'ordre partiel utilisé dans la preuve), un raisonnement similaire sur ces matrices est impossible. Notre algorithme multiplicatif d'induction permet donc de mettre plus naturellement en évidence la primitivité de la substitution ξ.

1.7.2 Réciproque

Soit (α, β) un couple de paramètres admissibles ne satisfaisant pas à la condition : α et β appartiennent à un même corps quadratique. Alors le développement $\mathcal{D}$ associé n'est pas ultimement périodique. Autrement dit, la description que nous obtenons du codage de rotation de paramètres (α, β), ne le présente pas comme définissant une suite substitutive primitive. On pourrait pourtant envisager qu'en utilisant un système de recodage différent de l'induction de Rauzy, ce même codage de rotation puisse être décrit comme une suite substitutive primitive. En utilisant un résultat de F. Durand [99], nous allons montrer qu'un tel codage de rotation ne définit pas une suite substitutive primitive.

Si U désigne une suite minimale sur un alphabet $\mathcal{A}$ et $u = u_1u_2\ldots u_n$ un préfixe non vide de U, nous appellerons *mot de retour* sur u, tout facteur $u_{[i,j-1]}(= u_iu_{i+1}\ldots u_{j-1})$ de U où i et j sont deux occurrences distinctes de u dans U. L'ensemble $\mathcal{H}_{U,u}$ désignant l'ensemble des mots de retour sur u, tout élément de $\mathcal{H}^*_{U,u}$ admet une unique décomposition en éléments de $\mathcal{H}_{U,u}$ concaténés. Ainsi, la suite U peut s'écrire de manière unique sous la forme $U = m_0m_1\ldots m_i\ldots$, où les m_i sont des mots de retour sur u. La minimalité de U nous permet d'affirmer que $\mathcal{H}_{U,u}$ est un ensemble fini pour tout préfixe non vide u de U. Nous pouvons donc considérer une bijection $\Lambda_{U,u}$ de $\mathcal{H}_{U,u}$ sur l'ensemble $\{1,2,\ldots,\mathrm{card}(\mathcal{H}_{U,u})\} = \mathcal{N}_{U,u}$, ce qui revient simplement à numéroter les mots de retour sur u. Posons alors $\mathcal{D}_u(U) = \Lambda_{U,u}(m_0)\Lambda_{U,u}(m_1)\ldots\Lambda_{U,u}(m_i)\ldots$; cette suite sur l'alphabet $\mathcal{N}_{U,u}$ est appelée *suite dérivée* de U. Ainsi, à tout préfixe v de U, on pourra associer une suite dérivée $\mathcal{D}_v(U)$. Dans [99], F. Durand a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.7.5 (Durand [99]). *Une suite U est substitutive primitive si et seulement si le nombre de ses différentes suites dérivées est fini.*

Nous proposons maintenant d'établir le résultat suivant :

Proposition 1.7.6. *Si le codage de rotation de paramètres admissibles (α, β) définit une suite substitutive primitive, alors α et β appartiennent à un même corps quadratique.*

Démonstration. L'idée principale de cette démonstration est de remarquer que certaines étapes de l'induction de Rauzy pour un échange d'intervalles consistent à regarder des mots de retour sur la suite codant l'orbite du point 0 sous l'action de cet échange.

Considérons U, un codage de rotation de paramètres admissibles (α, β) dont le développement $\mathcal{D}$ n'est pas ultimement périodique. Nous avons vu au paragraphe 1.3, qu'il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^*$ vers $\{a,b\}^*$ tel que $\phi(V) = U$, où V désigne la suite de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange de trois intervalles $T_{\sigma,l}$ induit par la rotation de paramètres (α, β) sur l'intervalle $[0, \beta[$. Alors, par définition même de l'application de premier retour, nous obtenons que

$$V = \mathcal{D}_a(U)\ .$$

Plus précisément, il n'existe que trois mots de retour sur a qui sont $\phi(1)$, $\phi(2)$ et $\phi(3)$. L'échange de trois intervalles $T_{\sigma,l}$ satisfait à la condition I.D.O.C. car (α, β) est un couple de paramètres admissibles. Notons $l = (l_1, l_2, l_3)$, nous savons que $\sigma = (321)$; l'intervalle $[0, l_1[$ est, comme nous l'avons remarqué dans la proposition 1.4.6, un intervalle admissible pour $T_{\sigma,l}$. De plus, si l'on note $T_{(\sigma',l')}$ l'échange de trois intervalles induit par $T_{(\sigma,l)}$ sur $[0, l_1[$, un argument de G. Rauzy [201] nous permet d'affirmer que $\sigma' = (321)$. Notons V' la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma,l)}$. Nous savons qu'il existe une substitution θ, définie sur l'alphabet $\{1,2,3\}$, telle que $\theta(V') = V$. Ici encore et par définition même de l'application de premier retour, nous obtenons que :

$$V' = \mathcal{D}_1(V)\ .$$

Plus précisément, il n'existe que trois mots de retour sur 1 qui sont $\theta(1)$, $\theta(2)$ et $\theta(3)$. Introduisons la suite d'échanges de trois intervalles suivante :

$$\begin{cases} T_{\sigma,l_0} = T_{(\sigma,l)}, \\ T_{(\sigma,l_{n+1})} \text{ est l'application de premier retour induite par } T_{(\sigma,l_n)} \\ \text{sur le premier intervalle de } T_{(\sigma,l_n)}. \end{cases}$$

Puis, pour tout entier n, notons $U^{(n)}$ la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma,l_n)}$. Ainsi, $U^{(0)} = V$ et $U^{(1)} = V'$. Alors, $U^{(0)} = \mathcal{D}_a(U)$ et de plus pour tout entier n, $U^{(n+1)} = \mathcal{D}_1(U^{(n)})$. Nous rappelons un résultat de F. Durand [99], concernant les suites dérivées :

Proposition 1.7.7. *Considérons une suite symbolique U et u un préfixe non vide de U. Si v est un préfixe non vide de $\mathcal{D}_u(U)$ alors il existe un préfixe w de U, non vide, tel que $\mathcal{D}_v(\mathcal{D}_u(U)) = \mathcal{D}_w(U)$.*

Cette proposition nous permet donc d'affirmer que la suite $(U^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de suites dérivées de U. De plus, G. Rauzy [201] montre que si $[0, \lambda[$ est un intervalle admissible pour $T_{\sigma,l}$ alors l'application $T_{\sigma_\lambda,l_\lambda}$, induite par $T_{\sigma,l}$ sur $[0, \lambda[$, vérifie :

$$\exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } T_{\sigma_\lambda,l_\lambda} = \Psi^n(T_{\sigma,l}),$$

où Ψ désigne l'induction de Rauzy introduite au paragraphe 1.4. Autrement dit, l'induction de Rauzy "passe en revue" tous les intervalles admissibles. En particulier, si $\sigma = (321)$ et $\lambda = l_1$, il existe un entier n_1 tel que $l_\lambda = \Psi_M^{n_1}(l)$, où Ψ_M désigne la version multiplicative de l'induction de Rauzy introduite au paragraphe 1.5. Notamment, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, $l_n = \Psi_M^{k_n}(l)$. Ainsi, pour tout entier n, la suite $U^{(n)}$ peut être obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange de trois intervalles $((\Psi_M^{k_n}(l)); (321))$.

Supposons que la suite U soit substitutive primitive, alors d'après le théorème 1.7.5, la suite $(U^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs dans $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$. Il existerait donc deux entiers distincts n_1 et n_2 tels que $U^{(n_1)} = U^{(n_2)}$, et donc deux entiers k_{n_1} et k_{n_2} tels que $\Psi_M^{k_{n_1}}(l)$ et $\Psi_M^{k_{n_2}}(l)$ soient homothétiques. Ainsi, les deux échanges $((\Psi_M^{k_{n_1}}(l)); (321))$ et $((\Psi_M^{k_{n_2}}(l)); (321))$ seraient équivalents. Ceci entraînerait que le chemin, dans le graphe G du paragraphe 1.4, suivi par l'orbite de $T_{\sigma,l}$ sous l'action de Ψ serait ultimement périodique de période inférieure ou égale à $|k_{n_1} - k_{n_2}|$, car deux échanges équivalents suivent le même chemin dans le graphe G. Ceci implique que le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β) est ultimement périodique. Finalement, le théorème 1.6.5 entraîne que α et β appartiennent à un même corps quadratique. $\square$

Nous sommes, à présent, en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.7.8. *Le codage de rotation de paramètres admissibles (α, β), définit une suite substitutive primitive si et seulement si α et β appartiennent à un même corps quadratique.*

Preuve. La preuve est immédiate d'après les propositions 1.7.4 et 1.7.6.

Remarque 1.7.9. *D. Crisp, W. Moran, A. Pollington et P. Shiue [69] caractérisent les suites sturmiennes caractéristiques qui sont points fixes de substitutions non triviales en fonction du développement en fraction continue de leur angle. En utilisant les arguments que nous avons développés dans ce paragraphe, on peut montrer qu'une suite sturmienne caractéristique est substitutive primitive si et seulement si son angle est un nombre quadratique.*

La méthode basée sur l'étude des mots de retour, développée pour démontrer la proposition 1.7.6, pourrait également se généraliser au cas de l'induction de Rauzy pour les échanges de n intervalles.

1.8 Application

Nous allons maintenant établir une version précisée du théorème 1.7.8 que nous utilisons dans [2] pour obtenir des résultats sur la répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous déduirons alors d'un de ces résultats une propriété de déséquilibre pour les codages de rotations étudiés au paragraphe 1.7.

1.8.1 Application à la répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$

Le théorème suivant représente d'une certaine façon une synthèse de l'étude que nous avons menée sur les codages de rotations non dégénérés. Il montre que lorsque les paramètres d'un codage de rotation non dégénéré appartiennent à un même corps quadratique, des phénomènes d'autosimilarité interviennent dans ce codage. Il permet ainsi d'établir le bon cadre d'étude du problème de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous traitons dans [2].

Théorème 1.8.1. *Soit U un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α, β). Supposons que α et β appartiennent à un même corps quadratique, alors :*
si $\alpha \leq \beta$ (respectivement $\alpha > \beta$), il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ et une substitution ξ sur $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$U = \phi(X_\xi) \text{ (respectivement } U = a\mathcal{S}(\phi(X_\xi))\text{)},$$

où $X_\xi = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe non périodique de ξ et $\mathcal{S}$ désigne le shift usuel sur $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$.

De plus, dans les deux cas, ξ vérifie :
i) ξ est une substitution primitive, $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$,
ii) la matrice d'incidence de ξ admet trois valeurs propres simples réelles θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$, avec $\theta > 1$.

Démonstration. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 1.7.4 que si $\alpha \leq \beta$, il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ et une substitution primitive ξ sur $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$U = \phi(X_\xi)$$

où $X_\xi = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe non périodique de ξ. De plus, ξ est une substitution primitive telle que $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$.

Lorsque $\alpha > \beta$, nous rappelons que l'équation (1.3) entraîne que $U = aS(\overline{V})$, où V est le codage de rotation de paramètres $(1-\alpha, 1-\beta)$. Ainsi, $V = \phi(X_\xi)$, où ϕ et X_ξ sont donnés comme précédemment car $1-\alpha \geq 1-\beta$. Finalement, on obtient que $\overline{V} = \phi'(X_\xi)$, où ϕ' est un morphisme de monoïde libre de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$, puisque l'application — est également un morphisme de monoïde libre.

Démontrons à présent la partie ii) du théorème. Notons M_ξ la matrice d'incidence de la substitution ξ. Le polynôme caractéristique de M_ξ, $P_{M_\xi}(t)$, est de degré trois et à coefficients dans $\mathbb{Z}$, car $M_\xi \in \mathcal{M}_3(\mathbb{N})$. Il existe donc trois entiers relatifs a, b et c tels que $P_{M_\xi}(t) = -t^3 + at^2 + bt + c$. Dans la preuve de la proposition 1.7.4, nous avons introduit des matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ et montré que la matrice M_ξ est obtenue comme produit de matrices de cette forme. Comme pour tout entier k, le déterminant des matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ est égal à 1, le déterminant de la matrice M_ξ est lui aussi égal à 1. Ainsi $P_{M_\xi}(t) = -t^3 + at^2 + bt + 1$. Or, il est facile de vérifier que pour tout entier k, les matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ admettent le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme point fixe et ainsi 1 est valeur propre de M_ξ. Il vient donc $P_{M_\xi}(1) = 0$, d'où $a = -b$. Finalement $P_{M_\xi}(t) = -t^3 + at^2 - at + 1$, avec $a \in \mathbb{Z}$. Le polynôme P_{M_ξ} est donc un polynôme réciproque à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et admettant 1 comme racine. Comme de plus M_ξ est une matrice primitive positive, d'après le théorème de Perron-Frobenius, une des valeurs propres de M_ξ est réelle positive et domine strictement toutes les autres en module ; notons la θ. Il suit que M_ξ admet trois valeurs propres réelles disctinctes (et donc simples) θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$. $\square$

Le fait que, dans le théorème 1.8.1, 1 soit valeur propre de la matrice d'incidence de la substitution ξ est capital pour l'obtention des résultats que nous exposons dans la suite. Bien qu'il existe des arguments géométriques profonds pour le justifier (voir [245]), il est intéressant d'en obtenir une démonstration matricielle élémentaire. Celle que nous donnons dans cette preuve utilise le fait que les matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ ont un point fixe commun, ce qui n'est pas le cas des matrices A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$. Ainsi, comme pour la preuve de la primitivité de la substitution ξ, notre algorithme multiplicatif d'induction permet l'obtention d'une preuve naturelle et simple. A l'aide notamment du théorème 1.8.1, nous montrons dans [2] le résultat suivant :

Théorème 1.8.2. *Considérons un couple $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$ tel que α soit un nombre irrationnel et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Supposons de plus que α et β appartiennent à un même corps quadratique, il existe alors une constante c strictement positive telle que :*

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta \right) \right| > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

La démonstration de ce théorème est basée sur l'utilisation du théorème 1.8.1 et d'un système de numération généralisé associé à un point fixe de substitution, introduit par J.-M. Dumont et A. Thomas [92] et G. Rauzy [205]. Ce résultat est à rapprocher de celui de V. T. Sós [232], que nous rappelons ici :

Théorème 1.8.3 (Sós [232]). *Soit α un nombre irrationnel. Il existe une constante c, strictement positive et indépendante de α, telle que pour presque tout β au sens de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, on ait :*

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta \right) \right| > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

D'après un résultat de H. Kesten [146], notons que pour tout α irrationnel et $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ la suite $\left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

1.8.2 Propriété de déséquilibre pour les codages de rotations non dégénérés

Nous allons à présent utiliser le théorème 1.8.2 pour prouver que le langage de certains codages de rotations non dégénérés est assez irrégulier en un sens que nous précisons.

Définition 1.8.4. *Considérons un alphabet fini $\mathcal{A}$ et un mot infini ω, $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On dit que ω est C-équilibré si :*

$$\forall i \in \mathcal{A},\ \forall (v, w) \in \mathcal{L}(\omega),\ |v| = |w| \Rightarrow -C \leq |v|_i - |w|_i \leq C.$$

On dit que ω est équilibré lorsque ω est 1*-équilibré.*

Les suites équilibrées apériodiques sur un alphabet binaire ont été caractérisées par E. M. Coven et G. A. Hedlund [68], ce sont les suites sturmiennes. Une généralisation de ce résultat au cas d'un alphabet fini quelconque est donnée par P. Hubert [135] qui utilise un résultat de R. L. Graham [122]. Un théorème de H. Kesten [146] implique que la condition $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est équivalente au fait que le codage de rotation de paramètres (α, β) est c-équilibré, pour un certain c. Dans le même esprit, les auteurs de [63] exhibent des suites d'Arnoux-Rauzy qui ne sont pas des codages naturels de rotations bi-dimensionnelles (au sens de [23]) en montrant qu'elles ne satisfont pas à la propriété de c-équilibre (pour aucun c). Dans [41], V. Berthé et R. Tijdeman introduisent une mesure d'équilibre pour des suites multi-dimensionnelles dont une version unidimensionnelle est donnée par la définition suivante :

Définition 1.8.5. *Étant donnée une suite U définie sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, on définit la fonction d'équilibre de U de la façon suivante :*

$$B_U(n) = \max_{a\in\mathcal{A}} \max_{w,w'\in\mathcal{L}_n(U)} \left\{\left||w|_a - |w'|_a\right|\right\}.$$

Ainsi une suite est c-équilibrée si et seulement si sa fonction d'équilibre est majorée par c. Notamment, lorsque $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, la fonction d'équilibre du codage de rotation de paramètres (α, β) n'est pas bornée. Nous allons à présent préciser ce résultat.

Théorème 1.8.6. *Soit U un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α, β). Supposons que α et β appartiennent à un même corps quadratique, il existe alors une constante c strictement positive telle que :*

$$B_U(N) > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

Démonstration. Considérons c un réel strictement positif vérifiant les hypothèses du théorème 1.8.2. Il vient alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right)\right| > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N. Ceci implique, d'après la définition 1.2.1, que :

$$||U_N|_a - N\beta| > c \log N \text{ pour une infinité d'entiers } N, \tag{1.7}$$

où $U_N = u_0 u_1 \ldots u_{N-1}$ désigne le préfixe de longueur N de U.
Raisonnons par l'absurde en supposant que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_0, \quad B_U(n) \leq c \log n. \tag{1.8}$$

Pour tout $k \geq N_0$, notons w_k, $w_k \in \mathcal{L}_k(U)$, un mot vérifiant :

$$\forall w \in \mathcal{L}_k(U), \quad |w|_a \geq |w_k|_a.$$

Alors, pour $n \geq N_0$, $l \geq N_0$ et $w \in \mathcal{L}_{nl}(U)$, il vient d'après (1.8) :

$$0 \leq |w|_a - l|w_n|_a \leq l(c \log n)$$

et

$$0 \leq |w|_a - n|w_l|_a \leq n(c \log l).$$

En soustrayant, on obtient :

$$-n(c \log l) \leq n|w_l|_a - l|w_n|_a \leq l(c \log n),$$

puis

$$-c\frac{\log l}{l} \leq \frac{|w_l|_a}{l} - \frac{|w_n|_a}{n} \leq c\frac{\log n}{n}.$$

La suite $\left(\frac{|w_n|_a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy. Il existe ainsi un réel λ, limite de cette suite, vérifiant :

$$0 \leq \lambda - \frac{|w_n|_a}{n} \leq c\frac{\log n}{n}. \tag{1.9}$$

Souvenons-nous que l'équation (1.8) entraîne, pour $n \geq N_0$:

$$0 \leq |U_n|_a - |w_n|_a \leq c \log n,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \frac{|U_n|_a}{n} - \frac{|w_n|_a}{n} \leq c\frac{\log n}{n}.$$

En retranchant l'équation (1.9), il suit :

$$-c\frac{\log n}{n} \leq \frac{|U_n|_a}{n} - \lambda \leq c\frac{\log n}{n}.$$

La suite $\left(\frac{|U_n|_a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers λ. Mais l'équirépartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ implique alors que $\lambda = \beta$. Finalement, on obtient :

$$\forall n \geq N_0, \ \ ||U_n|_a - n\beta| \leq c \log n,$$

ce qui contredit l'équation (1.7). □

Dans ce paragraphe nous avons obtenu des propriétés arithmétiques et combinatoires pour certains codages de rotations non dégénérés. La comparaison de ces résultats aux différentes traductions que nous avons données, dans ce même paragraphe, du théorème de H. Kesten [146], met en évidence la différence des comportements arithmétiques et combinatoires des codages de rotations suivant que leurs paramètres (α, β) vérifient ou non $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

1.9 Quelques remarques et compléments sur l'article

Nous avons montré comment associer à un échange de trois intervalles ou à un codage de rotation, un développement $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ qui permet de décrire certaines de leurs propriétés (voir paragraphe 1.5). Nous verrons dans la suite, aux chapitres 5, 6 et 7, qu'il peut s'avérer très utile de suivre la démarche inverse, à savoir, considérer dans un premier temps une suite (a_n, i_n) ayant telle ou telle propriété, puis en déduire un résultat sur les échanges d'intervalles ou les codages de rotations associés. Mais existe-t-il toujours un codage de rotation associé et au quel cas combien peut-on en trouver ? Nous allons à présent étudier cette problématique.

Définition 1.9.1. *Une suite $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$, $a_n \in \mathbb{N}$, $i_n \in \{0,1\}$, est dite admissible si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang et si la suite $(i_n)_{n\geq 0}$ n'est pas constante à partir d'un certain rang.*

Proposition 1.9.2. *Soit $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ une suite admissible, alors il existe un unique échange d'intervalle, à homothétie près, telle que le développement $\mathcal{D}$ associé à cet échange soit (a_n, i_n). De plus cet échange d'intervalles satisfait à la condition I.D.O.C.*

Démonstration. Considérons une suite admissible $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. On peut associer à cette suite le produit infini de matrices

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{a_n}^{i_n} \mathcal{B}_{a_n}^{1-i_n},$$

où les matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ ont été introduites au paragraphe 1.7. Alors il existe au moins un échange de trois intervalles dont le développement $\mathcal{D}$ est égal à (a_n, i_n). En effet, si

$$\Lambda_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+,\ \ x+y+z=1\},$$

la suite

$$\left(\prod_{n=0}^{N} \mathcal{A}_{a_n}^{i_n} \mathcal{B}_{a_n}^{1-i_n}\right)(\Lambda_3)$$

est une suite décroissante d'ensembles fermés non vides. L'intersection de ces ensembles est donc non vide. Il suffit alors de considérer un échange de trois intervalles défini par n'importe quel élément de cette intersection. La suite $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ étant admissible, on vérifie aisément qu'un tel échange d'intervalles satisfait nécessairement à la condition I.D.O.C. (la définition de l'admissibilité a été conçue pour cela). Plus précisément, pour un échange de trois intervalles T ne satisfaisant pas à la condition I.D.O.C., il existe un intervalle admissible tel que l'induit de l'échange sur cet intervalle soit un échange de deux intervalles (ou de façon équivalente, un échange de trois intervalles dont une longueur est nulle). Ceci entraîne justement que si

$$T \in \left(\prod_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{a_n}^{i_n} \mathcal{B}_{a_n}^{1-i_n}\right)(\Lambda_3),$$

alors la suite $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ n'est pas admissible.

Considérons à présent un échange d'intervalles T dont le développement $\mathcal{D}$ est $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. Un résultat de W. Veech (Lemme 1.7 dans [244]) implique que le nombre de mesures de probabilité ergodiques distinctes pour l'échange T est égal à la dimension de l'ensemble limite

$$S(T) = \left(\prod_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{a_n}^{i_n} \mathcal{B}_{a_n}^{1-i_n}\right)(\Lambda_3).$$

Comme tout échange de trois intervalles est uniquement ergodique (ce sont des induits de rotations uniquement ergodiques), on obtient que la dimension de $S(T)$ est égale à un. Ainsi, T est unique à homothétie près. □

Nous pouvons également préciser la proposition 1.3.5, en donnant le résultat suivant.

Proposition 1.9.3. *Soient $T = (\lambda; (321))$ un échange de trois intervalles et k un entier. Alors il existe un unique couple (α, β), $\alpha < \beta$, tel que l'application de premier retour de la rotation R_α sur l'intervalle $[0, \beta[$, notée $P_{[0,\beta[}(R_\alpha)$, soit un échange de trois intervalles homothétique à T, et $\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor = k$.*

Démonstration. La preuve de l'existence est analogue à celle de la proposition 1.3.5.

Soit $T = ((l_1, l_2, l_3); 321)$ un échange de trois intervalles et k un entier. Considérons l'échange de quatre intervalles $T_1 = ((l_1, l_2, l_3, (k+1)l_2 + kl_3); (3412))$, puis l'échange T_1 normalisé, noté $\widetilde{T_1}$, défini par la permutation (3412) et le vecteur :

$$\left(\frac{l_1}{l_1 + (k+1)l_2 + kl_3}, \frac{l_2}{l_1 + (k+1)l_2 + kl_3}, \frac{l_3}{l_1 + (k+1)l_2 + kl_3}, \frac{l_2}{l_1 + (k+1)l_2 + kl_3}\right).$$

Posons alors $\alpha = \frac{l_2+l_3}{l_1+(k+1)l_2+kl_3}$ et $\beta = \frac{l_1+l_2+l_3}{l_1+(k+1)l_2+kl_3}$. On obtient aisément que $\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor = k$. Considérons alors la rotation de paramètres (α, β). L'application de premier retour associée à cette rotation, sur l'intervalle $[0, \beta[$, P_β^α, est l'échange de trois intervalles suivant :

$$P_{[0,\beta[}(R_\alpha) = \left(\left(\frac{l_1}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_2}{l_1 + (k+1)l_2 + kl_3}, \frac{l_3}{l_1 + (k+1)l_2 + kl_3}\right); (321)\right).$$

Ainsi, $P_{[0,\beta[}(R_\alpha) \sim T$.

Pour démontrer l'unicité du couple (α, β), supposons qu'il existe deux couples (α, β) et (α', β') vérifiant les conditions précédentes. Nous avons déjà remarqué au paragraphe 1.3 que l'application $P_{[0,\beta[}(R_\alpha)$ est alors homothétique à l'échange de trois intervalles normalisé suivant :

$$T = \left(\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}, \frac{1 - k\alpha - \beta}{\beta}, \frac{\beta + (k+1)\alpha - 1}{\beta}\right); (321)\right)$$

et que l'application $P_{[0,\beta'[}(R_{\alpha'})$ est homothétique à l'échange de trois intervalles normalisé :

$$T' = \left(\left(\frac{\beta' - \alpha'}{\beta'}, \frac{1 - k\alpha' - \beta'}{\beta'}, \frac{\beta' + (k+1)\alpha' - 1}{\beta'}\right); (321)\right).$$

Comme par hypothèse $P_{[0,\beta[}(R_\alpha)$ et $P_{[0,\beta'[}(R_{\alpha'})$ sont homothétiques, il vient $T = T'$. On en déduit alors facilement que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. □

Nous pouvons alors en déduire la proposition suivante.

Proposition 1.9.4. *Soient $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$ une suite admissible et k un entier, alors il existe un unique codage de rotation de paramètres admissibles (α, β) (voir définition 1.2.1), dont le développement $\mathcal{D}$ est (a_n, i_n) et tel que $\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor = k$.*

Démonstration. La preuve découle des deux propositions précédentes. □

Chapitre 2

Répartition des suites $(n\alpha)_{n\geq 0}$ et substitutions

Dans ce chapitre nous utilisons les résultats démontrés précédemment pour étudier la répartition des rotations quadratiques du tore de dimension un. Ce chapitre a fait l'objet d'un article accepté pour publication dans la revue *Acta Arithmetica.*

2.1 Introduction

Il est connu depuis les travaux de H. Weyl [249], P. Bohl [46] et W. Sierpinski [226, 227], que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si α est irrationnel. Etant donné un nombre irrationnel α, $\alpha \in [0,1[$, on définit la discrépance à l'origine de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta\in[0,1[} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right) \right|.$$

Cette quantité mesure la déviation de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à une répartition idéale. (Ici $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionaire de x.) De nombreux auteurs ont étudié $D_N^*(\alpha)$ pour α irrationnel, notamment pour les plus récents citons : C. Baxa [25, 26], C. Baxa et J. Schoissengeier [27], Y. Dupain [95], Y. Dupain et V. T. Sós [97], J. Lesca [158], L. Ramshaw [198], H. Niederreiter [179], J. Schoissengeier [217, 218], V. T Sós [232]. De nombreuses références complémentaires pourront être trouvées dans l'ouvrage de L. Kuipers et H. Niederreiter [152] et plus récemment dans celui de M. Drmota et R. F. Tichy [89].

Si $\beta \in [0,1[$, on définit également la quantité

$$\Delta_N^*(\alpha,\beta) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right) \right|,$$

que nous appellerons discrépance locale à l'origine de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ en β. Les principaux résultats concernant l'étude de la discrépance locale des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été obtenus par H. Kesten [146], Y. Dupain [94], Y. Dupain et V. T. Sós [96]. Plus récemment C. Pinner [192, 193], a obtenu des résultats similaires en étudiant certaines sommes liées à la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons que :

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta\in[0,1[} (\Delta_N^*(\alpha,\beta)).$$

De façon générale, les résultats de discrépance sur les suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été obtenus en utilisant le développement en fractions continues du nombre α et des systèmes de numérations directement issus de ce développement, comme le système de numération d'Ostrowski [186].

Notre but est d'étudier le comportement asymptotique de $\Delta_N^*(\alpha,\beta)$ lorsque α est un nombre quadratique et $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Pour cela, nous n'utilisons pas les systèmes de numérations classiques évoqués précédemment. Nous basons notre travail sur l'étude, menée dans [5], d'une classe particulière de suites symboliques définies sur un alphabet binaire. Dans le paragraphe 2.4, nous introduisons un système de numération généralisé associé à une substitution, introduit par G. Rauzy [205], J-M. Dumont et A. Thomas [92]. Cet outil est fondamental pour notre étude, il remplace en quelque sorte le système de numération d'Ostrowski utilisé habituellement.

Le travail que nous présentons ici est fondé sur une idée introduite, à travers un exemple, par G. Rauzy [203, 205]. Un des intérêts de cette nouvelle approche est d'obtenir ultérieurement des résultats de répartition pour des suites multi-dimensionnelles. En effet, l'absence de bon équivalent multi-dimensionnel au développement en fractions continues constitue un frein important à la compréhension des suites de Kronecker par des méthodes généralisant directement celles utilisées usuellement en dimension 1. De plus, les seuls exemples connus d'ensembles non triviaux à restes bornés pour les suites de Kronecker sont obtenus à l'aide du système de numération que nous utilisons au paragraphe 2.4. Ces ensembles sont à frontière fractale et possèdent de nombreuses propriétés géométriques, ergodiques et combinatoires. Le plus célèbre d'entre eux est étudié par G. Rauzy [202], il est connu sous le nom de fractal de Rauzy.

2.2 Résultats et notations

Considérons un couple (α,β), $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Introduisons la quantité suivante :

$$\omega_N^+(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right).$$

Alors :

$$\Delta_N^*(\alpha,\beta) = |\omega_N^+(\alpha,\beta)|.$$

L'intervalle $[0,\beta[$ sera dit à restes majorés (respectivement minorés) si la suite $(\omega_N^+(\alpha,\beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée). Il sera dit à restes bornés s'il est à la fois à restes majorés et à restes minorés, ce qui revient à dire que la suite $(\Delta_N^*(\alpha,\beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il est déjà connu, d'après un résultat de H. Kesten [146], que la suite $(\Delta_N^*(\alpha,\beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

Dans le paragraphe 2.5, nous démontrons les résultats suivants :

Théorème 1 *Soit $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, tel que α soit un nombre quadratique et $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Nous exhibons un algorithme calculant les quantités :*

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n},$$

$$\liminf_{n\to\infty} \tfrac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n}$$

$$et \quad \limsup_{n\to\infty} \tfrac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n}.$$

De plus, l'intervalle $[0,\beta[$ est à restes majorés (respectivement minorés) pour la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = 0$ (respectivement $\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = 0$).

Corollaire *Considérons un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$ pour lequel α désigne un nombre irrationnel quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$. Il existe alors une constante c strictement positive, calculable explicitement, telle que :*

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha,\beta)}{\log N} > c,$$

pour une infinité d'entiers N.

Rappelons que V. T. Sós [232] a montré que la conclusion du corollaire précédent est en fait vérifiée par presque tout β au sens de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$. Nous proposons donc une réalisation effective, pour certains β, du résultat métrique de V. T. Sós.

Dans le paragraphe 2.6, nous obtenons également, en appliquant notre méthode dans le cas d'un exemple précis, le résultat suivant :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{1}{2})}{\log n}.$$

2.3 Liens entre problèmes de répartition et suites symboliques

Etant donné un nombre irrationnel α, $\alpha \in [0,1[$, nous nous intéressons aux problèmes de répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à un intervalle $[0,\beta[$, où $\beta \in [0,1[$. Plus précisément, nous cherchons à comprendre le comportement asymptotique des quantités $\omega_N^+(\alpha,\beta)$ et donc $\Delta_N^*(\alpha,\beta)$, introduites aux paragraphes 2.1 et 2.2. Nous montrons, dans ce paragraphe, que cette étude est intimement liée à la bonne compréhension de certaines suites symbolique. Nous exhibons parmi ces suites symboliques celles faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité.

Considérons donc un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Introduisons alors la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'alphabet binaire $\{a,b\}$ par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Cette suite symbolique contient exactement l'information nécessaire et suffisante pour évaluer les quantités que nous désirons étudier. En effet, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \big(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\big) = |u_0u_1\ldots u_{N-1}|_a - N\beta.$$

Remarquons que le codage U de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être vu comme une opération de simplification, en ce sens qu'il paraît plus aisé d'étudier une suite définie sur un alphabet fini qu'une suite à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$. Nous devons donc à présent comprendre l'évolution du nombre de a apparaissant dans un préfixe arbitraire de U. Lorsque la suite U fait intervenir des phénomènes d'autosimilarité, c'est-à-dire si U est liée à un point fixe de substitution, nous verrons au paragraphe 2.4 qu'il existe un outil puissant pour mener cette étude.

Nous avons précédemment montré le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 ([5]). *Soit $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, un couple tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ et U la suite définie sur l'alphabet $\{a,b\}$ à partir du couple (α,β), comme en (2.1). Alors :*

si $\alpha \leq \beta$ *(respectivement* $\alpha \geq \beta$*), il existe un morphisme de monoïde libre* ϕ *de* $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ *vers* $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ *et une substitution* ξ *sur* $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ *tels que :*

$$U = \phi(X_\xi) \ \textit{(respectivement } U = a\mathcal{S}(\phi(X_\xi))\textit{)},$$

où $X_\xi = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ *est point fixe non périodique de* ξ *et* $\mathcal{S}$ *désigne le shift usuel sur* $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$*.*

De plus, dans les deux cas, ξ *vérifie :*

i) ξ *est une substitution primitive,* $\xi(1)$ *commence par 1 et* $|\xi(1)| \geq 2$*,*

ii) la matrice d'incidence de ξ *admet trois valeurs propres simples réelles* θ*, 1 et* $\frac{1}{\theta}$*, avec* $\theta > 1$*.*

Dans [5], nous remarquons qu'une suite U associée à un couple (α,β) comme en (2.1) est intimement liée à un échange de trois intervalles. Nous montrons, par un raisonnement d'induction, qu'il est possible d'obtenir cette suite en itérant quatre substitutions définies sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ à partir de la lettre 1 puis en projetant la suite ainsi obtenue à l'aide d'un morphisme de monoïde libre de $\{1,2,3\}^*$ vers $\{a,b\}^*$. L'ordre d'itération des substitutions est déterminé par un algorithme de type “fractions continues” développant les paramètres α et β. Nous montrons que cet algorithme vérifie un théorème de type Lagrange, le développement associé au couple (α,β) étant ultimement périodique si et seulement si α et β appartiennent à un même corps quadratique . Les conditions imposées sur les paramètres (α,β) dans le théorème précédent sont donc équivalentes au fait que le développement de type “fractions continues” associé aux paramètres soit ultimement périodique. Notons que ce développement nous permet de déterminer les applications ϕ, ξ (et donc la valeur de θ) introduites dans le théorème 2.3.1.

Dans toute la suite les couples (α,β) considérés vérifieront les hypothèses du théorème 2.3.1.

Supposons que $\alpha \leq \beta$. D'après le théorème 2.3.1, la suite U est alors obtenue comme image du point fixe de la substitution ξ par la projection ϕ. Soit $U_n = u_0u_1\dots u_{n-1}$ le préfixe de longueur n de la suite U. Si $X_k = x_0x_1\dots x_{k-1}$ désigne le préfixe de longueur k de la suite X_ξ, il existe alors un unique entier N_n tel que $\phi(x_0x_1\dots x_{N_n-1})$ soit un préfixe de $u_0u_1\dots u_{n-1}$ et $u_0u_1\dots u_{n-1}$ soit un préfixe strict de $\phi(x_0x_1\dots x_{N_n})$.
Posons :

$$S_n(U) = \#\left\{0 \leq k < n, u_k = a\right\} + \frac{\beta}{\beta-1}\#\left\{0 \leq k < n, u_k = b\right\}.$$

Alors :

$$S_n(U) = \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{1-\beta}.$$

Ainsi, en associant respectivement les “poids” 1 et $\frac{\beta}{\beta-1}$ aux lettres a et b, le poids $S_n(U)$ du préfixe de longueur n de la suite U est un multiple de $\omega_n^+(\alpha,\beta)$. Nous allons maintenant montrer qu'en associant les “bons poids” aux lettres 1, 2 et 3, les poids des préfixes du point fixe de la substitution ξ nous renseigneront sur $\omega_n^+(\alpha,\beta)$. Cette étape nous permettra de travailler directement avec la suite X_ξ et d'oublier ensuite la projection ϕ. Pour cela, nous introduisons l'application f définie de $\{1,2,3\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(i) = |\phi(i)|_a + \frac{\beta}{\beta-1}|\phi(i)|_b, \text{ pour } i \in \{1,2,3\}. \tag{2.2}$$

Si $m \in \{1,2,3\}^*$, on pose

$$S^{(f)}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^{k} f(a_j) & \text{si } m = a_1a_2\dots a_k, a_j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Alors, comme $\beta - 1 < 0$:

$$S^{(f)}(X_{N_n}) + C\frac{\beta}{\beta - 1} < S_n(U) < S^{(f)}(X_{N_n}) + C,$$

où $C = \max\{|\phi(1)|, |\phi(2)|, |\phi(3)|\}$. On obtient donc :

$$(1-\beta)S^{(f)}(X_{N_n}) - C\beta < \omega_n^+(\alpha,\beta) < (1-\beta)S^{(f)}(X_{N_n}) + C(1-\beta)$$

et ainsi

$$\omega_n^+(\alpha,\beta) = (1-\beta)S^{(f)}(X_{N_n}) + O(1). \tag{2.3}$$

On remarquera de plus que $N_n \leq n \leq C(N_n + 1)$, et du fait que la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend toutes les valeurs entières, nous pouvons déduire les égalités suivantes :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = (1-\beta) \limsup_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_n})}{\log N_n} = (1-\beta) \limsup_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_n)}{\log n} \tag{2.4}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = (1-\beta) \liminf_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_n})}{\log N_n} = (1-\beta) \liminf_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_n)}{\log n}. \tag{2.5}$$

D'après [179] les quantités introduites dans les deux équations précédentes sont finies dès que α est à quotients partiels bornés, ce qui est bien sûr le cas lorsque α est quadratique.

Remarque 2.3.2. *Le théorème 2.3.1 implique que les égalités (2.3), (2.4) et (2.5) sont vérifiées même si $\alpha \geq \beta$.*

Il est déjà connu, d'après un résultat de H. Kesten [146], que la suite $(\Delta_N^*(\alpha,\beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. C'est pourquoi, il ne faut pas voir la condition $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ comme trop restrictive pour notre étude.

D'après l'équation 2.3, l'intervalle $[0, \beta[$ est un intervalle à restes majorés (respectivement minorés) pour la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $(S^{(f)}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée).

2.4 Systèmes de numération généralisés et substitutions

Nous voilà ainsi conduits à évaluer une somme liée à un point fixe de substitution primitive. Pour cela, nous allons utiliser un système de numération associé à la substitution $\xi\cdot$ Ce système est introduit par J. M. Dumont et A. Thomas [92] sous une forme classique. Dans [205], G. Rauzy en donne une version plus visuelle à l'aide de l'automate des préfixes. C'est ce point de vue que nous avons choisi d'adopter.

Définition 2.4.1. *Considérons une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A}$. Le sous ensemble de $\mathcal{A}^*$ formé des préfixes stricts des images par σ des éléments de $\mathcal{A}$ sera noté $Pref$ ou $Pref_\sigma$ si une confusion est possible. L'automate des préfixes associé à la substitution σ est défini par :*

- *$\mathcal{A}$ est l'ensemble des états de l'automate,*
- *$Pref$ est l'ensemble des étiquettes,*
- *il existe une flèche de l'état a vers l'état b étiquetée par le mot m si mb est un préfixe de $\sigma(a)$.*

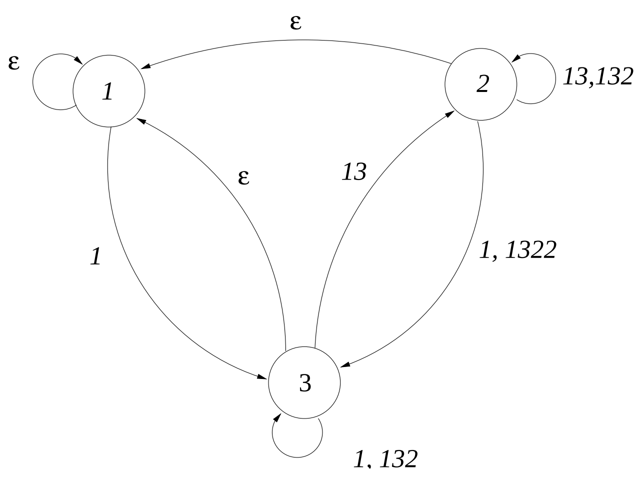


FIG. 2.1 – Exemple d'automate des préfixes dans le cas de la substitution $1 \longmapsto 13\,,2 \longmapsto 13223\,,3 \longmapsto 1323$.

Définition 2.4.2. *Un chemin étiqueté $\mathcal{C}$ reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ sera noté sous la forme*

$$((i_0, i_1, E_0), (i_1, i_2, E_1), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))\,,$$

$i_j \in \mathcal{A}$ pour $0 \leq j \leq n$, $E_j \in Pref_\sigma$ pour $0 \leq j \leq n-1$. L'entier n désigne la longueur du chemin. On appellera suite des états associée au chemin $\mathcal{C}$ la suite $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ et suite des étiquettes associée au chemin $\mathcal{C}$ la suite $(E_0, E_1, \ldots, E_{n-1})$.
L'ensemble des chemins étiquetés de longueur n reconnaissables par l'automate des préfixes associé à σ sera noté $\mathcal{C}_\sigma^n$.
On appellera chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ, une suite $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, $i_j \in \mathcal{A}$ pour $0 \leq j \leq n$, pour laquelle il existe un chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$.

Le principal théorème concernant l'automate des préfixes associé à un point fixe de substitution est le suivant :

Théorème 2.4.3 (Dumont et Thomas [92], Rauzy [205]). *Conservons les notations de la définition 2.4.1 et supposons de plus qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(a)$ commence par a et $|\sigma(a)| \geq 2$. Notons alors X_σ l'unique point fixe de σ commençant par a.*
i) Pour tout entier N, il existe un unique chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_σ, partant de a et étiqueté par la suite $(E_0, E_1 \ldots E_n)$ tel que $E_0 \neq \varepsilon$ et $X_N = \sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\ldots E_n$, où X_N désigne le préfixe de longueur N de la suite X_σ.
ii) Inversement, à un tel chemin correspond un unique préfixe non vide de X_σ, donné par la formule précédente.
iii) De plus, $|\sigma^n(a)| \leq N < |\sigma^{n+1}(a)|$.

Revenons pour l'instant à notre substitution ξ. Pour $m \in \{1,2,3\}^*$, notons $L(m) = (|m|_i)_{1 \leq i \leq 3}$. Alors

$$L(\xi(m)) = M_\xi(L(m)).$$

Donc, si i et j sont fixés dans $\{1,2,3\}$, la suite $(|\xi^n(j)|_i)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence dont les coefficients sont ceux du polynôme minimal de M_ξ. Ainsi il existe des reéls $\lambda_{i,j}$, $\lambda'_{i,j}$ et $\lambda''_{i,j}$ tels que pour tout entier n :

$$|\xi^n(j)|_i = \lambda_{i,j}\theta^n + \lambda'_{i,j} + \lambda''_{i,j}(\frac{1}{\theta})^n, \tag{2.6}$$

car, d'après le théorème 2.3.1, M_ξ admet trois valeurs propres simples réelles qui sont θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$, avec $\theta > 1$. De plus, ces coefficients sont déterminés par la relation :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i,j} \\ \lambda'_{i,j} \\ \lambda''_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & 1 & \frac{1}{\theta} \\ \theta^2 & 1 & (\frac{1}{\theta})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\xi^0(j)|_i \\ |\xi(j)|_i \\ |\xi^2(j)|_i \end{pmatrix}.$$

Par primitivité de ξ, la suite positive $(|\xi^n(j)|_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée. On a donc $\lambda_{i,j} > 0$. D'après (2.6), il vient

$$|\xi^n(j)| = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,j}\right)\theta^n + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda''_{i,j}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \tag{2.7}$$

et

$$\begin{aligned} S^{(f)}(\xi^n(j)) &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} |\xi^n(j)|_i f(i) \\ &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,j} f(i)\right)\theta^n + \left(\textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j} f(i)\right) \\ &\quad + \left(\textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda''_{i,j} f(i)\right)(\tfrac{1}{\theta})^n. \end{aligned}$$

D'après l'équation (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} S^{(f)}(\xi^n(j)) = &\left(\textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,j} f(i)\right)\left(\frac{|\xi^n(j)| - (\sum_{i=1}^{3}\lambda'_{i,j}) - (\sum_{i=1}^{3}\lambda''_{i,j})(\frac{1}{\theta})^n}{(\sum_{i=1}^{3}\lambda_{i,j})}\right) \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j} f(i) + \left(\textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda''_{i,j} f(i)\right)(\tfrac{1}{\theta})^n. \end{aligned}$$

Or, de l'équirépartition uniforme des suites $(x + n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in [0,1[$, on déduit aisément que pour tout $j \in \{1,2,3\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(\xi^n(j))}{|\xi^n(j)|} = 0.$$

Il suit que, pour tout $j \in \{1,2,3\}$, $\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,j} f(i)\right) = 0$.

Ainsi $S^{(f)}(\xi^n(j)) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j} f(i)\right)}_{\lambda'(j)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda''_{i,j} f(i)\right)}_{\lambda''(j)}(\frac{1}{\theta})^n$. Finalement, pour tout $j \in \{1,2,3\}$, il existe deux nombres réels calculables explicitement, $\lambda'(j)$ et $\lambda''(j)$, tels que pour tout entier n on ait :

$$S^{(f)}(\xi^n(j)) = \lambda'(j) + \lambda''(j)(\frac{1}{\theta})^n. \tag{2.8}$$

Posons maintenant pour $m \in \{1,2,3\}^*$:

$$\lambda'(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda'(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \dots a_k,\ a_j \in \{1,2,3\}, \end{cases}$$

et

$$\lambda''(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda''(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \dots a_k,\ a_j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ tel que la suite (i,j) est un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ, on pose :

$$M_{(i,j)} = \max\left\{\lambda'(E), \text{ où (i,j,E)} \in \mathcal{C}_\xi^1\right\}$$

et

$$m_{(i,j)} = \min\left\{\lambda'(E), \text{ où (i,j,E)} \in \mathcal{C}_\xi^1\right\}.$$

Nous allons à présent introduire deux nouveaux automates associés à la substitution ξ et construits à partir de l'automate des préfixes associé à ξ.

Définition 2.4.4. *Nous appellerons $\mathcal{A}_{max\xi}$ associé à X_ξ, l'automate défini par :*

- $\{1,2,3\}$ *est l'ensemble des états de l'automate,*
- *l'ensemble des étiquettes est formé des nombres $M_{(i,j)}$ introduits ci-dessus,*
- *il existe une flèche de l'état i vers l'état j, s'il existe $m \in Pref_\xi$ tel que mj soit un préfixe de $\xi(i)$; cette flèche est alors étiquetée par le mot $M_{(i,j)}$.*

Définition 2.4.5. *Nous appellerons $\mathcal{A}_{min\xi}$ associé à X_ξ, l'automate défini par :*

- $\{1,2,3\}$ *est l'ensemble des états de l'automate,*
- *l'ensemble des étiquettes est formé des nombres $m_{(i,j)}$ introduits ci-dessus,*
- *il existe une flèche de l'état i vers l'état j, s'il existe $m \in Pref_\xi$ tel que mj soit un préfixe de $\xi(i)$; cette flèche est alors étiquetée par le mot $m_{(i,j)}$.*

Remarque 2.4.6. *Par construction de $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$, on est assuré que les ensembles des chemins (non étiquetés) reconnaissables par chacun des trois automates que nous avons définis sont identiques. En fait $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$ peuvent être vus comme deux "sous-automates" de l'automate des préfixes associé à ξ, en ce sens que tout chemin (non étiqueté) reconnaissable par l'un de ces deux automates est un chemin (non étiqueté) reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ.*

On peut remarquer que dans les deux automates définis précédemment, une flèche de l'état i vers l'état j est nécessairement étiquetée par le nombre $M_{(i,j)}$ dans le premier automate et $m_{(i,j)}$ dans le second. Nous pourrons donc confondre les notions de chemin et de chemin étiqueté reconnaissable par ces automates. On notera ainsi $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, pour chacun de ces deux automates, l'unique chemin (étiqueté) de longueur n dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$. Compte tenu de cette nouvelle notation et de la remarque 2.4.6, nous pouvons définir les deux quantités suivantes pour tout chemin $(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) \in \mathcal{C}_\xi^{n+1}$:

$$P_M(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} M_{i_k, i_{k+1}},$$

et

$$P_m(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} m_{i_k, i_{k+1}}.$$

Nous devons à présent définir une notion très utile pour obtenir des résultats précis à l'aide de ce type d'automates.

Définition 2.4.7. *Etant donné un automate dont l'ensemble des états est noté $\mathcal{A}$, on appelle boucle élémentaire tout chemin étiqueté reconnaissable par l'automate de la forme*

$$((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1})), \ \ (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{A}^{n+1},$$

satisfaisant les deux conditions suivantes :
- $i_o = i_n$
- $i_k \neq i_j, \ \forall \ 0 \leq j, k < n$.
On notera $\mathcal{E}l$ l'ensemble des boucles élémentaires de l'automate.

Remarque 2.4.8. *Comme les deux automates, $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$, ne comportent que trois états puisque ξ est définie sur un alphabet à trois lettres et que chacune de leurs flèches ne porte qu'une seule étiquette, ils ne peuvent compter plus de 8 boucles élémentaires, à état de départ près. Ces boucles sont, si elles existent :*

$$(1,1), (2,2), (3,3), (1,2,1), (1,3,1), (2,3,2), (1,2,3,1), (1,3,2,1).$$

Dans le cas de l'automate de la figure 2.1, les boucles élémentaires sont :

$$(1,1), (2,2), (3,3), (1,3,1), (2,3,2), (1,3,2,1).$$

2.5 Les principaux résultats

On introduit les quantités suivantes :
$M = \max\left\{\frac{P_M(B)}{|B|}, \ B \in \mathcal{E}l\right\}$,
$m = \min\left\{\frac{P_m(B)}{|B|}, \ B \in \mathcal{E}l\right\}$,
$A = \max\{|M|, |m|\}$.
Nous rappelons que θ est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de ξ introduite dans le théorème 2.3.1.

Théorème 2.5.1. *Avec les notations précédentes, les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} M,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} m$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} A.$$

Remarque 2.5.2. *Soit $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, un couple tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Le théorème 2.5.1 nous dit que l'on peut alors calculer algorithmiquement les quantités*

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n},$$

$$\liminf_{n\to\infty} \tfrac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n}$$

$$\text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \tfrac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n},$$

à l'aide de l'algorithme développé dans [5] qui, partant du développement ultimement périodique d'un couple de paramètres (α, β), produit la substitution ξ et la projection ϕ définie dans le théorème 2.3.1 .

Dans le lemme suivant, nous montrons que les poids $P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ et $P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ associés à un chemin $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ peuvent être obtenus, à une constante près indépendante de n, en sommant des poids de boucles élémentaires. Ce résultat traduit simplement que, d'une part, le petit nombre d'états des automates contraint tout chemin à repasser régulièrement par les mêmes états et donc à effectuer des boucles, et que d'autre part, l'addition des poids commute avec la concaténation.

Lemme 2.5.3. *Il existe une constante $C' > 0$, telle que pour tout chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_ξ dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, il existe $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$, k éventuellement nul, tels que :*

i) $\left|P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_M(B_i)\right| \leq C'$,

ii) $\left|P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_m(B_i)\right| \leq C'$,

iii) $\left|n - \sum_{i=1}^k |B_i|\right| \leq 2$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la longueur n du chemin. Introduisons la quantité $C' = 2\max\left\{\max\{|P_M(i,j)|,\, |P_m(i,j)|\},\, (i,j) \in \{1,2,3\}^2\right\}$. Considérons un chemin de longueur 1, (i_0, i_1). Alors $|P_M(i_0, i_1) - 0| \leq C'$ et $|P_m(i_0, i_1) - 0| \leq C'$. La propriété est ainsi vérifiée pour $n = 1$. De même si (i_0, i_1, i_2) désigne un chemin de longueur 2, $|P_M(i_0, i_1, i_2) - 0| \leq |P_M(i_0, i_1)| + |P_M(i_1, i_2)| \leq C'$ et $|P_m(i_0, i_1, i_2) - 0| \leq |P_m(i_0, i_1)| + |P_m(i_1, i_2)| \leq C'$. De plus l'assertion *iii)* est satisfaite puisque k est nul. La propriété est donc également vérifiée pour $n = 2$.

Supposons à présent que $n \geq 3$ et que la propriété est satisfaite pour tout chemin de longueur strictement inférieure à n. Alors comme $(i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \{1, 2, 3\}$, on est assuré qu'il existe $(l, h) \in \{0, 1, 2, 3\}^2$, $l < h$, tel que $i_l = i_h$. Nous pouvons alors poser $h' = min\,\{m,\ m > l, \text{ tel que } i_m = i_l\}$. Ainsi $(i_l, \ldots, i_{h'})$ est une boucle élémentaire et $(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n)$ est un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ dont la longueur est strictement inférieure à n. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$, k pouvant être éventuellement nul, tel que :

$$\left|P_M(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k} P_M(B_i)\right| \leq C',$$

$$\left|P_m(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k} P_m(B_i)\right| \leq C'$$

et

$$\left|(n - (h' - l)) - \sum_{i=1}^{k} |B_i|\right| \leq 1.$$

Or

$$P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_M(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) + P_M(i_l, \ldots, i_{h'})$$

et

$$P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_m(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) + P_m(i_l, \ldots, i_{h'}).$$

Ainsi, en posant $B_{k+1} = (i_l, \ldots, i_{h'})$, il vient :

$$\left|P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k+1} P_M(B_i)\right| \leq C',$$

$$\left| P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k+1} P_m(B_i) \right| \leq C'$$

et

$$\left| n - \sum_{i=1}^{k+1} |B_i| \right| \leq 1,$$

ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du théorème 2.5.1. Considérons un entier N. D'après le théorème 2.4.3, il existe un unique chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_ξ, partant de 1, étiqueté par $(E_0, E_1, \ldots, E_{n_N})$, $E_0 \neq \varepsilon$, et dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_{n_N})$, tel que :

$$X_N = \xi^{n_N}(E_0)\xi^{n_N-1}(E_1)\ldots E_{n_N}.$$

On a donc

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} S^{(f)}(\xi^k(E_{n_N-k})).$$

Puis, d'après l'équation (2.8)

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \lambda'(E_{n_N-k}) + \sum_{k=0}^{n_N} \lambda''(E_{n_N-k})(\frac{1}{\theta})^k.$$

Puisque les E_k appartiennent à l'ensemble fini $Pref_\xi$ et que $\theta > 1$, on peut en déduire que

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \lambda'(E_{n_N-k}) + O(1),$$

où la constante dans le O est indépendante de N. Il vient alors :

$$P_m(i_0, i_1, \ldots, i_{n_N}) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq P_M(i_0, i_1, \ldots, i_{n_N}) + O(1).$$

D'après le lemme 2.5.3, il existe des boucles élémentaires $B_1, B_2, \ldots, B_k$, tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} P_m(B_i) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^{k} P_M(B_i) + O(1).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} \frac{P_m(B_i)}{|B_i|} \right) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} \frac{P_M(B_i)}{|B_i|} \right) + O(1),$$

puis

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} m \right) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} M \right) + O(1). \tag{2.9}$$

De plus, d'après le *iii)* du théorème 2.4.3, $|\xi^{n_N}(1)| \leq N < |\xi^{n_N+1}(1)|$. Ceci implique notamment que

$$n_N \sim \frac{\log N}{\log \theta}, \tag{2.10}$$

et d'après le *iii)* du lemme 2.5.3

$$\frac{m}{\log\theta} + o(1) \le \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \le \frac{M}{\log\theta} + o(1).$$

On en déduit que :

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \le \frac{M}{\log\theta}$$

et

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \ge \frac{m}{\log\theta}.$$

Finalement, d'après les équations (2.4) et (2.5), il vient

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\omega_N^+(\alpha,\beta)}{\log N} \le \frac{M(1-\beta)}{\log\theta}$$

et

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\omega_N^+(\alpha,\beta)}{\log N} \ge \frac{m(1-\beta)}{\log\theta}.$$

Nous allons maintenant construire deux chemins optimisant les inégalités précédentes. Considérons $(i_0, i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{E}l$ vérifiant

$$\frac{P_M(i_0, i_1, \ldots, i_p)}{|(i_0, i_1, \ldots, i_p)|} = M.$$

La primitivité de ξ impliquant la récurrence de la suite X_ξ, l'automate des préfixes associé à ξ est fortement connexe. Il existe donc un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ partant de 1 et joignant i_0. Notons $((a_0, a_1, E_0), (a_1, a_2, E_1), \ldots, (a_{l-1}, i_0, E_{l-1}))$ un tel chemin étiqueté, avec donc $E_0 \neq \varepsilon$ et $a_0 = 1$. Pour tout entier k, on considère le chemin étiqueté suivant :

$$((a_0, a_1, E_0), (a_1, a_2, E_1), \ldots, (a_{l-1}, i_0, E_{l-1})\ ,\ \underbrace{(i_o, i_1, M_{i_0,i_1}), \ldots, (i_{p-1}, i_p, M_{i_{p-1},i_p}))}_{\text{itéré } k \text{ fois}}.$$

Ce chemin de longueur $l + kp$ est reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ, commence par 1 et vérifie $E_0 \neq \varepsilon$. D'après le *ii)* du théorème 2.4.3 et l'étude précédente, il existe un entier N_k tel que :

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + k \sum_{j=0}^{p-1} M_{i_j,i_{j+1}} + O(1),$$

et de plus

$$(l + kp) \sim \frac{\log(N_k)}{\log\theta}.$$

Il vient ainsi

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + kM|(i_0, i_1, \ldots, i_p)| + O(1)$$

et donc

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + kpM + O(1).$$

Finalement

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_k})}{\log(N_k)} = \frac{M}{\log\theta}.$$

En considérant un chemin $(i'_0, i'_1, \ldots, i'_p) \in \mathcal{E}l$ vérifiant

$$\frac{P_m(i'_0, i'_1, \ldots, i'_p)}{|(i'_0, i'_1, \ldots, i'_p)|} = m,$$

on construirait de façon analogue une suite de préfixe de X_ξ, $(X_{N'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N'_k})}{\log(N'_k)} = \frac{m}{\log\theta}.$$

Ceci achève la démonstration d'après les équations (2.4) et (2.5). □

Le corollaire suivant est à rapprocher des résultats obtenus par Y. Dupain et V. T. Sós [96] et plus récemment par C. Pinner [193].

Corollaire 2.5.4. *L'intervalle* $[0, \beta[$ *est à restes majorés (respectivement minorés) si et seulement si* $M = 0$ *(respectivement* $m = 0$*).*

Démonstration. Le fait que $\xi(1)$ commence par 1 implique que $(1, 1, \varepsilon)$ est un chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ. Comme $\lambda'(\varepsilon) = 0$, on obtient que $m \leq 0 \leq M$. Le résultat découle alors immédiatement de l'équation (2.9), obtenue dans la démonstration du théorème 2.5.1, et de la remarque 2.3.2. □

Remarque 2.5.5. *Soit* $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$*, un couple tel que* α *soit un nombre quadratique,* $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ *et* $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$*. Le corollaire 2.5.4 nous dit que l'on peut alors répondre algorithmiquement, à l'aide de l'algorithme développé dans [5], à la question : l'intervalle* $[0, \beta[$ *est-il à restes majorés ou minorés pour la suite* $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Corollaire 2.5.6. *Etant donné un couple* $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$*, si* α *désigne un nombre irrationnel quadratique,* $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ *et* $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$*, alors il existe une constante c strictement positive telle que :*

$$\frac{\Delta^*_N(\alpha, \beta)}{\log N} > c,$$

pour une infinité d'entiers N*.*

Démonstration. D'après le théorème 2.5.1, il vient avec les notations précédentes :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta^*_n(\alpha, \beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} \max\{|M|, |m|\}.$$

Comme $\frac{(1-\beta)}{\log\theta} > 0$, il suffit de montrer que $\max\{|M|, |m|\} > 0$, pour tout couple (α, β) satisfaisant les conditions demandées. Or d'après un théorème de H. Kesten [146], l'intervalle $[0, \beta[$ est à restes bornés si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Ainsi, pour les couples (α, β) que nous considérons, l'intervalle $[0, \beta[$ n'est jamais à restes bornés. Nous sommes donc assurés, par le corollaire 2.5.4, que les quantités m et M ne peuvent être simultanément nulles. Ceci implique donc la stricte positivité de $\max\{|M|, |m|\}$. □

Le corollaire 2.5.6 est à rapprocher des résultats métriques obtenus au début des années 80 par V. T. Sós [232] et à ceux plus généraux obtenus par R. Tijdeman et G. Wagner [240].

Théorème 2.5.7 (Sós [232]). *Soit α un nombre irrationnel. Il existe une constante c, strictement positive et indépendante de α, telle que pour presque tout β au sens de la mesure de Lebesgue sur* $]0,1[$*, on ait :*

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha,\beta)}{\log N} > c,$$

pour une infinité d'entiers N.

2.6 Un exemple détaillé

Dans ce paragraphe, et afin de clarifier l'étude précédente, nous détaillons notre méthode dans le cas d'un exemple précis. Nous en déduisons, en utilisant un résultat de J. Schoissengeier [218], une propriété sur la discrépance de certaines suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$.

Considérons le nombre quadratique $\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Nous nous intéressons à la répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à l'intervalle $[0,\frac{1}{2}[$. Notons $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\frac{1}{2}[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme d'induction que nous décrivons dans [5], G. Rauzy [203] montre que :

$$U = \phi(X_\xi),$$

où ϕ est le morphisme de monoïde libre défini par :

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & \{1,2,3\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{a,b\}^{\mathbb{N}} \\ & 1 & \longmapsto & a, \\ & 2 & \longmapsto & abb, \\ & 3 & \longmapsto & ab, \end{array}$$

et X_ξ est l'unique point fixe commençant par 1 de la substitution primitive ξ définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \xi: & \{1,2,3\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{1,2,3\}^{\mathbb{N}} \\ & 1 & \longmapsto & 13, \\ & 2 & \longmapsto & 13223, \\ & 3 & \longmapsto & 1323. \end{array}$$

On introduit alors l'application f définie, comme dans l'equation (2.2), par :

$$\begin{array}{rrcl} f: & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & 1 & \longmapsto & 1, \\ & 2 & \longmapsto & 1-1-1=-1, \\ & 3 & \longmapsto & 1-1=0. \end{array}$$

Nous allons à présent calculer les coefficients $\lambda'(j)$, $j\in\{1,2,3\}$, introduits dans l'équation (2.8). La matrice d'incidence de ξ, notée M_ξ, est donnée par :

$$M_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M_ξ est le polynôme réciproque suivant :

$$P_{M_\xi}(t) = -t^3 + 5t^2 - 5t + 1.$$

On en déduit que M_ξ admet trois valeurs propres simples réelles qui sont

$$\theta = 2 + \sqrt{3},\ 1 \text{ et } \frac{1}{\theta} = 2 - \sqrt{3}.$$

Les coefficients $\lambda'_{i,j}$, $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$, introduits dans l'équation (2.6), sont alors déterminés par les relations :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i,j} \\ \lambda'_{i,j} \\ \lambda''_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^2 & 1 & (2-\sqrt{3})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\xi^0(j)|_i \\ |\xi(j)|_i \\ |\xi^2(j)|_i \end{pmatrix}.$$

Après calcul, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} = \frac{1}{2} & \lambda'_{1,2} = -\frac{1}{2} & \lambda'_{1,3} = 0 \\ \lambda'_{2,1} = -\frac{1}{2} & \lambda'_{2,2} = \frac{1}{2} & \lambda'_{2,3} = 0 \\ \lambda'_{3,1} = \frac{1}{2} & \lambda'_{3,2} = -\frac{1}{2} & \lambda'_{3,3} = 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\lambda'(1) = 1,\ \lambda'(2) = -1 \text{ et } \lambda'(3) = 0, \tag{2.11}$$

car

$$\lambda'(j) = \sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j} f(i).$$

L'automate des préfixes associé à la substitution ξ est représenté sur la figure 2.1. A partir de ce dernier et de l'équation (2.11), nous sommes en mesure de représenter les deux automates $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$, comme le montrent les figures 2.2 et 2.3.

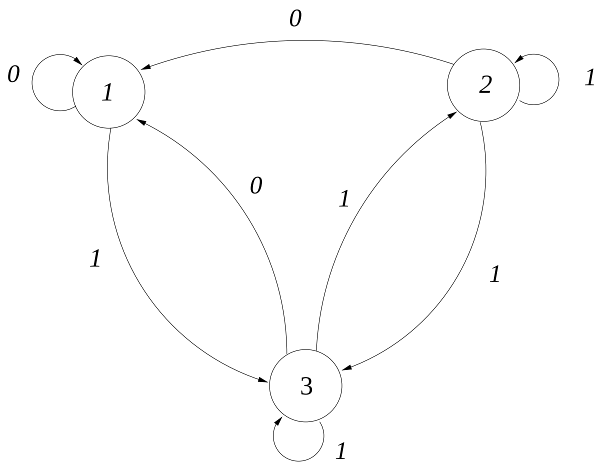


FIG. 2.2 – L'automate $\mathcal{A}_{max\xi}$.

On obtient immédiatement, M et m désignant les quantités introduites au début du paragraphe 2.5, que

$$M = 1 \text{ et } m = 0.$$

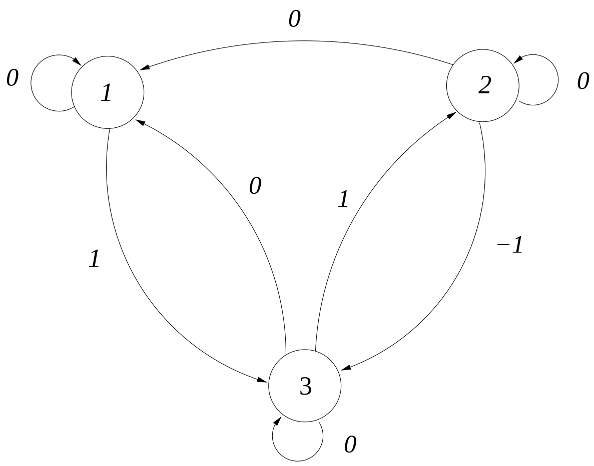


FIG. 2.3 – L'automate $\mathcal{A}_{min\xi}$.

Finalement, le corollaire 2.5.4 entraine que l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$ est à restes minorés pour la suite $\left(n(\frac{\sqrt{3}-1}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc que l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$ est à restes majorés pour la suite $\left(n(\frac{\sqrt{3}-1}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, d'après le théorème 2.5.1, on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n} = \frac{1}{2\log(2+\sqrt{3})}. \tag{2.12}$$

En remarquant que le développement en fractions continues de $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est $[0; \overline{2, 1}]$, un résultat de [218] nous dit que :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \frac{2}{4\log\left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right)}.$$

On en déduit alors, d'après l'égalité (2.12), le résultat suivant :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n}. \tag{2.13}$$

Remarque 2.6.1. *Un résultat identique est vérifié par d'autres couples comme par exemple :*

$$\begin{array}{llll} \alpha = \sqrt{2}-1 & et & \beta = \frac{1}{2}, \\ \alpha = \sqrt{2}-1 & et & \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \alpha = \sqrt{2}-1 & et & \beta = \sqrt{2}-\frac{1}{2}, \\ \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} & et & \beta = \frac{\sqrt{5}+5}{10} \ldots \end{array}$$

Question *On ne connaît pas pour l'instant d'exemple de couple vérifiant les hypothèses du théorème 2.5.1 pour lequel les conclusions de l'exemple (2.13) ne sont pas vérifiées. Les exemples précédents laissent penser que (2.13) est vérifié par tout couple $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Il serait donc intéressant de déterminer, α étant fixé, quels sont les éléments β, $\beta \in [0,1[$, pour lesquels le couple (α, β) vérifie les conclusions de (2.13).*

Le fait que les conclusions de (2.13) soient vérifiées par tout couple $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, impliquerait que la constante c intervenant dans le corollaire 2.5.6 pourrait être choisie indépendamment de β bien sûr, mais également de α. En effet, d'après un résultat de [97], nous savons que :

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \left(\limsup_{n \to \infty} \frac{D_n^*(\alpha)}{\log n} \right) = \limsup_{n \to \infty} \frac{D_n^*(\sqrt{2} - 1)}{\log n} > 0.$$

Nous serions de plus en mesure d'exhiber une constante optimale donnée donc par :

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{D_n^*(\sqrt{2} - 1)}{\log n} = \frac{1}{4 \log(1 + \sqrt{2})}.$$

Deuxième partie

Discrépance et équilibre des substitutions primitives

Chapitre 3

Discrépance symbolique et dynamiques auto-similaires

Dans ce chapitre, nous étendons l'étude du chapitre 2 au cas des points fixes de substitutions primitives. Ce chapitre fait l'objet d'un article sousmis pour publication aux *Annales de l'Institut Fourier.*

3.1 Definitions and main results

Let $U = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a symbolic sequence defined over the alphabet $\mathcal{A}$. The *frequency* of the letter a in U is defined by

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|u_0u_1\dots u_{N-1}|_a}{N},$$

when this limit exists.

A sequence in which all the factors have an infinite number of occurrences is called *recurrent.* When these occurrences have bounded gaps, the sequence is called *uniformly recurrent.* Moreover, if there exists an integer K such that, for any factor w of U, two consecutive occurrences of w are bounded by $K|w|$, the sequence U is said *linearly reccurent* with constant K (or simply K-LR).

Substitutions and spectrum

Endowed with concatenation, the set $\mathcal{A}^*$ is a free monoïd with unit element ε. A map from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{A}^*\setminus\{\varepsilon\}$ can be extended by concatenation to an endomorphism of the free monoïd $\mathcal{A}^*$ and then to a map from $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ to itself. A *substitution* σ on the alphabet $\mathcal{A}$ is such a morphism satisfying

(i) There exists $a \in \mathcal{A}$ such that a is the first letter of $\sigma(a)$,

(ii) For all $b \in \mathcal{A}$, $\lim_{n\to+\infty}|\sigma^n(b)| = +\infty$.

Then, it is easily seen that $(\sigma^n(aa\dots))_{n\in\mathbb{N}}$ converges in $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, endowed with the product of the discrete topologies on $\mathcal{A}$, to a sequence U. This sequence is a *fixed point* of σ, i.e., $\sigma(U) = U$. More generally, a sequence which is the image by a morphism of a fixed point of a substitution is said *substitutive.*

Given a substitution σ defined on $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$, we call the matrix $M_\sigma = (|\sigma(j)|_i)_{(i,j)\in\mathcal{A}^2}$ the *incidence matrix* associated with σ. The composition of substitutions corresponds to the multiplication of incidence matrices. A substitution is called *primitive* if there exists a power of its incidence matrix for which all the entries are positive. For a primitive substitution, the Perron-Frobenius theorem implies that its incidence matrix admits a simple real eigenvalue greater than one and which is greater than the modulus of all the others eigenvalues (see for instance [195]). This eigenvalue is called the *Perron* eigenvalue of the substitution. In the following, we need to order the spectrum S_{M_σ} of the incidence matrix M_σ associated with a primitive substitution σ. We thus write

$$S_{M_\sigma} = \left\{\theta_i,\ 2 \leq i \leq d'\right\} \cup \{\theta_1 = \theta\},$$

where θ is the Perron eigenvalue of σ, d' is the number of distinct eigenvalues and

$$\forall\, 2 \leq i,k \leq d',\ \ i < k \Rightarrow \begin{cases} |\theta_i| > |\theta_k|, \\ \text{or } |\theta_i| = |\theta_k| \text{ and } \alpha_i \geq \alpha_k, \end{cases} \tag{3.1}$$

where $\alpha_j + 1$ means the multiplicity of the eigenvalue θ_j in the minimal polynomial of M_σ. Furthermore, if $|\theta_i| = |\theta_k| = 1$, $\alpha_i = \alpha_k$, θ_i is not a root of unity and θ_k is a root of unity, then $i < k$.

Remark 3.1.1. *In the case where two distinct eigenvalues have the same modulus and the same multiplicity in the minimal polynomial of M_σ, this way of ordering is not always well-defined. We obtain that one can give several orders satisfying our conditions. This is in fact not a problem because our results do not depend on the choice of such an order. Then in the following, when we will use this notation, one should understand that we have made an arbitrary choice for the corresponding order.*

Substitution of order 2

Let σ be a primitive substitution defined over the alphabet $\mathcal{A}$ and U an associated fixed point. Let $\mathcal{A}_2$ denote the alphabet $\{1,\dots,P_U(2)\}$, where P_U is the complexity function of U. We can thus consider a map Θ_2 from $\mathcal{L}_2(U)$ to $\mathcal{A}_2$ wich associates with each factor of length 2 its order of occurrence in U. If i denotes a letter of the alphabet $\mathcal{A}_2$, we can conversely associate with i a unique word $\Theta_2^{-1}(i) = w_0w_1 \in \mathcal{L}_2(U)$ since Θ_2 is one-to-one. If

$$\sigma(\Theta^{-1}(i)) = \sigma(w_0w_1) = y_0y_1 \dots y_{|\sigma(w_0)|-1}y_{|\sigma(w_0)|}\cdots y_{|\sigma(w_0w_1)|-1},$$

then, we define the substitution of order 2 for σ by :

$$\sigma_2(i) = \Theta\left((y_0y_1)(y_1y_2)\dots(y_{|\sigma(w_0)|-1}y_{|\sigma(w_0)|})\right).$$

It is proved in [195] that σ_2 is primitive and that its Perron eigenvalue is equal to the one of σ (denoted by θ). Following Equation (3.1), we can note

$$S_{M_{\sigma_2}} = \{\theta_{2,i},\ 2 \leq i \leq d_2\} \cup \{\theta\} \tag{3.2}$$

the spectrum of the incidence matrix associated with σ_2. We can also note $\alpha_{2,i}$ for the multiplicity of the eigenvalue $\theta_{2,i}$ in its minimal polynomial.

Landau symbols

Let f and g be two real positive functions. We recall the definition of some Landau symbols :

$$f = O(g) \quad \text{if} \quad \exists C > O, \text{ such that } f(x) < Cg(x),\ \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

$$f = o(g) \quad \text{if} \quad \lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$f = \Omega(g) \quad \text{if} \quad f \neq o(g),\ \text{ that is, } \overline{\lim}\tfrac{f}{g} > 0.$$

We introduce now a notation that we will use in the most of our results. We will write

$$f = (O \cap \Omega)(g),$$

if both $f = O(g)$ and $f = \Omega(g)$. This *a priori* just means that g is, in a certain sense, an optimal asymptotic upper bound for the function f. However, in this study, the fact that $f = \Omega(g)$ will be in most of cases more significant than the relation $f = O(g)$.

Remark 3.1.2. *The relation $f = (O \cap \Omega)(g)$ does of course not imply that $f \sim g$, but, in this paper we study some functions which could be oscillating, and we are essentially interested in their maximum values. So, we will sometimes write, by abuse of language, that the order of magnitude of the function f is g, as soon as the relation $f = (O \cap \Omega)(g)$ holds.*

Main results

We first consider sequences obtained as fixed points of primitive substitutions. We show how the discrepancy of such a sequence, with respect to the probability measure given by the frequencies of its letters, is in part ruled by the spectrum of the incidence matrix associated with the substitution.

Theorem 3.1.3. *Let $U = (u_k)_{k\geq 0}$ be a fixed point of a primitive substitution σ defined over the alphabet $\mathcal{A}$, θ, θ_2 and α_2 defined as in Equation (3.1) and (3.2), Λ the natural probability measure associated with U and*

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \max_{a\in\mathcal{A}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\chi_{\{a\}}(u_k) - \mu(a)\right) \right|,$$

where $\chi_{\{a\}}$ denotes the characteristic function of the set a. Then, the following holds :

(*i*) *if $|\theta_2| < 1$, then* $\Delta_N(\Lambda, U)$ *is bounded ,*

(*ii*) *if $|\theta_2| > 1$, then* $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2} N^{(\log_\theta |\theta_2|)}\right),$

(*iii*) *if $|\theta_2| = 1$ and θ_2 is not a root of unity, then* $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_2+1)}\right),$

(*iv*) *if $|\theta_2| = 1$ and θ_2 is a root of unity, then*

either $A_{\sigma,U} \neq 0$ and $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_2+1)}\right),$

or $A_{\sigma,U} = 0$ and $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2}\right),$

where the complex number $A_{\sigma,U}$ (which just depends on the pair (σ, U)) is defined in Section 3.3.3 and could explicitly be computed.

Remark 3.1.4. *All the different cases are covered by Theorem 3.1.3. In the three first cases, the order of magnitude of the discrepancy just depends on the incidence matrix and thus on the abelian part of the substitution, contrary to case (iv).*

Corollary 3.1.5. *A fixed point U of a primitive substitution σ has a bounded discrepancy function $\Delta_N(\Lambda, U)$ if and only if one of the following holds :*

(i) $|\theta_2| < 1$,

(ii) $|\theta_2| = 1$, $\alpha_2 = 0$, θ_2 *is a root of unity and* $A_{\sigma,U} = 0$.

Remark 3.1.6. *It is easy to see that the discrepancy $\Delta_N(\mu, U)$ of a minimal sequence U is bounded if and only if each cylinder associated with a letter of $\mathcal{A}$ is a bounded remainder set for the subshift associated with U (we refer to Section 3.5 for a definition of bounded remainder sets and an application of them).*

Next, we consider dynamical systems arising from primitive substitutions. It is well-known that such a subshift is uniquely ergodic (see [171, 172]). We show how results for the discrepancy of these systems, with respect to their unique invariant measure, could be deduced from Theorem 3.1.3.

Theorem 3.1.7. *Let U be a fixed point of a primitive substitution σ, θ, $\theta_{2,2}$ and $\alpha_{2,2}$ defined as in Equation (3.1) and (3.2), $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T, \mu)$ the dynamical system arising from U, and*

$$D_N(\mathcal{X}) = \sup_{V \in \overline{\mathcal{O}(U)}} \sup_{w \in \mathcal{L}(U)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[w]}(T^k(V)) - N\mu([w]) \right| .$$

Then, the following holds :

(i)	*if* $|\theta_{2,2}| < 1$, *then*	$D_N(\mathcal{X})$ *is bounded* ,
(ii)	*if* $|\theta_{2,2}| > 1$, *then*	$D_N(\mathcal{X}) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}} N^{(\log_\theta |\theta_{2,2}|)}\right)$,
(iii)	*if* $|\theta_{2,2}| = 1$ *and* $\theta_{2,2}$ *is not a root of unity, then*	$D_N(\mathcal{X}) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,
(iv)	*if* $|\theta_{2,2}| = 1$ *and* $\theta_{2,2}$ *is a root of unity, then*	$D_N(\mathcal{X}) = O\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,
	and	$D_N(\mathcal{X}) = \Omega\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$.

Remark 3.1.8. *In Theorem 3.1.3 we study the discrepancy of a sequence which takes its values in the finite set $\mathcal{A}$, while the sequences considered in Theorem 3.1.7 take their values in the infinite compact set $\overline{\mathcal{O}(U)}$.*

In particular, we obtain that such dynamical systems are *uniformly well distributed* with respect to their unique ergodic measure, that is :

Corollary 3.1.9. *Let U be a fixed point of a primitive substitution σ, $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T, \mu)$ the dynamical system arising from U, then we have that*

$$\sup_{w \in \mathcal{L}(U)} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[w]}(T^k(V)) - \mu([w]) \right|$$

vanishes uniformly in $V \in \overline{\mathcal{O}(U)}$.

Remark 3.1.10. *The method developed in the following allows to compute explicit constants for the bounds given in all the previous results. We can easily deduce from a classical result generally attributed to Curtis, Lyndon and Hedlund (see for instance [160]), that the order of magnitude of the functions $\Delta_N(U)$ and $D_N(\mathcal{X})$, as it is the case for the complexity function (see [194]), are topological invariants (that is, are preserved by a topological isomorphism between two subshifts) but obviously not measure-theoretical ones. It seems that $\theta_{2,2}$ and $\alpha_{2,2}$ could be respectivly replaced by θ_2 and α_2 in Theorem 3.1.7, but this cannot be proven at this point.*

3.2 Notations and preliminary results

In this section, we introduce the main tools and notions that we will have to use for our study.

3.2.1 The $S_U^f(N)$ functions

In order to estimate the discrepancy of a symbolic sequence U, it is useful to associate a "weight" with each letter of $\mathcal{A}$. Then, the study of the discrepancy takes the following formulation : what is the number of occurences of each letter in a given prefix of U ? We already used this way of reasoning in [2] for particular sequences, and we propose now to give a more general statement of this fact.

Definition 3.2.1. *Let $U = u_0u_1 \dots u_n \dots$ be a symbolic sequence defined over the alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$. If $f = (f(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d$ and $N \in \mathbb{N}^*$, then we define :*

$$S_U^f(N) = \sum_{i=1}^{d} |u_0u_1 \dots u_{N-1}|_i f(i).$$

Just as, if $\omega \in \mathcal{A}^*$, we define :

$$S^f(\omega) = \sum_{i=1}^{d} |\omega|_i f(i).$$

The properties of $(S_U^f(N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ were investigated, in particular for some sequences related to the distribution of digits in arithmetical sequences, in [51, 66, 81, 91, 92, 93, 205].

Definition 3.2.2. *Let $U = u_0u_1 \dots u_n \dots$ be a sequence defined over the alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ and such that each letter of $\mathcal{A}$ admits a positive frequency in U. Let $\Lambda = (\Lambda_i)_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d$ denote the frequencies vector of U. Then, for $1 \le i \le d-1$, we introduce the vectors f_i, defined by*

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i, \\ \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i - 1} & \text{else.} \end{cases} \tag{3.3}$$

We can notice that the f_i are well-defined because $0 < \Lambda_i < 1$ and form a basis of the orthogonal vectorial space of Λ.

We recall that the discrepancy function of the sequence U is defined by

$$\begin{aligned} \Delta_N(\Lambda, U) &= \max_{a\in\mathcal{A}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\chi_{\{a\}}(u_k) - \Lambda_a \right) \right| \\ &= \max_{a\in\mathcal{A}} \left| |u_0u_1 \dots u_{N-1}|_a - N\Lambda_a \right|. \end{aligned}$$

With the previous definition, it is relatively easy to see that

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \max_{i=1,2,\ldots,d-1} (1-\Lambda_i)|S_U^{f_i}(N)|, \tag{3.4}$$

and we thus can state the two following propositions.

Proposition 3.2.1. *The two following assertions are equivalent :*
(i) $\Delta_N(\Lambda, U) = O(g(N))$ *(respectively* $o(g(N))$*),*
(ii) $\forall f = (f(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d$, $f \perp \Lambda$, $S_U^f(N) = O(g(N))$ *(respectively* $o(g(N))$*).*
In (i), the constant in the O *just depends on* U *and in (ii), it depends on* U *and* f*.*

Proof. It comes directly from (3.4) and from the fact that the f_i form a basis of $\Lambda^\perp$. □

Proposition 3.2.2. *The two following assertions are equivalent :*
(i) $\Delta_N(\Lambda, U) = \Omega(g(N))$*,*
(ii) $\exists\, f = (f(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d$, $f \perp \Lambda$, $S_U^f(N) = \Omega(g(N))$*.*

Proof. It comes directly from (3.4). □

3.2.2 Preliminaries

Now, for any word $w \in \mathcal{A}^*$, let us introduce the vector $L(w) = (|w|_i)_{i\in\mathcal{A}}$. Then, we have

$$L(\sigma(w)) = M_\sigma(L(w)), \tag{3.5}$$

where M_σ denotes the incidence matrix of σ. In this way, if i and j are fixed in $\mathcal{A}$, the sequence $(|\sigma^n(j)|_i)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies a linear reccurence whose coefficients are those of the minimal polynomial of M_σ. There thus exist complex numbers $\lambda_{i,j}^{k,l}$ and $\lambda_{i,j}$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, we have

$$|\sigma^n(j)|_i = \lambda_{i,j}\theta^n + \sum_{k=2}^{d'} \left(\sum_{l=0}^{\alpha_k} \lambda_{i,j}^{k,l} n^l \theta_k^n \right). \tag{3.6}$$

Let us notice that Equation (3.5) and (3.6) imply that, for each letter j, the vector $(\lambda_{i,j})_{i\in\mathcal{A}}$ is an eigenvector of M_σ associated with the Perron eigenvalue θ. There thus exists a complex number ε_j such that $\lambda_{i,j} = \varepsilon_j \Lambda_i$. Then, for any vector $f = (f(i))_{i=1,2,\ldots,d} \in \mathbb{C}^d$ lying in the orthogonal vectorial space spanned by Λ, it follows :

$$\begin{aligned} S^f(\sigma^n(j)) &= \textstyle\sum_{i=1}^d |\sigma^n(j)|_i f(i) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^d \lambda_{i,j} f(i) \right)}_{0} \theta^n + \textstyle\sum_{k=2}^{d'} \left(\sum_{l=0}^{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_{i,j}^{k,l} f(i) \right) n^l \theta_k^n \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

We thus deduce from (3.1) :

$$S^f(\sigma^n(j)) = O\left(n^{\alpha_2} |\theta_2|^n\right),$$

where the constant in the O just depends on j, if we assume f and σ fixed. Then, for every word $\omega \in \mathcal{A}^*$

$$S^f(\sigma^n(\omega)) = O\left(n^{\alpha_2} |\theta_2|^n\right), \tag{3.8}$$

where the constant in the O just depends on ω, if we assume f and σ fixed. In order to make the following more friendly readable, let us introduce, for any word $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m$ defined over $\mathcal{A}$ and any such a vector f, the notation :

$$F_{f,k,l}(\omega) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,\omega_j}^{k,l} f(i)\right).$$

It thus follows with the previous notation :

$$S^f(\sigma^n(w)) = \sum_{k=2}^{d'}\sum_{l=0}^{\alpha_k} F_{f,k,l}(\omega)n^l\theta_k^n. \tag{3.9}$$

3.2.3 A numeration system associated with a substitution

We present now a generalized numeration system associated with a substitution, introduced simultaneously by J-M. Dumont and A. Thomas [92], and G. Rauzy [205].

Definition 3.2.3. *Let σ be a substitution and let us suppose that U is a fixed point for σ generated by the letter 1. The subset of $\mathcal{A}^*$ composed by the proper prefixes of the image by σ of the letters will be denote by $Pref_\sigma$. The prefix automaton associated with the pair (σ, U) is defined in the following way :*

- *$\mathcal{A}$ is the set of states,*
- *$Pref_\sigma$ is the set of labels,*
- *there is a transition from the state i to the state j labelled by the (possibly empty) word m if mj is a prefix of $\sigma(i)$.*

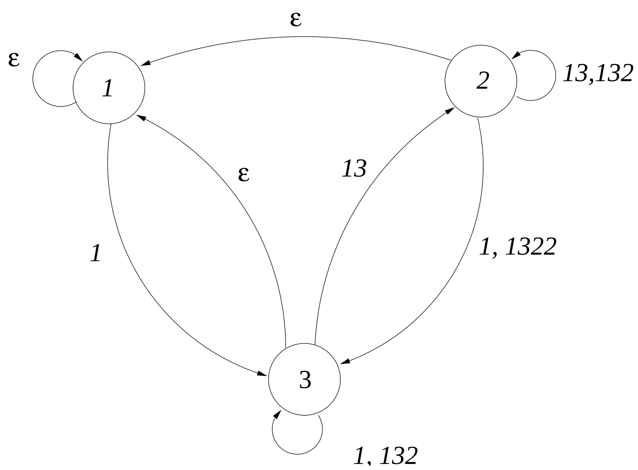


FIG. 3.1 – Example of a prefix automaton in the case of the substitution $1 \longmapsto 13$, $2 \longmapsto 13223$, $3 \longmapsto 123$.

Definition 3.2.4. *An admissible labelled path $\mathcal{C}$ in the prefix automaton associated with a pair (σ, U) will be denoted by*

$$((i_0, i_1, E_0), (i_1, i_2, E_1), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1})),$$

$i_j \in \mathcal{A}$ for $0 \leq j \leq n$, $E_j \in Pref_\sigma$ for $0 \leq j \leq n-1$. The positive integer n is the length of the path. The set composed by the admissible labelled path of length n will be denoted by $\mathcal{C}_\sigma^n$.

The main theorem concerning the prefix automaton is the following.

Theorem 3.2.5 (Dumont and Thomas [92], Rauzy [205]). *With the previous notations, if U is a fixed point generated by the letter 1 of the substitution σ, then we have :*

(i) for every positive integer N, there exists a unique admissible path in the prefix automaton associated with the pair (σ, U), starting from 1 and labelled by the sequence $(E_0, E_1 \dots E_n)$, such that $E_0 \neq \varepsilon$ and $U_N = \sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\dots E_n$, where U_N denotes the prefix of U of the length N.

(ii) Conversely, to any such a path, there corresponds a unique prefix of U, given by the above formula.

(iii) Moreover, $|\sigma^n(1)| \leq N < |\sigma^{n+1}(1)|$.

3.3 Discrepancy for fixed points of primitive substitutions

This section is devoted to the proof of Theorem 3.1.3.

3.3.1 First upper bounds

We apply Theorem 3.2.5 in order to obtain upper bounds for the discrepancy of fixed point of primitive substitutions.

Proposition 3.3.1. *Let U be a fixed point of a primitive substitution, then :*

$$\text{if } |\theta_2| < 1, \text{ then} \qquad \Delta_N(\Lambda, U) \text{ is bounded,}$$

$$\text{if } |\theta_2| > 1, \text{ then} \qquad \Delta_N(\Lambda, U) = O\left((\log N^{\alpha_2}) N^{\frac{\log|\theta_2|}{\log\theta}}\right),$$

$$\text{if } |\theta_2| = 1, \text{ then} \qquad \Delta_N(\Lambda, U) = O\left(\log N^{\alpha_2+1}\right),$$

where the constants in the O just depend on U.

Proof. Equality (3.8) and the fact that the words E_i lie in a finite set imply :

$$S_U^f(N) = O\left(\sum_{k=0}^{n_N} k^{\alpha_2} |\theta_2|^k\right),$$

and thus

$$S_U^f(N) = O\left(n_N^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{n_N} |\theta_2|^k\right). \tag{3.10}$$

One can notice that the assertion (iii) of Theorem 3.2.5 implies in view of Equality (3.6) that

$$\exists\, C > O,\ \exists\, C' > 0, \text{ such that } C\theta^{n_N} < N < C'\theta^{n_N}.$$

We thus deduce

$$\left| n_N - \frac{\log N}{\log \theta} \right| = O(1). \tag{3.11}$$

Then, we have to distinguish three cases, depending on the modulus of the eigenvalue θ_2, and using (3.10), it follows :

$$\begin{aligned} &\text{if } |\theta_2| < 1, \text{ then} && S_U^f(N) = O(1), \\ &\text{if } |\theta_2| > 1, \text{ then} && S_U^f(N) = O\left((\log N)^{\alpha_2} N^{\frac{\log|\theta_2|}{\log\theta}}\right), \\ &\text{if } |\theta_2| = 1, \text{ then} && S_U^f(N) = O\left((\log N)^{\alpha_2+1}\right), \end{aligned}$$

where the constants in the O just depend on U and f. Proposition 3.2.1 allows us to conclude. □

The upper bounds we have obtained could seem very rough, but we will show in the following that they yet give in most of the cases the good order of magnitude for $\Delta_N(\Lambda, U)$.

3.3.2 First lower bounds

We want now to show the pertinency of Proposition 3.3.1. Hence, we are going to construct a sequence of prefixes of U with the worst possible distribution. Following Proposition 3.2.2, we know that it is sufficient to exhibit a vector $f \in \mathbb{C}^d$, $f \perp \Lambda$, and an increasing sequence of integers, $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, such that the sequence $\left(|S_U^f(N_k)|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ takes "high" values, in a sense that we will have, of course, to make clear.

Let us first recall the following result.

Lemma 3.3.1. *Let M be a $d \times d$ complex matrix and let us denote by $\{(\theta_i, \alpha_i),\ 1 \le i \le d'\}$ the spectrum of M, where the θ_i mean the distinct eigenvalues of M and the α_i their multiplicity in the minimal polynomial of M. Let r be a positive integer and θ a non-zero eigenvalue of M^r, then the multiplicity of θ in the minimal polynomial of M^r is equal to the maximum of $\{\alpha_i$ such that $\theta_i^r = \theta,\ 1 \le i \le d'\}$.*

Proof. It is sufficient to consider the decomposition of M into characteristic subspaces and then, to use the fact that the minimal polynomial of a matrix which is diagonal by blocks, each block being upper triangular, is the l.c.m. of the minimal polynomials of its blocks. □

If we apply the previous lemma to the incidence matrix associated with the primitive substitution σ, we obtain the following.

Corollary 3.3.2. *Let k be a positive integer. Let us denote by $\{\theta_i',\ 2 \le i \le d''\} \cup \{\theta'\}$ the spectrum of σ^k, so that the θ_i' are ordered as in (3.1). Then, the following holds :*

$$\theta' = \theta^k,\ |\theta_2'| = |\theta_2|^k,\ \text{and } \alpha_2' = \alpha_2.$$

In view of Corollary 3.3.2, we can thus freely consider any power of σ whithout changing the conditions which appear in Theorem 3.1.3. We are now ready to prove the following.

Proposition 3.3.2. *Let U be a fixed point of a primitive substitution, then :*

$$\begin{aligned} &\textit{if } |\theta_2| > 1, \textit{ then} && \Delta_N(\Lambda, U) = \Omega\left((\log N^{\alpha_2}) N^{\frac{\log|\theta_2|}{\log\theta}}\right), \\ &\textit{if } |\theta_2| = 1, \textit{ then} && \Delta_N(\Lambda, U) = \Omega\left(\log N^{\alpha_2}\right). \end{aligned}$$

Proof. If j is a fixed element of $\mathcal{A}$ and $2 \leq k \leq d'$, then the vectors $\left(\lambda_{i,j}^{k,\alpha_k}\right)_{i\in\mathcal{A}}$ (defined in (3.6)) are eigenvectors associated with the eigenvalue θ_k (or eventually zero vectors). That follows directly from from Equation (3.5) and (3.6), and from the fact that the sequences $\left(n^k\theta_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ form a free familly of the vectorial space spanned by complex sequences. Moreover, there exists at least one letter j_0 such that the vector $\left(\lambda_{i,j_0}^{2,\alpha_2}\right)_{i\in\mathcal{A}}$ is a non-zero vector, because otherwise this would provide a polynomial P of degree less than the one of the minimal polynomial associated with M and such that $P(M) = 0$. Let us consider the following vectorial subspace of $\mathbb{C}^d$:

$$E = \left\langle \{\Lambda\} \cup \left\{ \left(\lambda_{i,j}^{k,\alpha_k}\right)_{i\in\mathcal{A}},\ 2 < k \leq d',\ j \in \mathcal{A} \right\} \right\rangle.$$

Then, because $\left(\lambda_{i,j_0}^{2,\alpha_2}\right)_{i\in\mathcal{A}}$ is a non-zero vector, this is an eigenvector associated with the eigenvalue θ_2 and it thus does not lie in E. So, we obtain

$$E^{\perp} \not\subseteq \left\langle \left(\lambda_{i,j_0}^{2,\alpha_2}\right)_{i\in\mathcal{A}} \right\rangle^{\perp}.$$

There thus exists a vector $f_0 = (f_0(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d$ such that $f_0 \in E^{\perp}$ and $f_0 \not\perp \left(\lambda_{i,j_0}^{2,\alpha_2}\right)_{i\in\mathcal{A}}$.

Because of the primitivity of σ and of Corollary 3.3.2, we can assume without restriction that all the entries of the incidence matrix associated with σ are greater or equal than two, which implies :

- the prefix automaton associated with σ is strongly connected, that is to say, for any pair $(i,j) \in \mathcal{A}^2$, the path (i,j) is admissible.
- for any pair $(i,j) \in \mathcal{A}^2$, the letter j has at least one occurence in a proper prefix of $\sigma(i)$.

In particular, there exists a proper prefix of $\sigma(1)$ in which the letter j_0 occurs. Let us denote by $w_1w_2\ldots w_{r-1}j_0w_{r+1}\ldots w_n$ such a prefix. Clearly, $w_1w_2\ldots w_{r-1}j_0$ is also a proper prefix of $\sigma(1)$. Then, we have to distinguish two cases :
either

$$\sum_{j=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,w_j}^{2,\alpha_2}f_0(i)\right) \neq 0,$$

or

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,w_j}^{2,\alpha_2}f_0(i)\right) \neq 0,$$

with $w_r = j_0$. In each case, there exists a proper prefix of $\sigma(1)$, $\omega = w_1w_2\ldots w_m$, $m \in \{r-1, r\}$, such that :

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,w_j}^{2,\alpha_2}f_0(i)\right) \neq 0.$$

We thus have

$$S^{f_0}(\sigma^n(\omega)) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,w_j}^{2,\alpha_2}f_0(i)\right)}_{\neq 0} n^{\alpha_2}\theta_2^n$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=2}^{d'}\left(\sum_{l=0}^{\alpha_k-1}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,w_j}^{k,l}f_0(i)\right)n^l\theta_k^n\right)\right),$$

which implies

$$S^{f_0}(\sigma^n(\omega)) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,w_j}^{2,\alpha_2} f_0(i)\right)}_{\neq 0} n^{\alpha_2}\theta_2^n + o\left(n^{\alpha_2}\theta_2^n\right),$$

where the constant in the o just depends on ω (if we consider f_0 and σ fixed). We thus have shown that $S^{f_0}(\sigma^n(\omega)) = \Omega\left((n^{\alpha_2}\theta_2^n\right)$. But ω is a prefix of U since U begins with 1 and therefore $\sigma^n(\omega)$ is also a prefix of U. Let us consider for $k \in \mathbb{N}$, $N_k = |\sigma^k(\omega)|$. Then,

$$\left|k - \frac{\log N_k}{\log \theta}\right| = O(1),$$

and there exists a positive constant C such that :

$$S_U^{f_0}(N_k) > C\left((\log N_k)^{\alpha_2} N_k^{\frac{\log|\theta_2|}{\log\theta}}\right).$$

We thus deduce that $S_U^{f_0}(N) = \Omega\left((\log N)^{\alpha_2} N^{\frac{\log|\theta_2|}{\log\theta}}\right)$, concluding the proof in view of Proposition 3.2.2. □

Remark 3.3.3. *Proposition 3.3.1 and 3.3.2 give the order of magnitude of the discrepancy function $\Delta_N(\Lambda, U)$ when $|\theta_2| \neq 1$. In the case where $|\theta_2| = 1$, we obtain that the irregularities of the discrepancy lie between $(\log N)^{\alpha_2}$ and $(\log N)^{\alpha_2+1}$. Particulary, when $|\theta_2| = 1$ and $\alpha_2 = 0$, we are not able to say if $\Delta_N(\Lambda, U)$ is bounded or not. The following section is precisely devoted to the understanding of the critical case, that is to say, $|\theta_2| = 1$.*

3.3.3 The critical case

We have just noticed in Remark 3.3.3 that the previous results are not sufficient to obtain the exact order of magnitude of the irregularities of distribution for a fixed point of a primitive substitution satisfying $|\theta_2| = 1$. We will show that in this case the knowledge of the spectrum of the incidence matrix associated with the substitution is not always sufficient to answer this question. However, we will give an algorithmic way of answering it in the contentious cases.

The case where θ_2 is not a root of unity

The following proposition states that the irregularities of the discrepancy are maximal (among the critical cases) when θ_2 is not a root of unity.

Proposition 3.3.3. *Let U be a fixed point of a primitive substitution. If $|\theta_2| = 1$ and θ_2 is not a root of unity, then*

$$\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2+1}\right).$$

Proof. Let U be a fixed point of a primitive substitution σ and let us assume that $|\theta_2| = 1$ and θ_2 is not a root of unity. Then, there exists a real γ, $\gamma \notin \mathbb{Q}$, such that $e^{2\pi i\gamma}$ is a possible choice for θ_2. The multiplicity of $e^{2\pi i\gamma}$ in the minimal polynomial of the incidence matrix M associated with σ is thus equal to α_2.

We recall that the primitivity of σ allows us to assume without restriction that all the entries of M are greater than or equal to two (see Corollary 3.3.2). The same reasonning as in the first part of the proof of Proposition 3.3.2 implies :

– the existence of a vector $f_0 \in \mathbb{C}^d$ and a letter j_0 such that $f_0 \in E^{\perp}$ and $f_0 \not\perp \left(\lambda_{i,j_0}^{2,\alpha_2}\right)_{i\in\mathcal{A}}$, where $E = \left\langle \{\Lambda\} \cup \left\{ \left(\lambda_{i,j}^{k,\alpha_k}\right)_{i\in\mathcal{A}},\ 2 < k \leq d',\ j \in \mathcal{A} \right\} \right\rangle$,

– the existence of a proper prefix of $\sigma(1)$, w such that $F_{f_0,2,\alpha_2}(w) \neq 0$ (see (3.9) for a definition).

It thus follows that

$$S^{f_0}(\sigma^n(\omega)) = \underbrace{F_{f_0,2,\alpha_2}(w)}_{\neq 0}\, n^{\alpha_2} e^{in\gamma} + O(n^{\alpha_2 - 1}),$$

where the constant in the O just depends on w.

Let us consider a positive integer N. Following Theorem 3.2.5, there exists a unique admissible path in the prefix automaton associated with the pair (σ, U), beginning with 1 and labelled by $(E_0, E_1, \ldots, E_{n_N})$, $E_0 \neq \varepsilon$ such that :

$$U_N = \sigma^{n_N}(E_0)\sigma^{n_N - 1}(E_1)\ldots E_{n_N}.$$

We thus have

$$S_U^{f_0}(N) = \sum_{k=0}^{n_N} S_U^{f}(\sigma^k(E_{n_N - k})).$$

The fact that the prefixes E_i lie in a finite set ($Pref_\sigma$) implies that

$$S_U^{f_0}(N) = \sum_{k=0}^{n_N} F(E_{n_N - k}) k^{\alpha_2} e^{ik\gamma} + O\left((n_N)^{\alpha_2}\right),$$

where the constant in the O just depend on U. There thus exists a positive number C independent of N, such that :

$$\left|S_U^{f_0}(N)\right| > \left|\sum_{k=0}^{n_N} F(E_{n_N - k}) k^{\alpha_2} e^{ik\gamma}\right| - C(n_N)^{\alpha_2}. \tag{3.12}$$

We want now to exhibit a sequence $(\mathcal{C}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ of arbitrarily large admissible paths in the prefix automaton associated with the pair (σ, U), starting from the state 1 and labelled by $(E_0, E_1, \ldots, E_{n_j})$, $E_0 \neq \varepsilon$, such that :

$$|S_U^{f_0}(N_j)| > \left|\sum_{k=0}^{n_j} F(E_{n_j - k}) k^{\alpha_2} e^{ik\gamma}\right| - C(n_j)^{\alpha_2} > M(n_j)^{(\alpha_2 + 1)},$$

where the integers N_j are given by

$$N_j = \sum_{k=0}^{n_j} |\sigma^k(E_{n_j - k})|.$$

Then, Equation (3.12) and Proposition 3.2.2 will allow us to conclude that

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \Omega((\log N)^{\alpha_2 + 1})$$

because the assertion (iii) in Theorem 3.2.5 ensures that

$$\left| n_j - \frac{\log N_j}{\log \theta} \right| = O(1).$$

Since w is a proper prefix of $\sigma(1)$, there exists a letter j_0 such that wj_0 is a prefix of $\sigma(1)$. The labelled path $(1, j_0, w)$ is thus admissible. Let us denote by $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ the sequence of states defined as follows : j_1 is the first letter of $\sigma(j_0)$ and more generally let j_{k+1} be the first letter of $\sigma(j_k)$. Hence, for every positive integer k, the labelled path $((1, j_0, w), (j_0, j_1, \varepsilon), (j_1, j_2, \varepsilon), \ldots, (j_k, j_{k+1}, \varepsilon))$ is admissible. The set $\mathcal{A}$ being finite, we can find two positive integers k_0 and k_1, $k_1 > k_0$, such that $j_{k_0} = j_{k_1}$ (for k_1 large enough). We have thus to distinguish two cases :

- either $j_{k_0} = 1$,
- or $j_{k_0} \neq 1$.

We first assume that $j_{k_0} = 1$, as it is represented on Figure 3.2.

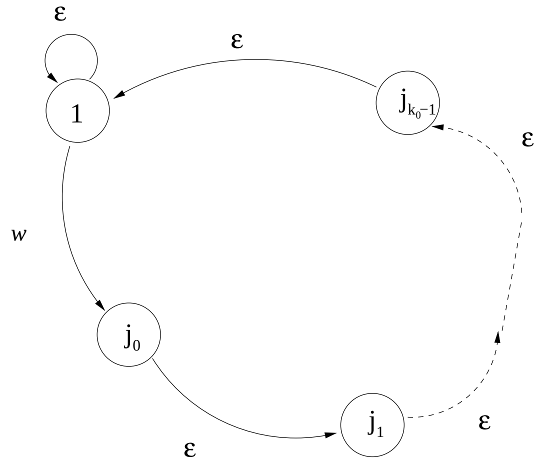


FIG. 3.2 – Case $j_{k_0} = 1$.

Let α be an irrational number and I an interval of the one-dimensional torus $\mathbb{T}$, then there exists a positive integer m such that :

$$\forall x \in \mathbb{T},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \leq m,\ x + n\alpha \in I, \tag{3.13}$$

see for instance [228]. Of course, (3.13) does not hold for a rational α and the irrationality of γ, ensured by the fact that $e^{2\pi i\gamma}$ is not a root of unity, will play a full role.

Let us consider a real δ, $\pi > \delta > 0$ and V a subset of $\mathbb{C}$ defined by :

$$V = \left\{ e^{2\pi i\lambda},\ \ -\delta < \lambda < \delta \right\}.$$

Then, there exists a positive number c such that for any positive integer N :

$$(v_1, v_2, \ldots, v_N) \in V^N \Longrightarrow \left| \sum_{i=1}^{N} v_i \right| > cN.$$

Equation (3.13) and the irrationality of γ guarentee the existence of a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ and of an integer m satisfying

$$\forall j \in \mathbb{N},\ e^{2\pi i n_j \gamma} \in V,\ n_0 = 0 \text{ and } m > n_j - n_{j-1} > k_0.$$

It follows thus

$$\left| \sum_{j=1}^{N} (n_j)^{(\alpha_2)} e^{2\pi i n_j \gamma} \right| > cN^{(\alpha_2+1)}. \tag{3.14}$$

Let us now consider, for any positive integer j, the labelled path $\mathcal{C}_j$ of length n_j defined in the following way :

$$\left(\begin{array}{c}(1,j,w),(j,j_1,\varepsilon),\ldots,(j_{k_0-1},1,\varepsilon),\underbrace{(1,1,\varepsilon),(1,1,\varepsilon),\ldots,(1,1,\varepsilon)}_{(n_N-n_{N-1})-k_0 \text{ times}},\\ (1,j,w),(j,j_1,\varepsilon),\ldots,(j_{k_0-1},1,\varepsilon),\underbrace{(1,1,\varepsilon),(1,1,\varepsilon),\ldots,(1,1,\varepsilon)}_{(n_{N-1}-n_{N-2})-k_0 \text{ times}},\\ \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ (1,j,w),(j,j_1,\varepsilon),\ldots,(j_{k_0-1},1,\varepsilon),\underbrace{(1,1,\varepsilon),(1,1,\varepsilon),\ldots,(1,1,\varepsilon)}_{(n_1-n_0)-k_0 \text{ times}},(1,j,w)\end{array}\right).$$

This labelled path is an admissible path in the prefix automaton associated with the pair (σ, U). Moreover, since $F(\varepsilon) = 0$ we thus deduce from Equation (3.12) and from the assertion (ii) in Theorem 3.2.5 the existence of an integer N_j such that :

$$\left|S_U^{f_0}(N_j)\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{j} F(w)(n_k)^{\alpha_2} e^{2\pi i n_k \gamma}\right| - C(n_j)^{\alpha_2}.$$

Therefore, Inequality (3.14) implies that

$$\left|S_U^{f_0}(N_j)\right| \geq \frac{c(n_j)^{(\alpha_2+1)}}{|F(w)|} - C(n_j)^{\alpha_2},$$

and because (iii) in Theorem 3.2.5 ensures that

$$\left|n_j - \frac{\log N_j}{\log \theta}\right| = O(1),$$

we have

$$\left|S_U^{f_0}(N_j)\right| > M(\log(N_j))^{(\alpha_2+1)},$$

where M is positive and does not depend on j. Hence, the sequence of labelled paths $(\mathcal{C}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ provides an increasing sequence of integers $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ such that

$$\Delta_{N_j}(\Lambda, U) > D(\log(N_j))^{(\alpha_2+1)},$$

which ends the proof in the case where $j_{k_0} = 1$ since $\Delta_N(\Lambda, U) = O((\log N)^{\alpha_2+1})$ is already shown in Proposition 3.3.1.

In the case where $j_{k_0} \neq 1$ (see Figure 3.3), it is possible to do a similar reasonning but a little bit more technical, by using instead of (3.13) the fact that there exists a positive integer m satisfying

$$\forall x \in \mathbb{T},\ \exists\,(n,l) \in \mathbb{N}^2,\ n \leq m,\ l \leq m,\ \ x + n\alpha \in I \text{ and } x + l((k_1 - k_0)\alpha) \in I. \tag{3.15}$$

$\square$

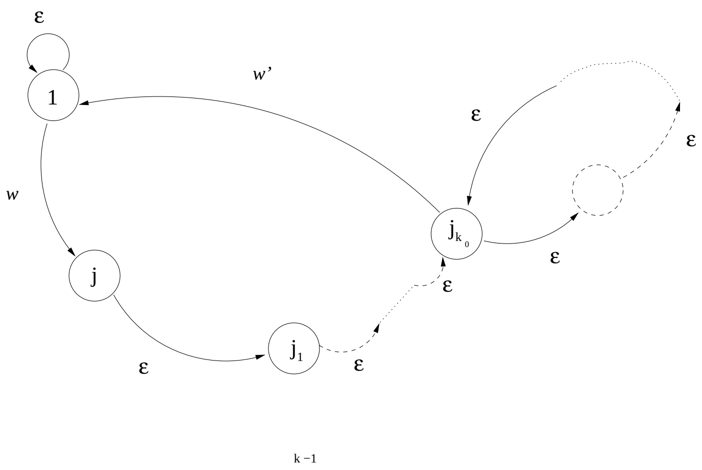


FIG. 3.3 – Case $j_{k_0} \neq 1$.

The case where θ_2 is a root of unity

We present now a definition of the complex number $A_{\sigma,U}$ used in Theorem 3.1.3 and Corollary 3.1.5. The meaning of $A_{\sigma,U}$ is strongly connected with the notion of elementary loop in the prefix automaton associated with the pair (σ, U). We recall now the definition introduced in [2] of an elementary loop.

Definition 3.3.4. *Let σ be a substitution and let us suppose that U is a fixed point for σ generated by the letter 1. We call elementary loop any admissible labelled path $((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))$ in the prefix automaton associated with the pair (σ, U), satisfying the following conditions :*

– $i_0 = i_n$,

– $\forall\ 0 \leq j < k < n,\ i_k \neq i_j$.

We will denote by $\mathcal{E}l(\sigma, U)$ the set composed by all the elementary loops in the prefix automaton associated with the pair (σ, U).

Remark 3.3.5. *Since $\mathcal{A}$ and $Pref_\sigma$ are finite sets, $\mathcal{E}l(\sigma, U)$ is finite too.*

Let us consider a primitive substitution σ defined over the finite alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, d\}$, and let us suppose that U is a fixed point for σ generated by the letter 1.

Moreover, we first assume that σ satisfies $\theta_2 = 1$, whatever the way one orders the spectrum of M_σ (satisfying of course (3.1)). For every admissible labelled path in the prefix automaton $\mathcal{C} = ((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))$ we introduce :

$$F_{f,2,\alpha_2}(\mathcal{C}) = \sum_{j=0}^{n-1} F_{f,2,\alpha_2}(E_j), \tag{3.16}$$

where $F_{f,2,\alpha_2}(E_j)$ is defined following Equality (3.9). Then, we can consider for any vector $f \in \mathbb{C}^d$, the quantity

$$A^f_{\sigma,U} = \max\left\{|F_{f,2,\alpha_2}(B)|,\ B \in \mathcal{E}l(\sigma, U)\right\}.$$

For $1 \leq i \leq d-1$, we consider the vectors f_i, defined by

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i, \\ \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i - 1} & \text{else.} \end{cases}$$

The family of vectors f_i provides a canonical basis of the orthogonal vector space of the eigenvector Λ. Then, we can define a complex number, denoted by $A_{\sigma,U}$, just depending on the pair (σ, U), by :

$$A_{\sigma,U} = \max\left\{A^{f_j}_{\sigma,U},\ 1 \le j < d\right\}. \tag{3.17}$$

Now, let us assume that θ_2 is a root of unity. This implies (see (3.1)) that all the eigenvalues of M_σ whose modulus equals one and whose multiplicity equals α_2 are roots of unity. Thus, there exists a minimal integer n_0 such that σ^{n_0} satisfies the condition required above, that is to say : the spectrum of $M_{\sigma^{n_0}}$ satisfies $\theta_2 = 1$. Then, we can in this case associate a complex number with the pair (σ, U) by putting

$$A_{\sigma,U} = A_{\sigma^{n_0},U},$$

where $A_{\sigma^{n_0},U}$ is obtained following the previous construction.

We can now state the following proposition.

Proposition 3.3.4. *Let U be a fixed point of the primitive substitution σ. If θ_2 is a root of unity, then*

- *either $A_{\sigma,U} \neq 0$ and $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_2+1)}\right)$,*
- *or $A_{\sigma,U} = 0$ and $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2}\right)$.*

Before proving Proposition 3.3.4, we need to establish the two following results.

Lemma 3.3.6. *Let C be a positive number. Then, for any sequence of complexe numbers $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfying $|\sum_{k=0}^m a_k| \le C$ for any positive integer m, we have*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k^l = O(n^l),$$

the constant in the O just depending on C.

Proof of Lemma 3.3.6. It comes directly from a classical Abel transformation. In fact, let us consider $S_j = \sum_{k=0}^j a_k$. We thus have :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k k^l &= \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})k^l \\ &\le C\left(\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{l-1}\binom{l}{j}k^j\right) + n^l\right) - a_0,\end{aligned}$$

which ends the proof. □

Lemma 3.3.7. *Let U be a fixed point of a primitive substitution and f be a vector in $\mathbb{C}^d$ such that $f \perp \Lambda$. Then, there exists a constant $C > 0$ such that for any admissible labelled path $\mathcal{C}$ in the prefix automaton associated with the pair (σ, U), one can find $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$, k possibly equal to zero, satisfying*

$$\left|F_{f,2,\alpha-2}(\mathcal{C}) - \sum_{i=1}^{k} F_{f,2,\alpha_2}(B_i)\right| \le C,$$

where $F_{f,2,\alpha_2}(B_i)$ is defined following Equality (3.16).

Proof of Lemma 3.3.7. Let us reason by induction on the length n of the path. Let us consider $C = \max\left\{F_{f,2,\alpha_2}(\mathcal{C}),\ \mathcal{C} \in \mathcal{C}_\sigma^k,\ k \leq d\right\}$. If $\mathcal{C}$ means an admissible path of length smaller than or equal to d, then by definition of C we have

$$|F_{f,2,\alpha_2}(\mathcal{C}) - 0| \leq C,$$

which shows that the proposition is satisfied for $n \leq d$.

Now, let $n \in \mathbb{N}$, $n > d$, and let us assume that the proposition is satisfied for any admissible path of length k, $k < n$. If $\mathcal{C} = ((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))$ is an admissible labelled path of length n, then there exists $(l, h) \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}^2$, $l < h$, such that $i_l = i_h$ since the cardinality of $\mathcal{A}$ is finite and equal to d. Let us denote by h' the minimum of $\{m,\ m > l, \text{ such that } i_m = i_l\}$. It follows that $(i_l, \ldots, i_{h'})$ is an elementary loop and $((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_l, i_{h'+1}, E_h), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_n))$ is an admissible labelled path of length smaller than or equal to n. Thus, the induction hypothesis implies that there exists $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$, k eventually equal to zero, such that :

$$\left|F_{f,2,\alpha_2}\left((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_l, i_{h'+1}, E_h), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_n)\right) - \sum_{i=1}^{k} F_{f,2,\alpha_2}(B_i)\right| \leq C.$$

But

$$\begin{aligned} F_{f,2,\alpha_2}(\mathcal{C}) = \quad & F_{f,2,\alpha_2}\left((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_l, i_{h'+1}, E_{h'}), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1})\right) \\ & + F_{f,2,\alpha_2}\left((i_l, i_{l+1}, E_l), \ldots, (i_{h'-1}, i_{h'}, E_{h'-1})\right), \end{aligned}$$

and thus if $B_{k+1} = ((i_l, i_{l+1}, E_l), \ldots, (i_{h'-1}, i_{h'}, E_{h'-1}))$, it follows that

$$\left|F_{f,2,\alpha_2}(\mathcal{C}) - \sum_{i=1}^{k+1} F_{f,2,\alpha_2}(B_i)\right| \leq C,$$

concluding the proof. □

Proof of Proposition 3.3.4. We can assume without restriction that $\theta_2 = 1$.

We first assume that $A_{\sigma,U} = 0$. Let f be a vector in $\mathbb{C}^d$ such that $f \perp \Lambda$ and N be a positive integer. Following Theorem 3.2.5, there exists $(E_0, E_1, \ldots, E_{n_N}) \in (Pref_\sigma)^{n_N}$ such that :

$$S_U^f(N) = \sum_{k=0}^{n_N} S_U^f(\sigma^k(E_{n_N-k})).$$

The fact that the E_i lie in the finite set $Pref_\sigma$ implies that

$$S_U^f(N) = \sum_{k=0}^{n_N} F_{f,2,\alpha_2}(E_{n_N-k})k^{\alpha_2} + O\left((n_N)^{\alpha_2}\right),$$

where the constant in the O just depends on U. We thus have to show that

$$\sum_{k=0}^{n_N} F_{f,2,\alpha_2}(E_{n_N-k})k^{\alpha_2} = O\left((n_N)^{\alpha_2}\right).$$

Lemma 3.3.7 implies the existence of a positive C and $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l(\sigma, U))^k$ such that

$$\left|\sum_{k=0}^{n_N} F_{f,2,\alpha_2}(E_{n_N-k}) - \sum_{i=1}^{k_N} F_{f,2,\alpha_2}(B_i)\right| \leq C,$$

since by definition

$$\sum_{k=0}^{n_N} F_{f,2,\alpha_2}(E_{n_N-k}) = F_{f,2,\alpha_2}(\mathcal{C}).$$

But if $A_{\sigma,U} = 0$, then $F_{f,2,\alpha_2}(B) = 0$ for any $B \in \mathcal{E}l(\sigma, U)$, which gives

$$\left|\sum_{k=0}^{n_N} F_{f,2,\alpha_2}(E_{n_N-k})\right| \leq C.$$

Since C does not depend on the path $\mathcal{C}$ and thus on the integer N, Lemma 3.3.6 implies that

$$\sum_{k=0}^{n_N} F_{f,2,\alpha_2}(E_{n_N-k})k^{\alpha_2} = O\left((n_N)^{\alpha_2}\right),$$

where the constant in the O does not depend on the choice of N. Following Proposition 3.3.2, we obtain that $\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)((\log N)^{\alpha_2})$ because $n_N = \log N + O(1)$.

Now, let us assume $A_{\sigma,U} \neq 0$. There thus exists a vector f_j, defined as in (3.3), such that $A^{f_j}_{\sigma,U} \neq 0$. Let us denote by $B = ((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_{p-1}, i_p, E_{P-1}))$ an element of $\mathcal{E}l(\sigma, U)$ satisfying

$$|F_{f_j,2,\alpha_2}(B)| = A^{f_j}_{\sigma,U}.$$

Since the prefix automaton is strongly connected, there exists an admissible labelled path starting from the state 1 and ending in i_0. Let $\mathcal{C}_0 = ((a_0, a_1, E'_0), (a_1, a_2, E'_1), \ldots, (a_{l-1}, i_0, E'_{l-1}))$ be such a path, with $E'_0 \neq \varepsilon$ and $a_0 = 1$. For every positive integer k, we introduce the following labelled path :

$$\Big((a_0, a_1, E'_0), (a_1, a_2, E'_1), \ldots, (a_{l-1}, i_0, E'_{l-1}) \,, \quad \underbrace{(i_o, i_1, E_0), \ldots, (i_{p-1}, i_p, E_{p-1})}_{\text{iterated } k \text{ times}}\Big).$$

This path of length $l + kp$ is thus admissible, begins with 1 and satisfies $E_0 \neq \varepsilon$. Following the proposition (ii) in Theorem 3.2.5, there exists a positive integer N_k such that :

$$S^{f_j}_U(N_k) = \sum_{m=0}^{kp} F_{f_j,2,\alpha_2}(E_{(m \bmod p)})m^{\alpha_2} + O(1).$$

Moreover, following Equality (3.11), we have

$$kp \sim \frac{\log(N_k)}{\log\theta},$$

which implies that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|S^{f_j}_U(N_k)\right|}{(\log N_k)^{(\alpha_2+1)}} = \frac{A^{f_j}_U}{\log\theta} > 0.$$

Finally, $\left|S^{f_j}_U(N)\right| = \Omega((\log N)^{(\alpha_2+1)})$, which ends the proof in view of Proposition 3.2.2 and 3.3.2.

□

Remark 3.3.8. *It is also often possible to compute in the case where θ_2 is a root of unity and $A_{\sigma,U} \neq 0$ the quantity*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N(\Lambda, U)}{(\log N)^{(\alpha_2+1)}}.$$

We do it for particular sequences in [2].

Proof of Theorem 3.1.3. It comes directly from Proposition 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 and 3.3.4. □

3.4 Discrepancy for primitive substitutive subshifts

The goal of this section is to prove Theorem 3.1.7. We proceed as follows; we first generalize Theorem 3.1.3 (see Proposition 3.4.3) and next we study the discrepancy of the derivative sequences associated with a fixed point of a primitive substitution (see Lemma 3.4.4 and 3.4.5). Then, a finitude argument due to [101] (Theorem 3.4.3) will allow us to conclude.

Discrepancy functions associated with a symbolic sequence

We give here a generalization of Theorem 3.1.3. The discrepancy function associated with a symbolic sequence U measures the speed of convergence of the vector

$$\left(\frac{|u_0u_1\dots u_{N-1}|_a}{N}\right)_{a\in\mathcal{A}}$$

towards the frequencies vector of the sequence U. We want now to introduce a similar notion but with words playing the role of letters. Let U be a symbolic sequence defined over the alphabet $\mathcal{A}$. Then, we can define, for any positive integer n, a discrepancy function of order n for U, in the following way :

$$\Delta_N^{(n)}(U) = \max_{w\in\mathcal{L}_n(U)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[w]}(T^k(U)) - N\mu(w) \right|,$$

where $|u|_w$ denotes the number of occurrences of the word w in the word u. We obtain in particular $\Delta_N^{(1)}(U) = \Delta_N(U)$. In view of the previous study, it is quite natural to ask if we can estimate the growth order of these discrepancy functions in the case of fixed points of primitive substitutions. In particular, is it possible to obtain such an information in terms of the incidence matrix associated with the substitution?

In order to answer this question, we recall now a useful construction which can be found in [195]. Let σ be a primitive substitution defined over the alphabet $\mathcal{A}$ and U an associated fixed point. For any positive integer l, $\mathcal{A}_l$ denotes the alphabet $\{1, 2, \dots, P_U(l)\}$, where P_U is the complexity function of U. We can thus consider a map Θ_l from $\mathcal{L}_l(U)$ to $\mathcal{A}_l$ wich associates with each factor of length l its order of occurrence in U. If i denotes a letter of the alphabet $\mathcal{A}_l$, we can conversely associate with i a unique word $\Theta_l^{-1}(i) = w_0w_1\dots w_{l-1} \in \mathcal{L}_l(U)$ since Θ_l is one-to-one. If

$$\sigma(\Theta^{-1}(i)) = \sigma(w_0w_1\dots w_{l-1}) = y_0y_1\dots y_{|\sigma(w_0)|-1}y_{|\sigma(w_0)|}\cdots y_{|\sigma(\Theta^{-1}(i)|-1},$$

then, we define the substitution of order l for σ by :

$$\sigma_l(i) = \Theta\left((y_0y_1\dots y_{l-1})(y_1y_2\dots y_l)\dots(y_{|\sigma(y_0)|-1}\cdots y_{|\sigma(y_0)|+l-2})\right). \tag{3.18}$$

So defined, $|\sigma_l(i)| = |\sigma(w_0)|$.

We recall now some results about the previous construction.

Proposition 3.4.1 (Queffélec [195]). *For every positive integer l, the substitution of order l for a subtitution σ admits the sequence $U_l = \sigma_l^\infty(1)$ as a fixed point. Moreover, if $U = u_0u_1 \ldots u_n \ldots$ means $\sigma^\infty(1)$, then the sequence $\Theta_l^{-1}(U_l)$ is composed by all the factors of length l of U without repetition and in the same order as in U, that is to say,*

$$\Theta_l^{-1}(U_l) = (u_0u_1 \ldots u_{l-1})(u_1u_2 \ldots u_l) \ldots (u_nu_{n+1} \ldots u_{n+l-1}) \ldots .$$

We can already notice that if $U_l = u_0^{(l)}u_1^{(l)} \ldots u_n^{(l)} \ldots$, then

$$|u_0^{(l)}u_1^{(l)} \ldots u_n^{(l)}|_i = |u_0u_1 \ldots u_n|_{\Theta^{-1}(i)}. \tag{3.19}$$

This implies in particular the following corollary.

Corollary 3.4.1. *The order of magnitude of the discrepancy function of order l for U is the same as that of the discrepancy function (of order one) of U_l.*

Proposition 3.4.2 (Queffélec [195]). *If σ is a primitive substitution then for every positive integer l, the substitution σ_l is primitive too and its incidence matrix M_l has the same Perron eigenvalue as the one of σ.*

The eigenvalues of M_l, $l \geq 2$, are those of M_2 with perhaps in addition the eigenvalue 0. Moreover, if P_2 is the minimal polynomial of M_2, then there exists an integer m such that $P_l = P_2X^m$, where P_l means the minimal polynomial of M_l.

Following Equation (3.1), we can note

$$S_{M_{\sigma_l}} = \{\theta_{l,i},\ 2 \leq 2 \leq d_l\} \cup \{\theta_{l,1} = \theta_l\}$$

the spectrum of the incidence matrix associated with σ_l. Proposition 3.4.2 implies that $\theta_l = \theta$, $\theta_{l,2} = \theta_{2,2}$ and $\alpha_{l,2} = \alpha_{2,2}$, where $\alpha_{l,2}$ means the multiplicity of $\theta_{l,2}$ in the minimal polynomial of M_l. In view of Corollary 3.4.1 and Proposition 3.4.2, we can state the following result.

Proposition 3.4.3. *Let U be a fixed point of a primitive substitution σ. Then, we have for every integer $l \geq 2$:*

(i)	*if $|\theta_{2,2}| < 1$, then*	$\Delta_N^{(l)}(U)$ *is bounded* ,
(ii)	*if $|\theta_{2,2}| > 1$, then*	$\Delta_N^{(l)}(U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}} N^{(\log_\theta |\theta_{2,2}|)}\right)$,
(iii)	*if $|\theta_{2,2}| = 1$ and $\theta_{2,2}$ is not a root of unity, then*	$\Delta_N^{(l)}(U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,
(iv)	*if $|\theta_{2,2}| = 1$ and $\theta_{2,2}$ is a root of unity, then*	$\Delta_N^{(l)}(U) = O\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,
	and	$\Delta_N^{(l)}(U)B = \Omega\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$.

Moreover, in the case where $\theta_{2,2}$ is a root of unity, then :

– *either* $\forall\, l \geq 2$, $\Delta_N^{(l)}(U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$,

– *or there exists an integer* $m \geq 2$ *such that,*

for $l < m$, $\Delta_N^{(l)}(U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$,

and for $l \geq m$, $\Delta_N^{(l)}(U) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}+1}\right)$.

Before proving Proposition 3.4.3, we need to establish the following lemma.

Lemma 3.4.2. *Let* l *be a positive integer,* U *an infinite sequence defined over the alphabet* $\mathcal{A}$ *and suppose that there exists a function* f *such that* $\Delta_N^{(l)}(U) = \Omega(f(N))$. *Then, we have* $\Delta_N^{(l+1)}(U) = \Omega(f(N))$.

Proof. Let P_l be the projection map defined from $\mathcal{L}_{l+1}(U)$ to $\mathcal{L}_l(U)$ by :

$$P_l((w_0 w_1 \dots w_{l+1})) = (w_0 w_1 \dots w_l).$$

Then, we obtain that

$$\Theta_l \circ P_l \circ \Theta_{l+1}^{-1}(U_{l+1}) = U_l.$$

The sequence U_l is thus the image by a letter-to-letter morphism of the sequence U_{l+1}, which implies that

$$\Delta_N^{(l+1)}(U) = \Omega\left(f(N)\right), \text{ as soon as } \Delta_N(U_l) = \Omega\left(f(N)\right).$$

Finally, we obtain by Corollary 3.4.1 that

$$\Delta_N^{(l+1)}(U) = \Omega\left(f(N)\right), \text{ as soon as } \Delta_N^{(l)}(U) = \Omega\left(f(N)\right),$$

concluding the proof. □

Lemma 3.4.2 points out the fact that the order of magnitude of the discrepancy functions $\Delta_N^{(l)}(U)$ associated with a symbolic sequence U could not decrease with respect to l.

Proof of Proposition 3.4.3. Equality (i), (ii), (iii) and (iv) come directly from Corollary 3.4.1, Proposition 3.4.2 and Theorem 3.1.3. Then, the last point of Proposition 3.4.3 is a consequence of Lemma 3.4.2. □

Discrepancy for derivative sequences

We exhibit here some connections between the discrepancy of a linearly reccurent sequence and the one of its derivative sequences.

We first present the main definitions concerning the notion of return words introduced in [99]. Let U be a uniformly recurrent sequence over the alphabet $\mathcal{A}$ and let u be a nonempty factor of U. A *return word* to u of U is a factor $u_{[i,k-1]}$ $(= u_i u_{i+1} \dots u_{k-1})$ of U such that i and k are two consecutive occurrences of u. If j denotes the first occurrence of u in U, the sequence $T^j(U)$ can be written in a unique way as a concatenation of return words to u. Let $\mathcal{R}_{U,u}$ be the set of return words to u in U. Then $T^j(U) = \omega_0 \omega_1 \dots \omega_i \dots$, where $\omega_i \in \mathcal{R}_{U,u}$. The fact that U is uniformly recurrent implies that $\mathcal{R}_{U,u}$ is a finite set. We can therefore consider a bijective map $\Lambda_{U,u}$ from $\mathcal{R}_{U,u}$ to the finite set $\{1, 2, \dots, \mathrm{Card}(\mathcal{R}_{U,u})\} = \mathcal{A}_{U,u}$, where, for definiteness, the return words are ordered according to their first occurrence (i.e., $\Lambda_{U,u}^{-1}(1)$ is the first return word ω_0, $\Lambda_{U,u}^{-1}(2)$ is the first ω_i which is different from ω_0, and so on). The *derivative sequence* of U on u is the sequence with values in the alphabet $\mathcal{A}_u$ given by

$$\mathcal{D}_u(U) = \Lambda_{U,u}(\omega_0)\Lambda_{U,u}(\omega_1) \dots \Lambda_{U,u}(\omega_i) \dots.$$

To such a sequence we can associate a morphism $\Theta_{U,u}$ from $\mathcal{A}_{U,u}$ to $\mathcal{A}^*$ defined by :

$$\Theta_{U,u}(i) = \omega_i.$$

We obtain $\Theta_{U,u}(\mathcal{D}_u(U)) = T^j(U)$. The morphism $\Theta_{U,u}$ is called the return morphism to u of U.

Theorem 3.4.3 (Durand [101]). *Let U be a uniformly recurrent sequence. Then, $\mathcal{D}er(U)$, the set of its derivative sequences, is finite if and only if U is a primitive substitutive sequence.*

Proposition 3.4.4 (Durand [100]). *Let U be a linearly reccurent sequence with constant K and μ be an invariant measure for the subshift associated with U. Then, for any factor w of U the following holds :*

$$0 < |w|\mu([w]) \leq K.$$

Now, if $w_1, w_2, \ldots, w_k$ denote some factors of U, we define the quantities :

$$\Delta_N(U; w_i) = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[w_i]}(T^k(U)) - N\mu([w]) \right|$$

and

$$\Delta_N(U; w_1, w_2, \ldots, w_k) = \max_{1 \leq i \leq k} \Delta_N(U; w_i).$$

Then, we can state the following.

Lemma 3.4.4. *Let U be a K-linearly reccurent sequence, w be a factor of U and V be the derivative sequence of U on w. Then, there exists a constant C such that :*

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \, n < Km, \quad \Delta_m(V) < C\Delta_n(U; w_1, w_2, \ldots, w_r),$$

where $w_1, w_2, \ldots, w_r$ denote the return words of U to w.

Lemma 3.4.5. *Let V be a derivative sequence of a K-LR sequence U. Then, there exists a constant C_V such that for any factor w of U satisfying $D_w(U) = V$ the following holds :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \in \mathbb{N}^*, \, m < n, \quad \Delta_n(U; w) < C_V \Delta_m(V).$$

Proof of Lemma 3.4.4. Let w be a factor of the sequence U and $V = D_w(U)$ be the derivative sequence of U on w. Let j denote the first occurrence of W in U and r the cardinality of the set $\mathcal{R}_{U,w}$. The invariant measures associated with U and V are respectivly denoted by μ and ν (we refer the reader to [100] for a proof of the unique ergodicity of a linearly recurrent subshift). We will write Θ instead of $\Theta_{U,w}$.

We thus obtain that $\Theta(V) = T^j(U)$, where T denotes the usual shift. With any integer m, we can associate an integer n such that :

$$\Theta(v_0 v_1 \ldots v_m) = u_j u_{j+1} \ldots u_n$$

and

$$n - j = \sum_{k=1}^{r} |v_0 v_1 \ldots v_m|_k |w_k|.$$

Since U is K-LR, we have that $j < Km$. Moreover, we have by definition of a return word :

$$|v_0 v_1 \ldots v_m|_i = \sum_{k=0}^{n} \chi_{[w_i]}(T^k(U)).$$

Then

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \chi_{[w_i]}(T^k(U))}{n} = \frac{|v_0 v_1 \dots v_m|_i}{\sum_{k=1}^{r} |v_0 v_1 \dots v_m|_k |w_k|},$$

which implies

$$\mu(w_i) = \frac{\nu(i)}{\sum_{k=1}^{r} \nu(k)|w_k|},$$

for $i \in \{1, 2, \dots r\}$. It thus follows that for $i \in \{1, 2, \dots r\}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \chi_{[w_i]}(T^k(U)) - n\mu(w_i) = |v_0 v_1 \dots v_m|_i - \frac{\left(\sum_{k=1}^{r} |v_0 v_1 \dots v_m|_k |w_k|\right) \nu(i)}{\sum_{k=1}^{r} \nu(k)|w_k|}$$

$$= |v_0 v_1 \dots v_m|_i - m\nu(i) + \nu(i) \left(m - \frac{\sum_{k=1}^{r} |v_0 v_1 \dots v_m|_k |w_k|}{\sum_{k=1}^{r} \nu(k)|w_k|} \right)$$

$$= |v_0 v_1 \dots v_m|_i - m\nu(i) + \frac{\nu(i)}{\sum_{k=1}^{r} \nu(k)|w_k|} \left(\sum_{k=1}^{r} |w_k|(m\nu(k) - |v_0 v_1 \dots v_m|_k \right).$$

Let us now consider the following $d \times d$ real matrix :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\nu(1)}{h} & \frac{\nu(1)}{h} & \dots\dots\dots\dots & \frac{\nu(1)}{h} \\ \frac{\nu(2)}{h} & 1 + \frac{\nu(2)}{h} & \dots\dots\dots\dots & \frac{\nu(2)}{h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\nu(r)}{h} & \frac{\nu(r)}{h} & \dots\dots\dots\dots & 1 + \frac{\nu(r)}{h} \end{pmatrix},$$

where $h = \sum_{k=1}^{r} \nu(k)|w_k|$. It thus follows that :

$$\begin{pmatrix} |u_0 u_1 \dots u_n|_{w_1} - n\mu(w_1) \\ \vdots \\ |u_0 u_1 \dots u_n|_{w_r} - n\mu(w_r) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |w_1|(m\nu(1) - |v_0 v_1 \dots v_m|_1) \\ \vdots \\ |w_d|(m\nu(r) - |v_0 v_1 \dots v_m|_r) \end{pmatrix}.$$

By a simple computation one can check that M is invertible if and only if

$$\sum_{l=1}^{r}\left(\frac{\nu(l)}{\sum_{k=1}^{r}\nu(k)|w_k|}\right)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{r}\nu(k)|w_k|}\neq -1.$$

This implies the existence, for every $1\leq j\leq r$, of coefficents $\left(a_1^{(j)},a_2^{(j)},\ldots,a_r^{(j)}\right)\in\mathbb{R}^r$ such that for any integer m there exists an integer $n<Km$ satisfying

$$|v_0v_1\ldots v_m|_j-m\nu(j)=\sum_{k=1}^{r}a_k^{(j)}\left(|u_0u_1\ldots u_n|_{w_k}-n\mu(w_k)\right)$$

and therefore the existence of a positive number C satisfying

$$\Delta_m(V)<C\Delta_n(U;w_1,w_2,\ldots,w_r),$$

concluding the proof. □

Proof of Lemma 3.4.5. We keep here the notation of the previous proof. Let us introduce the vector $f_w=(f_w(i))_{i\in\mathbb{R}^r}$ defined by $f_w(i)=1-|w_i|\mu(w)$. By definition of a derivative sequence, we are allowed to claim that

$$\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{[w]}(T^k(U))-n\mu(w)=S_V^{f_w}(m)-j\mu(w),$$

where j denotes the first occurence of w in the sequence U and m and n are defined as above (we recall in particular that $m<n<Km$). By definition of the measure μ, we have

$$\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{[w]}(T^k(U))-n\mu(w)=o(n),$$

and thus

$$S_V^{f_w}(m)=o(m).$$

In view of Equality (3.7), we obtain that $f_w\perp\Lambda'$, where $\Lambda'=(\nu(i))_{i=1,\ldots,r}$ is the frequencies vector of the sequence V. As we have already noticed, the familly of vectors (f_k), $1\leq k\leq r-1$, defined by

$$f_k(i)=\begin{cases}1 & \text{if } i=k,\\ \frac{\nu(k)}{\nu(k)-1} & \text{else,}\end{cases}$$

is a basis of the vectorial subspace $\Lambda'^{\perp}$. Then, there exist coefficients $(b_1,\ldots,b_{r-1})\in\mathbb{R}^r$ such that $f_w=\sum_{k=1}^{r-1}b_kf_k$. The coefficents b_k depend on f_w and thus on the word w, but since Proposition 3.4.4 claims that $|w|\mu(w)<K$, we have $0<|w_i|\mu(w)<K^2$ and thus $\|f_w\|_\infty<K^2$. The fact that $S_V^{f_k}(m)=(1-\nu(k))\left(|v_0v_1\ldots v_m|_k-m\nu(k)\right)$ implies $\left|S_V^{f_k}(m)\right|<\Delta_m(V)$. Moreover, by linearity we have $S_V^{f_w}(m)=\sum_{k=1}^{r-1}b_kS_V^{f_k}(m)$ and it thus follows :

$$\Delta_n(U;w)<\sum_{k=1}^{r-1}b_k\Delta_m(V)+j\mu(w)<\sum_{k=1}^{r-1}b_k\Delta_m(V)+K.$$

This proves, since $\|f_w\|_\infty < K^2$, the existence of a constant C_V, which does not depend on the choice of w, and such that $\Delta_n(U;w) < C_V \Delta_m(V)$, hence the proof. $\square$

Proof of Theorem 3.1.7. Let U be a fixed point of a primitive substitution σ and $\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{O}(U)}, T, \mu)$ the dynamical system arising from U. In order to fix the ideas, we assume that $|\theta_{2,2}| > 1$ and we note $f(N) = (\log N)^{\alpha_{2,2}} N^{(\log_\theta |\theta_{2,2}|)}$. Then, Proposition 3.4.3 implies that $D_N(\mathcal{X}) = \Omega(f(N))$ and that for any word $w \in \mathcal{L}(U)$, $\Delta_N(U;w) = O(f(N))$. It remains to prove that $D_N(\mathcal{X}) = O(f(N))$. If $w_1, w_2, \ldots, w_d$, denote the return words of U to w, we thus deduce that there exists $C_1 > 0$ such that

$$\Delta_N(U; w_1, w_2, \ldots, w_d) = \max_{1 \leq i \leq d} \Delta_N(U; w_i) < C_1 f(N).$$

Now let V be the derivative sequence of U on w. Lemma 3.4.4 thus implies the existence of $C_2 > 0$ satisfying $\Delta_N(V) < C_2 f(N)$, because f is a sublinear function (that is, $\forall(x,y)\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$) and hence

$$\sup_{V \in \mathcal{D}er(U)} \Delta_N(V) < C_3 f(N),$$

with $C_3 > 0$ since, following Theorem 3.4.3, $\mathcal{D}er(U)$ is a finite set. Therefore, Lemma 3.4.5 implies

$$\sup_{w \in \mathcal{L}(U)} \Delta_N(U;w) < C_4 f(N),$$

for some $C_4 > 0$.

Let $W = (w_k)_{k \geq 0} \in \overline{\mathcal{O}(U)}$ and j be the first occurrence of the word $w_0 \ldots w_{N-1}$ in U (such an occurrence always exists by minimality). Since U is linearly reccurent, there exists $K > 0$ (just depending on U), such that $j < KN$. Then, we have

$$\Delta_N(W;w) \leq \Delta_j(U;w) + \Delta_{j+N}(U;w) < C_4 f(KN) + C_4 f((K+1)N) < C_5 f(N),$$

where C_5 neither depends on W nor on w, since f is increasing and sublinear. Finally, we obtain that $D_N(\mathcal{X}) = O(f(N))$, which achieves the proof because the other cases could be dealt exactly in the same way. $\square$

3.5 An application to spectral theory

In this section, we show how our results can be used to obtain a spectral information for primitive substitutive subshifts and thus for their measure-theoretic isomorphic dynamical systems.

Around Kesten's Theorem

Let $\mathcal{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ be an ergodic dynamical system. For any $B \in \mathcal{B}$ and $x \in X$, we consider

$$\Delta_N(T;B;x) = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\chi_B(T^k(x)) - \mu(B) \Big) \right|.$$

By Birkhoff's ergodic theorem, for any $B \in \mathcal{B}$ and almost all $x \in X$,

$$\frac{1}{N} \Delta_N(T;B;x) \to 0,$$

when N tends to infinity. A set B is called a *bounded remainder set* for T if $\Delta_N(T;B;x)$ is bounded on a set of measure one.

If we consider an irrational rotation on the one-dimensional torus, H. Kesten [146] gives the following characterization of bounded remainder sets which are intervals.

Theorem 3.5.1. *Let T be a translation on $\mathbb{T}$ by an irrational α. Then, an interval I is a bounded remainder set for T if and only if its length belongs to $\mathbb{Z}\alpha \mod 1$.*

Remark 3.5.2. *The "if" part is due to E. Hecke in 1922. One can construct bounded remainder sets without any measurability assumption (see [204]). Although these examples are quite pathological, this shows that intervals correspond to a really particular case. In this direction we also mention a negative result in [159] which states that no non-trivial cartesian product of intervals could be a bounded remainder set for a rotation in dimension higher than or equal to two.*

In the symbolic framework, intervals could naturally be replaced by cylinders. Therefore, we can translate the previous problematic by : given a subshift, does there exist cylinders which are bounded remainder sets ?

Our study answers partially this question in the case of primitive substitutive subshifts. In particular, we obtain that, for a substitution satisfying the condition $\theta_{2,2} < 1$ (for instance the Fibonacci or the Tribonacci substitutions as it is shown in Section 3.6), all the cylinders are bounded remainder sets. Theorem 3.1.7 proves even that in this case there exists a uniform bound. Moreover, the method developed in this paper allows, for any fixed primitive substitution σ and any fixed factor w, to answer the following : is $[w]$ a bounded remaider set for the subshift arising from σ ? We are also able to give then an explicit bound.

Number of problems (in particular related with toral translations) are strongly connected with the notion of bounded remainder sets. For instance, it was believed that an Arnoux-Rauzy sequence (see [23]) would be a natural coding of a rotation on the two-dimensional torus. The authors of [63] provide a counterexample to this conjecture by proving an Arnoux-Rauzy sequence to have an unbounded discrepancy function. In the same spirit, symbolic dynamical systems arising from a Pisot type substitution (that is, the Perron eigenvalue is a Pisot number and the characteristic polynomial is irreducible) are expected (when they satisfy some additional technical conditions) to be measure-theoretically conjugate with a minimal rotation on a torus (see for instance [202, 57]). The fact that a fixed point of a Pisot type substitution admits a bounded discrepancy function plays a full role in this conjecture in view of [204] and [110].

An extension of Kesten's theorem related to spectral theory

We present here a nice result making relevant the notion of discrepancy in ergodic theory. H. Fürstenberg and al. [119] (see also K. Petersen [191] and G. Halász [123]) proved the following strong generalisation of Kesten's theorem.

Theorem 3.5.3. *Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ be an ergodic dynamical system. If a subset B of $\mathcal{B}$ is a bounded remainder set for the transformation T, then $e^{2\pi i\mu(B)}$ is an eigenvalue for T. Moreover, if $e^{2\pi ir}$ is an eigenvalue for T, there exists a bounded remainder set $B \in \mathcal{B}$ such that $\mu(B) = r$.*

We can easily translate this result in terms of discrepancy, in particular to provide a simple condition of non-weak mixing for primitive substitutive subshifts.

Proposition 3.5.1. *Let U be a fixed point of a primitive substitution σ and $\mathcal{X}$ be the associated subshift. If $\Delta_N(\Lambda, U)$ is bounded, that is, if one of the following holds :*
(i) $|\theta_2| < 1$,
(ii) $|\theta_2| = 1$, $\alpha_2 = 0$, *θ_2 is a root of unity and* $A_{\sigma,U} = 0$,
then, $\mathcal{X}$ could not be weakly mixing.

In particular, we recover that the subshift arising from a Pisot type substitution is never weakly mixing. This result, mentioned in [222], derives from one of B. Solomyak [230] (but we do not require the irreducibility of the characteristic polynomial of the incidence matrix associted with the substitution in Proposition 3.5.1, contrary to the hypothesis done in [230]).

An important point is that Corollary 3.1.5 and Theorem 3.1.7 provide a concrete way to obtain eigenvalues for primitive substitutive subshifts. In fact, since the sets considered are cylinders, one expects to be able to compute their measures. In the case, for instance, of the Fibonacci or of the Tribonacci subshifts, we obtain in this way all the eigenvalues by proving that any cylinder corresponds to a bounded remainder set and using that the eigenvalues form an additive group. It seems that such a result is also true for all Pisot type substitutions. For the Morse subshift, Theorem 3.1.7 does not allow to show that the discrepancy function of the system is bounded. However, the Rokhlin stack representation (see for instance [194], Chapter 5) of this subshift makes clear that every cylinder is a bounded remainder set, providing again all the eigenvalues.

3.6 Applications to toral translations

In this section, we give some applications of our results. Since toral translations provide certainly the most important class of well distributed sequences (which are of great interest at once in number and ergodic theory) we have chosen to focus exclusively on examples given by these transformations. However, the class of sequences (or systems) concerned by this work is obviously not reduced to the one arising from rotations (we refer the reader to [1] for a larger zoo of examples).

Rotation with golden ratio and the Fibonacci substitution

The Fibonacci substitution σ is defined over the alphabet $\{1,2\}$ by :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 12 \\ 2 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Let us denote by U the unique fixed point of this substitution. It is well-known that one can obtain U by coding the sequence $\left(\left\{n(\frac{\sqrt{5}-1}{2})\right\}\right)_{n\geq 0}$ with respect to the partition of $\mathbb{T}$ in $\left[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$ and $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right[$. The incidence matrix associated with the Fibonacci substitution admits two distincts simple eigenvalues :

$$\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ and } \theta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

It thus follows that $|\theta_2| < 1$. Let $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ be the frequencies vector associated with U. We have, in view of Corollary 3.1.5 that $\Delta_N(\Lambda, U)$ is bounded. A more precise study of the prefix automaton associated with the pair (σ, U) allows one to compute an explicit bound. In fact, the computation gives $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$ and $F_{f_1,2,0} = \sqrt{5}$ (these quantities are respectively defined in (3.3) and (3.9) of Section 3.2).

It thus follows from Figure 3.4 that

$$\begin{aligned} D_N(\Lambda, U) &= \left(1 - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) S_U^{f_1}(N) \\ &\leq \left(1 - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta_2)^{2k} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

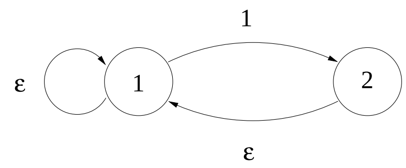


FIG. 3.4 – The prefix automaton associated with the Fibonacci substitution

which is an optimal result. This implies

$$\sup_{V \in \overline{\mathcal{O}(U)}} D_N(\Lambda, U) \leq 5 - \sqrt{5},$$

which means that the interval $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$ is a bounded remainder set (bounded by $5 - \sqrt{5}$) for the sequence $\left(\left\{n(\frac{\sqrt{5}-1}{2})\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

We want now to construct the Fibonacci substitution of order two. It is well-known that U is a Sturmian sequence and thus admits three factors of length two, more pecisely, $\mathcal{L}_2(U) = \{(12), (21), (11)\}$. Then, we obtain $\Theta^{-1}(1) = (12)$, $\Theta^{-1}(2) = (21)$, and $\Theta^{-1}(3) = (11)$, where the map Θ is defined as in the beginning of Section 3.4. Since $\sigma(12) = 121$, $\sigma(21) = 112$ and $\sigma(11) = 1212$, it follows that the substitution of order two for σ is defined by

$$\sigma_2(1) = 12,\ \sigma_2(2) = 3,\ \text{and}\ \sigma_2(3) = 12.$$

We thus obtain that the incidence matrix associated with the Fibonacci substitution of order two admits three simple eigenvalues :

$$\left\{\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \theta_{2,2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \text{and}\ \theta_{2,3} = 0\right\}.$$

Theorem 3.1.7 thus implies that the Fibonacci subshift admits a bounded discrepancy function.

Quadratic rotations and substitutive Rote sequences

Let us consider the quadratic number $\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. We define the sequence $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{if } \{n\alpha\} \in [0, \frac{1}{2}[, \\ 2 & \text{else.} \end{cases}$$

This sequence is called coding of rotation of parameters $(\alpha, \frac{1}{2})$ (see for instance [5, 12, 86]) and is included in the class of sequences of complexity $2n$ considered in [209]. It is shown in [203] (using the self-similarity of a quadratic three-interval exchanges) that

$$U = \phi(V_\sigma),$$

where ϕ is the morphism defined by

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2\} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 122 \\ 3 & \longmapsto & 12 \end{array}$$

and V_σ is the fixed point of the substitution σ defined by

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 13223 \\ 3 & \longmapsto & 1323 \end{array}$$

The incidence matrix associated with σ admits three simple eigenvalues :

$$\theta = 2+\sqrt{3},\ \theta_2 = 1 \text{ and } \theta_3 = \frac{1}{\theta} = 2-\sqrt{3}.$$

We thus obtain $\theta_2 = 1$ and $\alpha_2 = 0$. In particular, θ_2 is a root of unity and we have thus to consider the constant $A_{\sigma,U}$. Using the algorithm described in Section 3.3.3, we can show that $A_{\sigma,U}$ is not equal to zero (see [2] for more details), which gives

$$\Delta_N(\Lambda, V_\sigma) = (O \cap \Omega)\left(\log(N)\right).$$

where Λ means the natural probability vector associated with V_σ. This implies, if Λ denotes the uniform probability vector on $\{1,2\}$, that

$$\Delta_N(\Lambda, U) = O\left(\log(N)\right),$$

but *a priori* not necessarily

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \Omega\left(\log(N)\right).$$

However, $\Delta_N(\Lambda, U) = \Omega\left(\log(N)\right)$ comes from Lemma 3.4.4 since V_σ is the derivative sequence of U on the letter 1 (this is proved in [5]).

More generally, it is shown in [5] that if U means the coding of rotation of quadratic parameters (α, β), that is, α is a quadratic number and β lies in the quadratic extension of α, then

$$\Delta_N(\Lambda, U) = (O \cap \Omega)\left(\log(N)\right)$$

and a way of computing the quantity $\limsup_{N\to\infty} \dfrac{\Delta_N(\Lambda, U)}{\log N}$ is exposed. In the case described above, we obtain for instance

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\Delta_N(U)}{\log N} = \frac{1}{2\log(2+\sqrt{3})}.$$

If $\mathcal{X}$ denotes the subshift associated with a coding of rotation of quadratic parameters (α, β), we thus obtain that $D_N(\mathcal{X}) = \Omega(\log N)$ since $D_N(\mathcal{X}) \geq \Delta_N(\Lambda, U)$. Moreover, $D_N(\mathcal{X}) = O(\log N)$ is implied by the fact that α has bounded partial quotients in its continued fraction expansion (a proof is given in [152]).
The method used here shows that Theorem 3.1.3 could sometimes be extended to the study of substitutive sequences which are not necessarily fixed points of substitutions.

Two-dimensional rotation and the Tribonacci substitution

G. Rauzy introduced in [202] the Tribonacci substitution, which is defined over the alphabet $\{1,2,3\}$ by :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 12 \\ 2 &\longmapsto 13 \\ 3 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Let us denote by U its unique fixed point. The incidence matrix of σ admits three disctinct simple eigenvalues which are the roots of the polynomial

$$X^3 - X^2 - X - 1.$$

It thus comes that $|\theta_2| < 1$. Following Corollary 3.1.5 we have that $\Delta_N(U)$ is bounded. Let α be the unique real root of $X^3 - X^2 - X - 1$. In [202], G. Rauzy exhibits a measurable partition Ω of a fundamental domain of $\mathbb{R}^2$ in three subsets Ω_i, $i = 1, 2, 3$, with fractal boundaries and whose union is known as the Rauzy fractal. He shows that the natural coding, with respect to the Ω_i, of the Kronecker sequence $(n\alpha, n\alpha^2)$ modulo $\mathbb{Z}^2$ is the Tribonacci sequence U. The fact

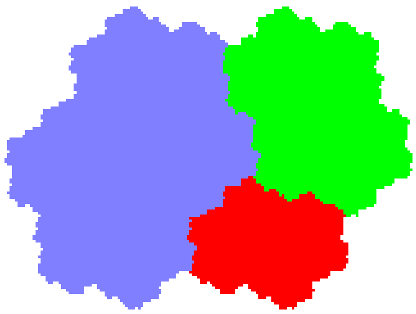


FIG. 3.5 – The Rauzy fractal

that $\Delta_N(U)$ is bounded means that each set Ω_i corresponds to a bounded remainder set for the two-dimensional toral translation by the vector (α, α^2). G. Rauzy provides like this one of the first example of a non-trivial bounded remainder set for a two-dimensional rotation (see also [235] for such an example with a parallelogram). Similar constructions give examples of bounded remainder sets for Kronecker sequences in higher dimensions (see for instance the k-bonacci substitutions in [170]). It is also possible, as we have done in the Fibonacci case, to make more precise the result

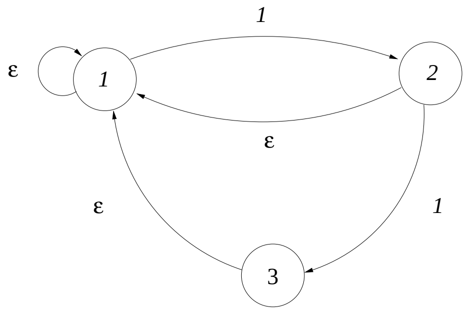


FIG. 3.6 – The prefix automaton associated with the Tribonacci substitution

of G. Rauzy by giving an explicit bound for the remainder sets Ω_i. Then, a more detailed study of the prefix automaton described in Figure 3.6 allows to obtain that $\Delta(\Lambda, U) \leq 2,76$.

We want now to construct the Tribonacci substitution of order two. It is well-known (see [23]) that U is a sequence of complexity $2n+1$ and thus admits five factors of length two, more pecisely, $\mathcal{L}_2(U) = \{(12),(21),(13),(31),(11)\}$. Then, we obtain $\Theta^{-1}(1) = (12)$, $\Theta^{-1}(2) = (21)$, $\Theta^{-1}(3) = (13)$, $\Theta^{-1}(4) = (31)$, and $\Theta^{-1}(5) = (11)$, where the map Θ is defined as in the beginning of Section 3.4. Since $\sigma(12) = 1213$, $\sigma(21) = 1312$, $\sigma(13) = 121$, $\sigma(31) = 112$, and $\sigma(11) = 1212$, it follows that the substitution of order two for σ is defined by

$$\sigma_2(1) = 12,\ \sigma_2(2) = 34,\ \sigma_2(3) = 12,\ \sigma_2(4) = 5 \text{ and } \sigma_2(5) = 12.$$

We thus obtain that the incidence matrix associated with the Tribonacci substitution of order two admits the same eigenvalues as the one of the Tribonacci substitution with in addition the eigenvalue zero (with multiplicity two). Theorem 3.1.7 thus implies that the Tribonacci subshift admits a bounded discrepancy function.

3.7 Compléments et remarques sur l'article

Nous donnons dans ce paragraphe un exemple d'application du théorème 3.1.3 à la minoration de la discrépance d'un système dynamique de l'intervalle. Pour cela nous rappelons une construction et quelques définitions qui figurent dans [88].

Étant donné une transformation T définie de l'intervalle $[0,1]$ dans lui même, on définit la discrépance du système T par

$$D_N(T) = \sup_{x\in[0,1[} D_N((T^n(x))_{n\geq 0}),$$

où $D_N((T^n(x))_{n\geq 0})$ désigne la discrépance (au sens classique) de la suite réelle $(T^n(x))_{n\geq 0})$. Par exemple, si T est une rotation d'angle α, on vérifie facilement que $D_N(T) = D_N(\alpha)$. En prenant pour α un nombre quadratique, on obtient un transformation de l'intervalle T, satisfaisant $D_N(T) = O(\log N)$. Ainsi, il n'existe pas de minoration *a priori* pour un système (c'est-à-dire valable pour tout système), qui soit meilleure que celle du théorème de W. Schmidt, à savoir

$$D_N(T) = \Omega(\log N). \tag{3.20}$$

Nous avons déjà fait allusion dans la section 0.2.3 au fait que tout système associé à une substitution primitive peut être représenté géométriquement à l'aide d'une transformation de l'intervalle. Plus précisément, la transformation obtenue est une translation par intervalles.

Définition 3.7.1. *Une transformation T de l'intervalle $[0,1]$ est appelée translation par intervalles s'il existe une famille $\mathcal{F}$ au plus dénombrable d'intervalles telle que pour tout ε strictement positif :*

(i) $\exists (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in \mathcal{F}^k,\ I_j \cap I_l = \emptyset,\ 0 \leq j < l \leq k,$

(ii) $\mu\left(\bigcup_{1\leq j\leq k} I_j\right) > 1-\varepsilon,$

(iii) $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in [0,1]^k,\ x \in I_j \Rightarrow T(x) = x + \alpha_j.$

Nous allons à présent rappeler brièvement la construction obtenue par la méthode du couper-empiler dans le cas de la substitution primitive de Rudin-Shapiro, σ, définie sur l'alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$ par :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 12 \\ 2 &\longmapsto 13 \\ 3 &\longmapsto 42 \\ 4 &\longmapsto 43 \end{aligned}$$

Le but de cette construction est de décrire une transformation R de l'intervalle par approximation successive en en donnant une représentation par couper-empiler (on dit aussi par tours de Rokhlin). L'étape d'initialisation du procédé de construction consite à découper l'intervalle $[0, 1[$ en quatre sous-intervalles de même longueur $[0, \frac{1}{4}[$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ et $[\frac{3}{4}, 1[$.

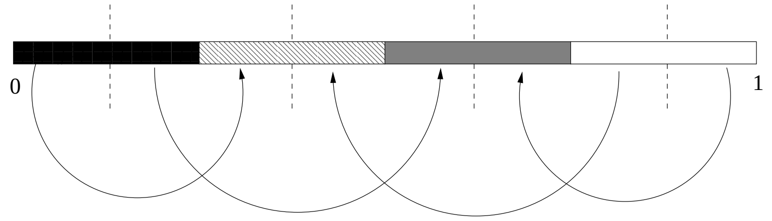


FIG. 3.7 – Découpage initial et définition de R sur les deux tours extrêmes de hauteur nulle.

Ce découpage est en fait imposé par le vecteur propre normalisé, Λ, associé à la valeur propre dominante de M_σ qui est égal à $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et qui correspond au vecteur des fréquences des lettres dans n'importe quel élément du sous-shift associé à σ. Nous obtenons ainsi quatre tours de hauteur nulle ordonnées de la façon suivante : $T_1(0) = [0, \frac{1}{4}[$, $T_2(0) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, $T_3(0) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ et $T_4(0) = [\frac{3}{4}, 1[$. Pour obtenir les quatre tours de hauteur 1, on utilise le procédé décrit par les figures 3.7 et 3.8, ce qui revient à découper chaque tours en deux pour former les quatre mots 12, 13, 42 et 43, qui correspondent aux images des quatre lettres par σ.

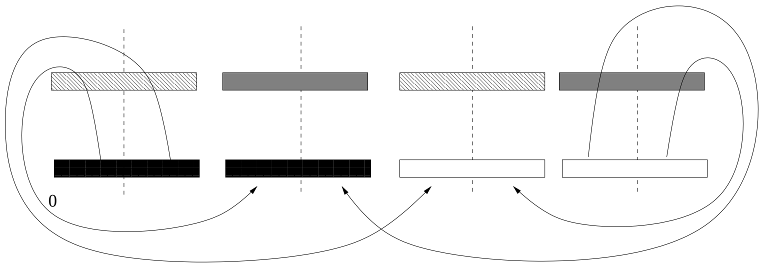


FIG. 3.8 – Première étape de construction et définition de la transformation R.

Ainsi, après la première étape, R est définie partout sauf sur les deux intervalles $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$, chaque intervalle qui n'est pas au sommet d'une tour étant translaté sur l'intervalle qui est au-dessus de lui dans la tour. Ensuite, on réitère ce procédé de construction, chaque tour est coupée verticalement en deux et empilée suivant la même règle. À la n-ième étape, la transformation R est définie partout sauf sur les quatre intervalles qui se situent au sommet des tours (voir figure 3.9). Ce choix de couper-empiler permet en fait de définir R sur $[0, 1[$ tout entier et de montrer que le système dynamique associé à R est métriquement isomorphe au sous-shift associé à σ ; en particulier R est uniquement ergodique, la mesure de Lebesgue étant son unique mesure invariante (voir [88]).

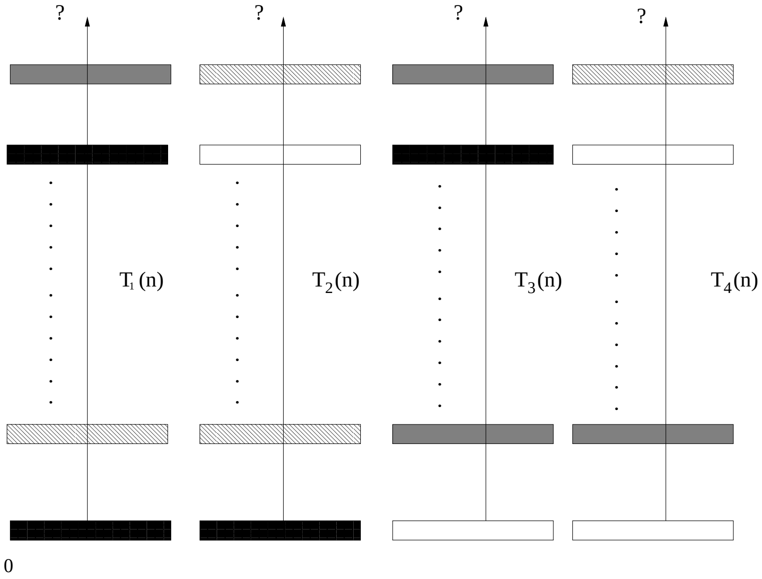


FIG. 3.9 – Les quatre tours $T_1(n)$, $T_2(n)$, $T_3(n)$ et $T_4(n)$ obtenues après n étapes de construction.

Cette construction présente l'avantage suivant : si l'on numérote respectivement par 1, 2, 3 et 4 les quatre intervalles de la partition initiale $T_1(0)$, $T_2(0)$, $T_3(0)$ et $T_4(0)$, alors le codage naturel de l'orbite du point 0 sous l'action de R par rapport à cete partition est exactement le point fixe de la substitution σ qui commence par la lettre 1. Notons U ce point fixe. On obtient alors

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \Delta_N((R^n(0))_{n\geq 0}; T_i(0)) = \Delta_N(\Lambda, U),$$

où $\Delta_N((R^n(0))_{n\geq 0}; T_i(0))$ désigne la discrépance locale de la suite $(R^n(0))_{n\geq 0}$ en $T_i(0)$.

Il vient *a fortiori* que pour tout entier N,

$$D_N(R) \geq \Delta_N(\Lambda, U).$$

Un calcul rapide montre que pour la substitution σ, les valeurs de θ et $|\theta_2|$ sont respectivement 2 et $\sqrt{2}$. Le théorème 3.1.3 implique donc

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \Omega(\sqrt{N})$$

et nous obtenons ainsi la minoration suivante de la discrépance du système dynamique associé à R :

$$D_N(R) = \Omega(\sqrt{N}),$$

ce qui produit une minoration bien meilleure que la minoration obtenue *a priori* (voir 3.20).

Chapitre 4

Équilibre(s) des points fixes de substitutions primitives

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés d'équilibre des points fixes de substitutions primitives et a fait l'objet d'un article accepté pour publication dans la revue *Theoretical Computer Science*. Nous introduisons deux fonctions généralisant la notion d'équilibre. Nous montrons que, dans le cas des points fixes de substitutions primitives, les propriétés d'équilibre et celles de répartition étudiées au chapitre 3 sont très liées. Nous en déduisons pour ces suites le comportement asymptotique de ces fonctions d'équilibre.

We introduce here some definitions about balance properties for an infinite word.

Definition 4.0.1. *Let us consider an alphabet $\mathcal{A}$, ω an infinite word in $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, and an integer C. The word ω is said C-balanced if :*

$$\forall i \in \mathcal{A},\ \forall (v,w) \in \mathcal{L}(\omega),\ |v| = |w| \Rightarrow -C \leq |v|_i - |w|_i \leq C.$$

If ω is 1-balanced, we just say that ω is balanced.

In [41], V. Berthé and R. Tijdeman introduce a measure of balance for multi-dimensional words. We use in [5] a one-dimensional analogous which is defined by :

Definition 4.0.2. *Let U be an infinite sequence defined over an alphabet $\mathcal{A}$. We define the balance function of U in the following way :*

$$B_U(n) = \max_{a \in \mathcal{A}} \max_{w,w' \in \mathcal{L}_n(U)} \left\{ \big| |w|_a - |w'|_a \big| \right\}.$$

We thus obtain that a sequence is C-balanced if and only if its balance function is bounded by C.

4.1 Links between balance and discrepancy

In this section, we study the connections between the balance and the discrepancy functions for a symbolic sequence. We notice the existence of some links in the general case and also their limits. In particular we show that these two notions are strongly connected in the case of linearly recurrent sequences.

The general case We first exhibit some links between the balance and the discrepancy functions. We prove in particular that if one of both of these functions is bounded, then the other should be bounded too. We thus obtain that problems of bounded remainder sets and C-balanced sequences are strongly connected.

Proposition 4.1.1. *Let $U = u_0u_1 \dots u_n \dots$ be a symbolic sequence defined over the alphabet $\mathcal{A}$. Then the two following propositions are equivalent :*
(i) There exists a probability measure Λ such that $\Delta_N(\Lambda, U)$ is bounded.
(ii) $B_N(U)$ is bounded.

Proof. Let us show that $i) \Rightarrow ii)$. We thus suppose there exists a constant $C > 0$ such that :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \ \ ||u_0u_1 \dots u_{N-1}| - N\Lambda_a| \le C. \tag{4.1}$$

Let us consider an integer N and ω a factor of length N in U. If the integer k denotes an occurrence of ω in U, we have

$$u_0u_1 \dots u_{k-1} \dots u_{N+k-1} = u_0u_1 \dots u_{k-1}\omega.$$

Let $a \in \mathcal{A}$, (4.1) implies

$$||u_0u_1 \dots u_{N+k-1}|_a - (N+k)\Lambda_a| \le C.$$

We obtain

$$|(|u_0u_1 \dots u_{k-1}|_a - k\Lambda_a) + (|\omega|_a - N\Lambda_a)| \le C$$

and thus because of (4.1)

$$||\omega|_a - N\Lambda_a| \le 2C.$$

Finally, for any pair (ω_1, ω_2) of factors of length N, we have

$$||\omega_1|_a - |\omega_2|_a| < 4C,$$

which implies that the balance function of U is bounded by $4C$.

We have now to prove $ii) \Rightarrow i)$. Let us suppose that the balance function of U is bounded by a positive constant C, that is to say :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall \omega, \ \omega' \in \mathcal{L}_N(U), \ \ \big||\omega|_a - |\omega'|_a\big| \le C. \tag{4.2}$$

Let us first fix a letter a in the alphabet $\mathcal{A}$. For every integer k, w_k denotes a word in $\mathcal{L}_k(U)$ such that :

$$\forall w \in \mathcal{L}_k(U), \quad |w|_a \ge |w_k|_a.$$

Such a word w_k clearly exists. Then, if $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, and $w \in \mathcal{L}_{nl}(U)$, the inequality (4.2) implies

$$0 \le |w|_a - l|w_n|_a \le lC \ \text{ and } \ 0 \le |w|_a - n|w_l|_a \le nC.$$

By substraction, we obtain

$$-nC \le n|w_l|_a - l|w_n|_a \le lC \ ,$$

and

$$-\frac{C}{l} \le \frac{|w_l|_a}{l} - \frac{|w_n|_a}{n} \le \frac{C}{n}.$$

The sequence $\left(\frac{|w_n|_a}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ is thus convergent. Therefore there exists a real Λ_a, the limit of this sequence, satisfying :

$$0 \le \Lambda_a - \frac{|w_n|_a}{n} \le \frac{C}{n}. \tag{4.3}$$

Let us remember that (4.2) implies for every integer n

$$0 \leq |U_n|_a - |w_n|_a \leq C \ ,$$

that is to say,

$$0 \leq \frac{|U_n|_a}{n} - \frac{|w_n|_a}{n} \leq \frac{C}{n}.$$

By substracting the inequality (4.3), it follows

$$-\frac{C}{n} \leq \frac{|U_n|_a}{n} - \Lambda_a \leq \frac{C}{n}.$$

The sequence $\left(\frac{|U_n|_a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converges thus to Λ_a, the frequency Λ_a of the letter a. We obtain finally

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ ||U_n|_a - n\Lambda_a| \leq C,$$

which ends the proof. □

Remark 4.1.1. *In the previous demonstration, we show in fact the following :*
If for any letter i, the set $\{i\}$ is a bounded remainder set (with bound C) for the sequence U with respect to the probability measure Λ, then the balance function of U is bounded by $4C$.
In the case of the Morse sequence (see Example 4.3.5), the letters 0 and 1 correspond to bounded remainder sets (with bound $\frac{1}{2}$) with respect to the uniform probability measure on $\{0,1\}$ (the bound $\frac{1}{2}$ being reach). Moreover this sequence is 2-balanced (but not balanced). This shows that the upper bound we obtain in the proof of Proposition 4.1.1 is optimal.

Proposition 4.1.1 states that both balance and discrepancy functions have the same order of magnitude if one of them is bounded. We show now that it does not hold in the general case (Proposition 4.1.3). However, we prove that the order of magnitude of the discrepancy function is at most the one of the balance function (Proposition 4.1.2).

Proposition 4.1.2. *Let $U = u_0u_1 \ldots u_n \ldots$ be a sequence defined over the alphabet $\mathcal{A} = \{1, \ldots, d\}$ and such that each letter of $\mathcal{A}$ admits a frequency in U. Let $\Lambda = (\Lambda_i)_{i\in\mathcal{A}}$ denote the frequencies vector of U. If the balance function of U satisfies :*

$$B_U(N) = O(f(N)) \ \ (\textit{respectively } B_U(N) = o(f(N))),$$

then

$$\Delta_N(\Lambda, U) = O(f(N)) \ \ (\textit{respectively } \Delta_N(\Lambda, U) = o(f(N))).$$

Proof. The same reasoning as in the second part of the proof of Proposition 4.1.1 applies if we replace C by $f(N)$. □

We produce now a particular sequence with both small discrepancy and extremly bad balance. We thus deduce that a converse to Proposition 4.1.2 could not hold.

Proposition 4.1.3. *Let f be a real increasing unbounded function such that $f(N) = o(N)$. Then, there exists a sequence U defined over the alphabet $\{0,1\}$ satisfying :*

(i) U has a frequency vector denoted by Λ,
(ii) $\Delta_N(\Lambda, U) = O(f(N))$,
(iii) for every integer N, $B_U(N) = N$.

Proof. Let f be a real increasing unbounded function. Let $\lfloor x \rfloor$ denote the fractional part of the real x. We introduce then the following binary sequence U defined over $\{0,1\}$ in the following way :

$$U = \quad 01 \quad \underbrace{00\ldots0}_{\lfloor f(1)\rfloor \text{ times}} \quad \underbrace{11\ldots1}_{\lfloor f(1)\rfloor \text{ times}} \quad 0101 \quad \underbrace{00\ldots0}_{\lfloor f(2)\rfloor \text{ times}} \quad \underbrace{11\ldots1}_{\lfloor f(2)\rfloor \text{ times}} \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\underbrace{0101\ldots01}_{N \text{ times}} \quad \underbrace{00\ldots0}_{\lfloor f(N)\rfloor \text{ times}} \quad \underbrace{11\ldots1}_{\lfloor f(N)\rfloor \text{ times}} \quad \ldots\ldots$$

We obtain that U has arbitrary long blocks of 0's and 1's because f is unbounded. This implies that

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ B_U(N) = N.$$

If U_N denotes the prefix of length N of U, we obtain then by construction of our sequence

$$|U_N|_0 - |U_N|_1 \leq \lfloor f(N) \rfloor, \tag{4.4}$$

since f is increasing, and thus the letters 0 and 1 have a frequency equal to $\frac{1}{2}$ in U, because $f(N) = o(N)$. By inequality (4.4), we have

$$\left| |U_N|_0 - \frac{1}{2}N \right| \leq \frac{1}{2}\lfloor f(N) \rfloor$$

and

$$\left| |U_N|_1 - \frac{1}{2}N \right| \leq \frac{1}{2}\lfloor f(N) \rfloor.$$

Then, if Λ means the uniform probability vector over $\{0,1\}$, we obtain

$$\Delta_N(\Lambda, U) \leq \frac{1}{2}\lfloor f(N) \rfloor$$

and thus

$$\Delta_N(\Lambda, U) = O(f(N)),$$

which ends the proof. □

Remark 4.1.2. *The sequence U considered in the proof of Proposition 4.1.3 is clearly not linearly recurrent since the blocks of 0's and of 1's first occur at a rank which is not proportional to their lengths.*

The case of LR sequences It is proved in [100] that if U is a LR sequence then each letter in U admits a frequency. Hence U is uniformly distributed with respect to the natural probability measure given by its frequencies. The following result states a partial converse to Proposition 4.1.2 in the case of LR sequences.

Proposition 4.1.4. *Let U a linearly recurrent sequence (with constant K) defined over the alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, d\}$. Let $\Lambda = (\Lambda_i)_{i\in\mathcal{A}}$ denote the frequency vector associated with U. If there exists an increasing sublinear function f (that is $\forall (x,y),\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$) such that :*

$$\Delta_N(\Lambda, U) = O(f(N)) \;\; (\textit{respectively } \Delta_N(\Lambda, U) = o(f(N))),$$

then

$$B_U(N) = O(f(N)) \;\; (\textit{respectively } B_U(N) = o(f(N))).$$

Proof. Let us suppose that there exists an increasing function f satisfying

$$\Delta_N(\Lambda, U) = O(f(N)).$$

Then, there exists a positive constant $A > 0$ such that :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathcal{A},\ \ ||u_0u_1 \ldots u_{N-1}| - N\Lambda_a| < Af(N).$$

Let N be an integer and ω a factor of length N in U. Let k_ω be the first occurrence of ω in U, we have

$$u_0u_1 \ldots u_{k_\omega-1} \ldots u_{N+k_\omega-1} = u_0u_1 \ldots u_{k_\omega-1}\omega.$$

The fact that U is LR with constant K implies $N + k_\omega - 1 < KN$. We thus have that for $a \in \mathcal{A}$

$$||u_0u_1 \ldots u_{N+k_\omega-1}|_a - (N + k_\omega)\Lambda_a| < Af(KN),$$

which implies

$$|(|u_0u_1 \ldots u_{k_\omega-1}|_a - k_\omega\Lambda_a) + (|\omega|_a - N\Lambda_a)| < Af(KN),$$

and thus

$$||\omega|_a - N\Lambda_a| < 2Af(KN),$$

since

$$||u_0u_1 \ldots u_{k_N-1}|_a - k_N\Lambda_a| < Af(KN),$$

because f is increasing. Finally, we obtain that for any pair (ω_1, ω_2) of factors of length N :

$$||\omega_1|_a - |\omega_2|_a| < 4Af(KN),$$

which implies that $B_U(N) = Of(N)$ since f is sublinear. The same reasoning applies in the case where $\Delta_N(\Lambda, U) = o(f(N))$. $\square$

4.2 Main results

In view of the study led in Section 4.1, we can translate Theorem 3.1.3 in terms of balance function. Having fixed the notation in Section 3.1, then we obtain the following theorem.

Theorem 4.2.1. *Let U be a fixed point of a primitive substitution σ. Then, we have :*

(i)	*if $\lvert\theta_2\rvert < 1$, then*	$B_U(N)$ *is bounded ,*
(ii)	*if $\lvert\theta_2\rvert > 1$, then*	$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2} N^{(\log_\theta \lvert\theta_2\rvert)}\right)$,
(iii)	*if $\lvert\theta_2\rvert = 1$ and θ_2 is not a root of unity, then*	$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_2+1)}\right)$,
(iv)	*if $\lvert\theta_2\rvert = 1$ and θ_2 is a root of unity, then either $A_{\sigma,U} \neq 0$ and*	$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_2+1)}\right)$,
	or $A_{\sigma,U} = 0$ and	$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2}\right)$,

where the complex number $A_{\sigma,U}$ (which just depends on the pair (σ, U)) is defined in Appendix B and could explicitly be computed.

Proof. We have first to remark that a fixed point of a primitive substitution is linearly recurrent. This point is proved in [103]. Then, the result follows from Theorem 3.1.3 and Proposition 4.1.2 and 4.1.4. $\square$

Remark 4.2.2. *This theorem implies in particular that for any fixed point of a primitive substitution U, $B_U(N) = o(N)$. We also refer the reader to (3.1) for a better understanding of the notation.*

We thus obtain the following caracterization of the C-balanced fixed points of primitive substitutions.

Corollary 4.2.3. *A fixed point U of a primitive substitution σ has a bounded balance function if and only if one of the following holds :*

(i) $|\theta_2| < 1$,

(ii) $|\theta_2| = 1$, $\alpha_2 = 0$, θ_2 *is a root of unity and* $A_{\sigma,U} = 0$.

We bring now some direct applications of Theorem 4.2.1 and we focus on the case *(iv)*.

The first interesting (or surprising) point is that the three first cases of Theorem 4.2.1 just depend on θ_2 and thus on the incidence matrix associated with the substitution. In particular, we obtain that in these cases, the asymptotic behaviour of the balance function is not modified by any permutation of the letters in the definition of the substitution. As an example, the balance functions of the two fixed points of the substitutions

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_1 & \\ 1 & \longmapsto & 12131234 \\ 2 & \longmapsto & 12131334 \\ 3 & \longmapsto & 12242434 \\ 4 & \longmapsto & 13342434 \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} & \sigma_2 & \\ 1 & \longmapsto & 11122334 \\ 2 & \longmapsto & 11123334 \\ 3 & \longmapsto & 12223444 \\ 4 & \longmapsto & 12333444 \end{array}$$

have the same asymptotic behaviour. A natural question is then to ask if this property holds for any fixed points of primitive substitutions. The answer is no. In fact, let us consider, as was suggested to me by J. Cassaigne, the two following substitutions defined over the alphabet $\{1,2\}$ by :

$$\begin{array}{ccc} & \xi_1 & \\ 1 & \longmapsto & 112 \\ 2 & \longmapsto & 212 \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} & \xi_2 & \\ 1 & \longmapsto & 121 \\ 2 & \longmapsto & 212 \end{array} ,$$

and let U_1 and U_2 denote respectively the fixed points beginning with the letter 1 of the substitutions ξ_1 and ξ_2. It is clear that $B_{U_2}(N)$ is bounded since U_2 is a periodic sequence. On the other hand, one can show (using that $A_{\xi_1,U_1} \neq 0$) that $B_{U_1}(N) = \Omega(\log(N))$. Even so, these two substitutions share the same incidence matrix. This example is relatively simple, but not totally convincing. One can think that if we restrict our study to non-ultimately periodic sequences, such a situation does not hold any more. However, we provide in Section 4.4 (Example 4.4) two non-ultimately periodic fixed points of substitutions sharing the same incidence matrix, corresponding respectively to both situations which can occur in case *(iv)* of Theorem 4.2.1 (see Section 4.4). We thus obtain that the "strange" class of substitution considered in the case *(ii)* of Corollary 4.2.3 is really not empty. In particular, this puts an end to the hope of characterizing the non-ultimately periodic fixed points of primitive substitutions with bounded balance function just in terms of their incidence matrices.

We are now going to use Corollary 4.2.3 in order to understand what type of spectrum could have the incidence matrix associated with a primitive substitution which generates an eventually periodic sequence. This is in part motivated by a first result due to C. Holton and L. Q. Zamboni.

Proposition 4.2.1 (Holton-Zamboni [130]). *If a fixed point of a primitive substitution τ is eventually periodic, then the incidence matrix associated with τ could not have non-zero eigenvalues of modulus less than one.*

Then, we can deduce the following.

Corollary 4.2.4. *Let τ be a primitive substitution which generates an eventually periodic fixed point over the alphabet $\mathcal{A}$. Then, the following holds :*
(i) M_τ has a simple positive integer eigenvalue (its Perron eigenvalue),
(ii) the other non-zero eigenvalues of M_τ are all roots of unity (whose algebraic degree is less than the cardinality of the set $\mathcal{A}$ minus one),
(iii) the non-zero eigenvalues of M_τ are all simple.

Proof. It follows from Proposition 4.2.1 that the non-zero eigenvalues of M_τ have modulus greater than or equal to one.
If M_τ has an eigenvalue of modulus greater than one which is not its Perron eigenvalue, this would imply that $|\theta_2| > 1$, and then by Corollary 4.2.3 the balance function of the eventually periodic sequence would not be bounded, hence a contradiction.
If M_τ has an eigenvalue of modulus equal to one, Corollary 4.2.3 implies that this eigenvalue is necessarily simple and a root of unity.
The minimal polynomial of θ, the Perron eigenvalue of M_τ, should divide the characteristic polynomial of M_τ. Then the algebraic conjugates of θ lie necessarily among the eigenvalues of M_τ. But, 0 could obviously neither be an algebraic conjugate of θ nor a root of unity, since θ is greater than one. We obtain finally that θ could not have any algebraic conjugate and should thus be integer.
Now, let β denote an eigenvalue of M_τ which is a root of unity and P its minimal polynomial. The degree of P is necessarily less than the cardinality of the set $\mathcal{A}$ minus one because $(X-\theta)P$ should divide the characteristic polynomial of M_τ, concluding the proof. $\square$

Corollary 4.2.4 claims that the incidence matrices associated with primitive substitutions which generate eventually periodic sequences should have very specific types of spectrum composed among roots of unity and zero eigenvalues (if we forget their Perron eigenvalue). It is thus natural to ask if this result is optimal, that is to say, if roots of unity or/and zero could really be eigenvalues of such matrices. The substitution defined over $\{1,2\}$ by

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ 1 & \longmapsto & 121 \\ 2 & \longmapsto & 212 \end{array}$$

has spectrum $S_{M_\phi} = \{3,1\}$, whereas the substitution defined over $\{1,2\}$ by

$$\begin{array}{ccc} & \psi & \\ 1 & \longmapsto & 121 \\ 2 & \longmapsto & 121 \end{array}$$

has spectrum $S_{M_\psi} = \{3,0\}$, and the substituion defined over $\{1,2,3\}$ by

$$\begin{array}{ccc} & \tau & \\ 1 & \longmapsto & 12 \\ 2 & \longmapsto & 312 \\ 3 & \longmapsto & 3123 \end{array}$$

has spectrum $S_{M_\tau} = \{3,1,0\}$; moreover these three substitutions generate periodic fixed points, which provides a positive answer to our question. Another consequence of Corollary 4.2.4 is that for a primitive substitution σ which generates an eventually periodic fixed point over a two or a three-letter alphabet, $S_{M_\sigma} \subset \mathbb{Z}$.

4.3 Application to generalized balances

In this section, we apply our results to generalized balance properties for fixed points of primitive substitutions. The balance function measures the difference between the number of occurrences of each letter in any pair of factors of the same length. We want now to introduce a similar notion but with words playing the role of letters. This generalization is inspired by I. Fagnot and L. Vuillon [107] who study generalized balances in Sturmian words.

Let U be a symbolic sequence defined over the alphabet $\mathcal{A}$. Then, we can define, for any positive integer n, a generalized balance function of order n for U, in the following way :

$$B_U^{(n)}(N) = \max_{u \in \mathcal{L}_n(U)} \max_{w,w' \in \mathcal{L}_N(U)} \left\{ \left| |w|_u - |w'|_u \right| \right\}, \tag{4.5}$$

where $|w|_u$ denotes the number of occurrences of the word u in the word w. We obtain in particular $B_U^{(1)}(N) = B_U(N)$. In view of the previous study, it is a natural question to ask if we can estimate the growth order of these generalized balance functions for fixed points of primitive substitutions. In particular, is it possible to obtain such an information in terms of the incidence matrix associated with the substitution.

In order to answer this question, we recall now a useful construction which can be found in [195]. Let σ be a primitive substitution defined over the alphabet $\mathcal{A}$ and U an associated fixed point. For any positive integer l, $\mathcal{A}_l$ denotes the alphabet $\{1, 2, \ldots, P_U(l)\}$, where P_U is the complexity function of U. We can thus consider a map Θ_l from $\mathcal{L}_l(U)$ to $\mathcal{A}_l$ which associates with each factor of length l its order of occurrence in U. If i denotes a letter of the alphabet $\mathcal{A}_l$, we can conversely associate with i a unique word $\Theta_l^{-1}(i) = w_0 w_1 \ldots w_{l-1} \in \mathcal{L}_l(U)$ since Θ_l is one-to-one. If

$$\sigma(\Theta^{-1}(i)) = \sigma(w_0 w_1 \ldots w_{l-1}) = y_0 y_1 \cdots y_{|\sigma(w_0)|-1} y_{|\sigma(w_0)|} \cdots y_{|\sigma(\Theta^{-1}(i)|-1},$$

then, we define the substitution of order l for σ by :

$$\sigma_l(i) = \Theta\left((y_0 y_1 \ldots y_{l-1})(y_1 y_2 \ldots y_l) \ldots (y_{|\sigma(w_0)|-1} \cdots y_{|\sigma(w_0)|+l-2})\right). \tag{4.6}$$

So defined, $|\sigma_l(i)| = |\sigma(w_0)|$.

Example 4.3.1. *Let U be the Fibonacci sequence, defined as the fixed point of the substitution*

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 12 \\ 2 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

It is well-known that U is a Sturmian sequence and thus admits three factors of length two, more pecisely,

$$\mathcal{L}_2(U) = \{(12), (21), (11)\}.$$

Then, we obtain

$$\Theta^{-1}(1) = (12),\ \Theta^{-1}(2) = (21),\ \textit{and}\ \Theta^{-1}(3) = (11),$$

and since $\sigma(12) = 121$, $\sigma(21) = 112$ and $\sigma(11) = 1212$, it follows that the substitution of order two for σ is defined by

$$\sigma_2(1) = 12,\ \sigma_2(2) = 3,\ \textit{and}\ \sigma_2(3) = 12.$$

We recall now some results about the previous construction.

Proposition 4.3.1 (Queffélec [195]). *For every positive integer l, the substitution of order l for a subtitution σ admits the sequence $U_l = \sigma_l^\infty(1)$ as fixed point. Moreover, if $U = u_0 u_1 \dots u_n \dots$ means the fixed point of σ, then the sequence $\Theta_l^{-1}(U_l)$ is composed by all the factors of length l of U without repetition and in the same order as in U, that is to say,*

$$\Theta_l^{-1}(U_l) = (u_0 u_1 \dots u_{l-1})(u_1 u_2 \dots u_l) \dots (u_n u_{n+1} \dots u_{n+l-1}) \dots .$$

We can already notice that if $U_l = u_0^{(l)} u_1^{(l)} \dots u_n^{(l)} \dots$, then

$$|u_0^{(l)} u_1^{(l)} \dots u_n^{(l)}|_i = |u_0 u_1 \dots u_n|_{\Theta^{-1}(i)}, \tag{4.7}$$

where $|\omega|_{\Theta^{-1}(i)}$ means the number of occurrences of the word $\Theta^{-1}(i)$ in ω. This implies in particular the following corollary.

Corollary 4.3.2. *The order of magnitude of the generalized balance function of order l for U is the same as that of the balance function of U_l.*

Proposition 4.3.2 (Queffélec [195]). *If σ is a primitive substitution then for every positive integer l, the substitution σ_l is primitive too and its incidence matrix M_l has the same Perron eigenvalue as the one of σ.*

The eigenvalues of M_l, $l \geq 2$, are those of M_2 with perhaps in addition the eigenvalue 0. Moreover, if P_2 is the minimal polynomial of M_2, then there exists an integer m such that $P_l = P_2 X^m$, where P_l means the minimal polynomial of M_l.

Following Equation (3.1), we can note

$$S_{M_{\sigma_l}} = \{\theta_{l,i},\ 2 \leq 2 \leq d_l\} \cup \{\theta_{l,1} = \theta_l\}$$

the spectrum of the incidence matrix associated with σ_l. Proposition 4.3.2 implies that $\theta_l = \theta$, $\theta_{l,2} = \theta_{2,2}$ and $\alpha_{l,2} = \alpha_{2,2}$, where $\alpha_{l,2}$ means the multiplicity of $\theta_{l,2}$ in the minimal polynomial of M_l. In view of Corollary 4.3.2 and Proposition 4.3.2, we can state the following result.

Theorem 4.3.3. *Let U be a fixed point of a primitive substitution σ. Then, we have for every integer $l \geq 2$:*

(i)	*if $|\theta_{2,2}| < 1$, then*	$B_U^{(l)}(N)$ *is bounded* ,
(ii)	*if $|\theta_{2,2}| > 1$, then*	$B_U^{(l)}(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}} N^{(\log_\theta |\theta_{2,2}|)}\right)$,
(iii)	*if $|\theta_{2,2}| = 1$ and $\theta_{2,2}$ is not a root of unity, then*	$B_U^{(l)}(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,
(iv)	*if $|\theta_{2,2}| = 1$ and $\theta_{2,2}$ is a root of unity, then*	$B_U(N) = O\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,
	and	$B_U(N) = \Omega\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$.

Moreover, in the case where $\theta_{2,2}$ is necessarily a root of unity, then :

– *either* $\forall\, l \geq 2$, $B_U^{(l)}(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$,

– *or there exists an integer* $m \geq 2$ *such that,*

for $l < m$, $B_U^{(l)}(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$,

and for $l \geq m$, $B_U^{(l)}(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}+1}\right)$.

Before proving Theorem 4.3.3, we need to establish the following lemma.

Lemma 4.3.4. *Let* l *be a positive integer,* U *an infinite sequence defined over the alphabet* $\mathcal{A}$ *and suppose that there exists a function* f *such that* $B_U^{(l)}(N) = \Omega(f(N))$*. Then, we have* $B_U^{(l+1)}(N) = \Omega(f(N))$.

Proof. Let P_l be the projection map defined from $\mathcal{L}_{l+1}(U)$ to $\mathcal{L}_l(U)$ by :

$$P_l((w_0 w_1 \dots w_{l+1})) = (w_0 w_1 \dots w_l).$$

Then, we obtain that

$$\Theta_l \circ P_l \circ \Theta_{l+1}^{-1}(U_{l+1}) = U_l.$$

The sequence U_l is thus the image by a morphism letter-to-letter of the sequence U_{l+1}, which implies that

$$B_{U_{l+1}}(N) = \Omega\left(f(N)\right), \text{ as soon as } B_{U_l}(N) = \Omega\left(f(N)\right).$$

Finally, we obtain by Corollary 4.3.2 that

$$B_U^{(l+1)}(N) = \Omega\left(f(N)\right), \text{ as soon as } B_U^{(l)}(N) = \Omega\left(f(N)\right),$$

concluding the proof. □

Lemma 4.3.4 points out the fact that the order of magnitude of the generalized balance functions $B_U^{(l)}(N)$ associated with a symbolic sequence U could not decrease with respect to l.

Proof of Theorem 4.3.3. Equalities (i), (ii), (iii) and (iv) come directly from Corollary 4.3.2, Proposition 4.3.2 and Theorem 4.2.1. Then, the last point of Theorem 4.3.3 is a consequence of Lemma 4.3.4. □

If we come back to Example 4.3.1, we obtain that the incidence matrix associated with the Fibonacci substitution of order 2 admits three simple eigenvalues :

$$\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 0\right\}.$$

Theorem 4.3.3 implies thus that the Fibonacci sequence admits bounded balance functions of all orders. A more precise result is shown in [107] for Sturmian sequences. If U means a Sturmian sequence, then

$$B_U^{(n)}(N) \text{ is bounded by } n;$$

moreover, if the slope of U has bounded partial quotients in its continued fraction expansion, then

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(B_U^{(n)}(N)\right) \text{ is finite,}$$

and an explicit bound is given.

Example 4.3.5. *Let U be the Morse sequence, defined as the fixed point beginning by 1 of the substitution*

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 12 \\ 2 & \longmapsto & 21 \end{array}$$

The incidence matrix associated with the Morse substitution admits 2 and 0 as eigenvalues. It is well-known that U has four factors of length two, more pecisely,

$$\mathcal{L}_2(U) = \{(12), (22), (21), (11)\}.$$

We thus obtain

$$\Theta^{-1}(1) = (12),\ \Theta^{-1}(2) = (22),\ \Theta^{-1}(3) = (21) \text{ and } \Theta^{-1}(4) = (11),$$

and since $\sigma(12) = 1221$, $\sigma(22) = 2121$, $\sigma(21) = 2112$ and $\sigma(11) = 1212$, it follows that the substitution of order two for σ is defined by

$$\sigma_2(1) = 14,\ \sigma_2(2) = 31,\ \sigma_2(3) = 34 \text{ and } \sigma_2(4) = 31.$$

The incidence matrix associated with the Morse substitution of order two admits four simple eigenvalues :

$$\{2, 1, -1, 0\}.$$

Contrary to the Fibonacci case, new non-zero eigenvalues appear. One can thus think that the Morse sequence is more "well-balanced" with respect to its letters than to its factors of length two. Actually, we can show that $A_{\sigma_2, U_2} = 0$ and thus that the Morse balance function of order two is bounded too. However, and because we are in the critical case (case (iv) of Theorem 4.3.3), we can not say if the Morse balance functions of any order are bounded or not.

In this section, we have seen that all the incidence matrices associated with the substitutions of order at least two share the same spectrum (except for the zero eigenvalue). Moreover, we have exhibited an example (the Morse sequence) for which the spectrum of the substitution of order two is really distinct from the one of the initial substitution. However, we do not know any such an example for which this change of spectrum is really significant for the balance properties of the studied sequence.

4.4 A zoo of examples

In this section, we apply our results to some classical substitutions. We give examples of substitutions whose balance functions have the different types of growth order discussed in Theorem 4.2.1. This list does not claim of course to be exhaustive.

Pisot type substitutions We call Pisot type substitution a substitution for which $|\theta_2| < 1$ (some authors require that a Pisot type substitution has no zero eigenvalue). This class of substitutions corresponds to case (i) in Theorem 4.2.1 and contains in particular the Morse substitution (see Example 4.3.5), the Fibonacci substitution (see Example 4.3.1) and more generally Sturmian substitutions (see [69]), the Tribonacci substitution (see [202]) and more generally Arnoux-Rauzy substitutions (see [23]). Fixed points generated by all these substitutions have thus, in view of Theorem 4.2.1, a bounded balance function. However, optimal bounds are already well-known for the Morse sequence (which is 2-balanced) and Sturmian sequences (which are balanced).

Badely balanced substitutions We call badely balanced substitution, a substitution satisfying $|\theta_2| > 1$, which corresponds to case (ii) in Theorem 4.2.1.

The Rudin-Shapiro sequence

The Rudin-Shapiro substitution is defined over the alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$ by :

$$\begin{array}{l} 1 \longmapsto 12 \\ 2 \longmapsto 13 \\ 3 \longmapsto 42 \\ 4 \longmapsto 43 \end{array}$$

Let us denote by U the fixed point of this substitution generated by 1. The Rudin-Shapiro sequence, which is the image of the sequence U by a letter-to-letter projection, was introduced independently in [212] and [220] for estimating problems in harmonic analysis. The incidence matrix associated with the Rudin- Shapiro substitution has four simple real eigenvalues :

$$\{2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}.$$

We thus obtain $\theta = 2$, $|\theta_2| = \sqrt{2}$ and $\alpha_2 = 0$. Then, we have in view of Theorem 4.2.1 :

$$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left(\sqrt{N}\right).$$

A substitution related to the sum of the dyadic digits

Let us consider the substitution σ defined over the alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ by :

$$\begin{array}{l} 1 \longmapsto 12 \\ 2 \longmapsto 13 \\ 3 \longmapsto 26 \\ 4 \longmapsto 45 \\ 5 \longmapsto 46 \\ 6 \longmapsto 53 \end{array}$$

Let us denote by U the fixed point of this substitution generated by 1. This sequence is related to the sum $\sum_{n<N}(-1)^{s(3n)}$, where $s(n)$ denotes the sum of the dyadic digits of n (see [66, 81]). The incidence matrix associated with σ admits six simple eigenvalues :

$$\{2, \pm\sqrt{3}, \pm 1, 0\}.$$

We thus obtain $\theta = 2$, $|\theta_2| = \sqrt{3}$ and $\alpha_2 = 0$. Then, Theorem 4.2.1 implies :

$$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left(N^{(\log_4 3)}\right).$$

We can notice that in this case the order of magnitude of the balance function is an irrational power of N contrary to the case of the Rudin-Shapiro substitution.

Extremly badely balanced substitutions

For any positive integer n, let us consider the substitution σ_n defined over the alphabet $\{1,2\}$ by :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1^n 2 \\ 2 &\longmapsto 12^n \end{aligned}$$

and let us denote by U_n its fixed point. The incidence matrix associated with σ_n has two simple eigenvalues :

$$\{(n+1),\,(n-1)\}\,.$$

It follows that for $n \geq 3$, $\theta_{2,n} > 1$ and

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\theta_n}(\theta_{2,n}) = 1,$$

which thus implies that

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ such that, } B_{U_n}(N) = \Omega(N^{1-\varepsilon}).$$

We thus provide examples of fixed points of primitive substitutions whose balance functions take highest growth orders as possible in view of Remark 4.2.2.

Not so badely balanced substitutions

For any pair of positive integers (n,k), let us consider the substitution $\sigma_{(n,k)}$ defined over the alphabet $\{1,2\}$ by :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1^{(n^k)} 2^{(n^k-n)} \\ 2 &\longmapsto 1^{(n^k-n)} 2^{(n^k)} \end{aligned}$$

and let us denote by $U_{(n,k)}$ its fixed point. The incidence matrix associated with $\sigma_{(n,k)}$ has two simple eigenvalues :

$$\left\{(2n^k-n),\,n\right\}.$$

It thus follows

$$\log_{\theta_{(n,k)}}(\theta_{2,(n,k)}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{k},$$

which implies that

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \text{ such that, } B_{U_{(n,k)}}(N) = O(N^{\varepsilon}).$$

We thus provide examples of fixed points of badely balanced substitutions whose balance functions take smallest growth orders as possible in view of Theorem 4.2.1.

A Salem type substitution We call Salem type substitution, a substitution for which θ, the Perron eigenvalue, is a Salem number. We recall that a Salem number is a real algebraic number greater than one whose all conjugates have a modulus smaller than or equal to one, one at least having a modulus equal to one.

Let us consider the substituion σ defined over the alphabet $\{1,2,3,4\}$ by :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 12 \\ 2 &\longmapsto 14 \\ 3 &\longmapsto 2 \\ 4 &\longmapsto 3 \end{aligned}$$

Let us denote by U the fixed point of this substitution generated by 1. The sequence U was introduced in [130]. The characteristic polynomial of M_σ is

$$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right)x + 1\right).$$

The roots of the first quadratic factor are

$$\beta = \frac{1-\sqrt{13}+\sqrt{2+2\sqrt{13}}\,i}{4} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1-\sqrt{13}-\sqrt{2+2\sqrt{13}}\,i}{4},$$

which have modulus one but are not roots of unity. In this example, θ is a Salem number. We thus obtain $|\theta_2| = 1$ and θ_2 is not a root of unity. Moreover, $\alpha_2 = 0$ because β and γ are simple eigenvalues. Then, case (iii) of Theorem 4.2.1 implies :

$$B_U(N) = (O \cap \Omega)(\log N).$$

Critical cases We give here examples of substitutions corresponding to the case (iv) in Theorem 4.2.1.

The Chacon sequence

The primitive Chacon substitution σ is defined over the alphabet $\{1,2,3\}$ by :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1123 \\ 2 &\longmapsto 23 \\ 3 &\longmapsto 123 \end{aligned}$$

Let us denote by U the fixed point of this substitution generated by 1. The Chacon sequence (which is not exactly U but the image of U by a morphism) was introduced in [64]. The incidence matrix associated with the primitive Chacon substitution has three integer simple eigenvalues :

$$\{3,1,0\}.$$

We thus obtain $\theta_2 = 1$ and $\alpha_2 = 0$. In particular, θ_2 is a root of unity and we have thus to consider the constant $A_{\sigma,U}$. Using the algorithm described in Appendice B, we can show that $A_{\sigma,U}$ is not equal to zero, which implies

$$B_U = (O \cap \Omega)(\log(N)).$$

Substitutive Rote sequence

Let us consider the quadratic number $\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. We defined the sequence $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{if } \{n\alpha\} \in [0, \frac{1}{2}[, \\ 2 & \text{else.} \end{cases}$$

This sequence is called coding of rotation of parameters $(\alpha, \frac{1}{2})$ (see for instance [5, 12, 86]) and is included in the class of sequences of complexity $2n$ considered in [209]. It is shown in [203] that

$$U = \phi(X_\sigma),$$

where ϕ is the morphism defined by

$$\begin{array}{rcl}\{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2\} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 122 \\ 3 & \longmapsto & 12\end{array}$$

and X_σ is the fixed point of the substitution σ defined by

$$\begin{array}{rcl}\{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 13223 \\ 3 & \longmapsto & 1323\end{array}$$

The incidence matrix associated with σ admits three simple eigenvalues :

$$\theta = 2+\sqrt{3},\ 1 \text{ and } \frac{1}{\theta} = 2-\sqrt{3}.$$

We thus obtain $\theta_2 = 1$ and $\alpha_2 = 0$. In particular, θ_2 is a root of unity and we have thus to consider the constant $A_{\sigma,U}$. Using the algorithm described in Appendix B, we can show again that $A_{\sigma,U}$ is not equal to zero, which gives

$$B_{X_\sigma}(N) = (O \cap \Omega)(\log(N)).$$

This implies that

$$B_U(N) = O(\log(N)),$$

but not necessarily

$$B_U(N) = \Omega(\log(N)).$$

However, we show in [2] that

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \Omega(\log(N)),$$

where Λ means the uniform probability vector on $\{1,2\}$. Proposition 4.1.1 implies finally

$$B_U(N) = \Omega(\log(N)).$$

More generally, it is shown in [5] that if U means the coding of rotation of parameters (α, β), where α is a quadratic number and β lies in the quadratic extension of α, then

$$B_U(N) = (O \cap \Omega)(\log(N)).$$

The method used here shows that Theorem 4.2.1 could sometimes be extended to the study of substitutive sequences (which are not necessarily fixed points of substitutions).

An example with multiplicity

Let us consider the substitution σ defined over the alphabet $\{1,2,3,4,5\}$ by :

$$\begin{array}{l}1 \longmapsto 1112455 \\ 2 \longmapsto 111255 \\ 3 \longmapsto 1123455 \\ 4 \longmapsto 23445 \\ 5 \longmapsto 123455\end{array}$$

and let us denote by U the fixed point of this substitution. The incidence matrix associated with σ admits the following characteristic polynomial

$$(x-1)^2(x^3-7x^2+5x-1).$$

The Perron eigenvalue of σ is a Pisot number whose minimal polynomial is the factor of degree three in the previous expression. We thus obtain $\Theta_2 = 1$. Moreover, the minimal polynomial of M_σ is equal to its characteristic one and then $\alpha_2 = 1$. The constant $A_{\sigma,U}$ being not equal to zero, it follows from case (iv) of Theorem 4.2.1 that

$$B_U(N) = (O \cap \Omega)\left(\log^2(N)\right).$$

Two degenerated examples

We call degenerated substitution, a substitution which is not a Pisot type substitution but which as well generates a fixed point whose balance function is bounded.

As we have already noticed in Section 4.2, the periodic fixed point U of the substitution σ

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 121 \\ 2 &\longmapsto 212 \end{aligned}$$

has a bounded balance function. The incidence matrix associated with σ admits yet 3 and 1 as eigenvalues. It thus follows that $\theta_2 = 1$, $\alpha_2 = 0$ and $A_{\sigma,U} = 0$.

In Section 4.3, we introduce σ_2, the Morse substitution of order two, defined by

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 14 \\ 2 &\longmapsto 31 \\ 3 &\longmapsto 34 \\ 4 &\longmapsto 31 \end{aligned}$$

and U its fixed point beginning with 1. This substitution is degenerated, we have $\theta_2 = \pm 1$, $\alpha_2 = 0$ and $A_{\sigma,U} = 0$. It thus follows that U is a C-balanced sequence. Then, it is noticeable to see that if we consider the substitution σ' defined by

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 12 \\ 2 &\longmapsto 13 \\ 3 &\longmapsto 34 \\ 4 &\longmapsto 13 \end{aligned}$$

and U' its fixed point beginning with 1, then the sequence U' satisfies

$$B_{U'}(N) = (O \cap \Omega)(\log N),$$

although both substitutions σ_2 and σ_2' share the same incidence matrix.

Appendix A

Let us consider a primitive substitution σ defined over the finite alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, d\}$, and let us suppose that U is a fixed point for σ, generated by the letter 1. Moreover, we assume that σ is a Pisot type substitution, that is to say, $|\theta_2| < 1$. Then, Theorem 4.2.1 states that $B_U(N)$

is bounded or equivalentely that U is C-balanced for some contant C. The object of this appendix is to exhibit such a constant C, that is to say, to give an explicit upper bound for $B_U(N)$. We will use freely in the following the different definitions and notation introduced in Section 3.1.

If $f = (f(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d$ and $N \in \mathbb{N}^*$, then we define :

$$S_U^f(N) = \sum_{i=1}^{d} |u_0 u_1 \dots u_{N-1}|_i f(i).$$

Just as, if $\omega \in \mathcal{A}^*$, we define :

$$S^f(\omega) = \sum_{i=1}^{d} |\omega|_i f(i).$$

For $1 \le i \le d-1$, we introduce the vectors f_i, defined by

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i, \\ \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i - 1} & \text{else,} \end{cases}$$

where $\Lambda = (\Lambda_i)_{i\in\mathcal{A}}$ is the normalized eigenvector associated with θ, the Perron eigenvalue of M_σ. We can notice that f_i is well-defined because $0 < \Lambda_i < 1$ (it comes from the Perron-Frobenius theorem). Then, it is relatively easy to see that

$$\Delta_N(\Lambda, U) = \max_{i=1,2,\dots,d-1} (1-\Lambda_i)|S_U^{f_i}(N)|,$$

and thus in view of Remark 4.1.1,

$$B_U(N) \le \left\lfloor 4 \max_{i=1,2,\dots,d-1} (1-\Lambda_i)|S_U^{f_i}(N)| \right\rfloor, \tag{4.8}$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of the real x.

Now, for any word $m \in \mathcal{A}^*$, let us introduce the vector $L(m) = (|m|_i)_{i\in\mathcal{A}}$. Then, we have

$$L(\sigma(m)) = M_\sigma(L(m)), \tag{4.9}$$

where M_σ denotes the incidence matrix of σ. In this way, if i and j are fixed in $\mathcal{A}$, the sequence $(|\sigma^n(j)|_i)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies a linear recurrence whose coefficients are those of the minimal polynomial of M_σ. Therefore, there exist complex numbers $\lambda_{i,j}^{k,l}$ and $\lambda_{i,j}$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, we have

$$|\sigma^n(j)|_i = \lambda_{i,j}\theta^n + \sum_{k=2}^{d'} \left(\sum_{l=0}^{\alpha_k} \lambda_{i,j}^{k,l} n^l \theta_k^n \right). \tag{4.10}$$

Let us notice that equations (4.9) and (4.10) imply that, for each letter j, the vector $(\lambda_{i,j})_{i\in\mathcal{A}}$ is an eigenvector of M_σ associated with the Perron eigenvalue θ. Thus, there exists a complex number ε_j such that $\lambda_{i,j} = \varepsilon_j \Lambda_j$. Then, for any vector $f = (f(i))_{i=1,2,\dots,d} \in \mathbb{C}^d$ lying in the orthogonal vector space of Λ, it follows :

$$\begin{aligned} S^f(\sigma^n(j)) &= \textstyle\sum_{i=1}^{d} |\sigma^n(j)|_i f(i) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_{i,j} f(i) \right)}_{0} \theta^n + \textstyle\sum_{k=2}^{d'} \left(\sum_{l=0}^{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_{i,j}^{k,l} f(i) \right) n^l \theta_k^n \right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

In order to make the following more friendly readable, let us introduce, for any word $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m$ defined over $\mathcal{A}$ and any such a vector f, the notation :

$$F_{f,k,l}(\omega) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_{i,\omega_j}^{k,l}f(i)\right). \tag{4.12}$$

Let us consider a positive integer N. Following Theorem 3.2.5, there exists a unique admissible path in the prefix automaton associated with the pair (σ, U), starting from 1 and labelled by the sequence $(E_0, E_1, \ldots, E_{n_N})$, $E_0 \neq \varepsilon$, such that :

$$U_N = \sigma^{n_N}(E_0)\sigma^{n_N-1}(E_1)\ldots E_{n_N}.$$

We thus obtain that for any vector $f \in \mathbb{C}^d$,

$$S_U^f(N) = \sum_{m=0}^{n_N} S_U^f(\sigma^k(E_{n_N-m})),$$

and in view of equalities (4.11) and (4.12),

$$S_U^f(N) = \sum_{m=0}^{N_n}\left(\sum_{k=2}^{d'}\sum_{l=0}^{\alpha_k}F_{f,k,l}(E_{N_n-m})m^l\theta_k^m\right).$$

We can thus consider the finite quantity

$$M_{\sigma,U} = \max_{1\leq i<d}\ \max_{2\leq k\leq d'}\ \max_{0\leq l\leq\alpha_k}\ \max_{E\in Pref_\sigma}(1-\Lambda_i)|F_{f_i,k,l}(E)|.$$

Then, it follows from (4.8) that

$$B_U(N) \leq \left\lfloor 4M_{\sigma,U}\sum_{k=2}^{d'}\sum_{l=0}^{\alpha_k}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}m^l|\theta_k|^m\right)\right\rfloor,$$

and thus

$$B_U(N) \leq \left\lfloor 4M_{\sigma,U}(d-1)\sum_{l=0}^{d-1}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}m^l|\theta_2|^m\right)\right\rfloor,$$

which implies that

$$B_U(N) \leq \left\lfloor 4M_{\sigma,U}(d-1)\sum_{l=0}^{d-1}\frac{l!}{(1-|\theta_2|)^{l+1}}\right\rfloor, \tag{4.13}$$

because for any real $0 \leq x < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^l x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty}(n+l)(n+l-1)\ldots(n+1)x^n = \frac{l!}{(1-x)^{l+1}}.$$

The last upper bound, given in (4.13), does not depend on N and provides thus a closed formula to find an explicit upper bound for the balance function associated with a fixed point of a Pisot type substitution. This upper bound is certainly not optimal, because we wanted to exhibit a general formula. However, for any given substitution of Pisot type, the method evoked above could be used to find a really more precise result.

4.5 Compléments et remarques sur l'article

Le théorème 4.3.3, tel que nous l'avons énoncé, a été obtenu à partir du théorème 3.1.3. En utilisant le théorème 3.1.7 du chapitre précédent, il est possible de donner une nouvelle version du théorème 4.3.3. Pour cela, introduisons une nouvelle mesure de l'équilibre d'une suite.

Définition 4.5.1. *Soit U un mot infini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. La fonction d'équilibre généralisée associée à U est définie par :*

$$\mathcal{B}_U(N) = \max_{u\in\mathcal{L}(U)} \max_{w,w'\in\mathcal{L}_N(U)} \left\{ \big| |w|_u - |w'|_u \big| \right\}.$$

Au vu des résultats des paragraphes 4.1 et 4.3, le théorème 3.1.7 se traduit en terme d'équilibre de la façon suivante.

Théorème 4.5.2. *Soient U un point fixe de la substitution σ, θ, $\theta_{2,2}$ et $\alpha_{2,2}$ définis comme en (3.2). On a :*

(*i*) *si* $|\theta_{2,2}| < 1$, *alors* $\mathcal{B}_U(N)$ *est bornée,*

(*ii*) *si* $|\theta_{2,2}| > 1$, *alors* $\mathcal{B}_U(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_{2,2}} N^{(\log_\theta |\theta_{2,2}|)}\right)$,

(*iii*) *si* $|\theta_{2,2}| = 1$ *et* $\theta_{2,2}$ *n'est pas une racine de l'unité, alors* $\mathcal{B}_U(N) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,

(*iv*) *si* $|\theta_{2,2}| = 1$ *et* $\theta_{2,2}$ *est une racine de l'unité, alors* $\mathcal{B}_U(N) = O\left((\log N)^{(\alpha_{2,2}+1)}\right)$,

et $\mathcal{B}_U(N) = \Omega\left((\log N)^{\alpha_{2,2}}\right)$.

Ce théorème décrit ainsi les propriétés d'équilibre uniforme des substitutions primitives.

Troisième partie

Répétitions, physique et transcendance

Chapitre 5

Récurrence linéaire des codages de rotations et opérateurs de Schrödinger discrets

Dans ce chapitre, nous reprenons l'étude des codages de rotations introduits au chapitre 1. Ces suites binaires servent de modèle dans l'étude d'opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels. Nous donnons une caractérisations des codages linéairement récurrents en fonction du développement en fraction continue défini au chapitre 1 ; puis nous en déduisons que le support de la mesure spectrale d'un opérateur de Schrödinger associé à une telle suite est de mesure de Lebesgue nulle. Ce chapitre a été écrit en collaboration avec David Damanik[1]. Il fait l'objet d'un article intitulé *Linearly recurrent circle map subshifts and an application to Schrödinger operators*, publié dans la revue *Annales Henri Poincaré*.

5.1 Introduction and results

5.1.1 Introduction

The concept of linear recurrence or linear repetitivity, LR in short, has been recently discussed and investigated by quite a number of researchers within various frameworks. For example, the articles [76, 103, 100] study the LR property from the point of view of combinatorics on words, whereas [75, 153, 231] discuss its implications within the theory of tilings.

In both cases one considers structures (e.g., an infinite word or a tiling of Euclidean space), or families of structures (e.g., a subshift or a family of tilings), and their local patterns (e.g., subwords or patches occurring in the given tiling) which are equivalence classes modulo translations. Fixing such a local pattern, one may look at the set of occurrences of the pattern in the structure and compare the distance between two "consecutive" occurrences with the size of the pattern. If the distance is bounded by a fixed linear function of the size, the structure is said to have the LR property. Although the concepts are the same in spirit, applied to words it is usually referred to as linear recurrence, whereas among tiling theorists this concept is usually called linear repetitivity. Since this article will be concerned with a class of words and subshifts, we will henceforth use the term linear recurrence.

The usefulness of the LR property has been independently realized by numerous people who

[1]Californya Institute of Technology.

had quite different applications in mind. LR has been shown to have consequences in mathematical disciplines as diverse as combinatorics [76, 100], ergodic theory [75, 153, 156], and spectral theory of Schrödinger operators [157].

Our present study is motivated by the paper [157]. Consider discrete one-dimensional Schrödinger operators

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n) \tag{5.1}$$

in $\ell^2(\mathbb{Z})$, where the potential $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ is given by

$$V(n) = \lambda\chi_{[0,\beta)}(n\alpha + \theta \mod 1). \tag{5.2}$$

Here, $\lambda \neq 0$ is the coupling constant, $\alpha \in (0,1)$ irrational is the rotation number, and $\beta \in (0,1)$ and $\theta \in [0,1)$ are arbitrary numbers. These potentials are called circle map potentials in the mathematical physics community (cf. [128, 129, 131]) and codings of rotations by people working in combinatorics on words or symbolic dynamics. The operator (5.1) with potential (5.2) has been studied in many papers; for example, [33, 34, 58, 71, 73, 74, 84, 128, 129, 131, 136, 137, 142, 144, 233, 234]. One expects the following picture to be true (cf. [70]) : The operator H has purely singular continuous spectrum which is supported on a Cantor set of Lebesgue measure zero. To establish this, one has to prove the following three properties of H :

(i) The spectrum $\sigma(H)$ of H has Lebesgue measure zero.
(ii) The absolutely continuous spectrum $\sigma_{\mathrm{ac}}(H)$ of H is empty.
(iii) The point spectrum $\sigma_{\mathrm{pp}}(H)$ of H is empty.

Actually, it is easy to see that (i) implies (ii). However, (ii) is known in great generality while (i) is not. Namely, it follows from Kotani [151] and Last and Simon [155] that for all parameter values allowed above (recall $\lambda \neq 0$ and α irrational), (ii) holds. Moreover, (iii) is known in many cases. For example, Delyon and Petritis showed that the point spectrum is empty for every λ and β, almost every α, and almost every θ [84]. Hof et al., on the other hand, prove (iii) for every λ, α, and β, and generic θ (i.e., for a dense G_δ set) [129]. Thus, properties (ii) and (iii) are well understood. This is not the case for property (i). Until very recently, there was only one approach to (i). This approach is based on trace maps and it allowed Bellissard et al. to prove the zero measure property in the case where $\alpha = \beta$, that is, in the Sturmian case [33] (see also Sütő [234] for the Fibonacci case). Their results were extended to the quasi-Sturmian case in [72]. In the non-(quasi-)Sturmian case, very little is known. The only result, due to Hörnquist and Johansson [131], concerns a small class which can be shown to be generated by substitutions so that the adaptation [49, 50] of [33] to potentials generated by substitutions applies. Essentially, the absence of a trace map is the reason that no other results are known for the non-Sturmian case. A new approach to zero-measure Cantor spectrum, which is not based on trace maps, was recently developed by Lenz [157]. It is therefore natural, and was in fact suggested in [157], to try to apply this new approach to the potentials in (5.2). This new approach shows that linear recurrence allows one to deduce (i). Thus, we are led to the following question : For which choices of parameter values is V in (5.2) linearly recurrent? It is the aim of this paper to answer this question. In fact, we shall characterize this set of parameter values. We note that the examples considered by Hörnquist and Johansson are linearly recurrent so that our result contains theirs.

For convenience, we will slightly change the setting from individual sequences to subshifts. However, at the end of Section 5 we shall clearly state for which parameter values we get property (i).

The organization of the chapter is as follows. In the remainder of this section we will recall some key notions and state our main result which provides a characterization of the circle map sequences/subshifts which are linearly recurrent. In Section 2 we will develop the general setup and in particular recall the connection between LR subshifts and primitive S-adic subshifts. The link between circle map sequences and interval exchange transformations, and particularly the results of [5] which will be crucial to our study, will be explained in Section 3. Section 4 contains the proof of our main result. The application of this theorem to Schrödinger operators is discussed in Section 5. Appendix A explains how to prove a finite index for some circle map sequences which are not LR. Finally, in Appendix B we discuss possible generalizations of the approach presented in this study.

5.1.2 Circle maps

Definition 5.1.1. *Let $(\alpha, \beta) \in (0,1)^2$. The* **circle map corresponding to the parameters (α, β)** *is the symbolic sequence $U = (u_n)_{n \geq 0}$ defined over the binary alphabet $\{a, b\}$ by :*

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{if } \{n\alpha\} \in [0, \beta[, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

We will restrict our attention to circle maps where α is irrational and $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. The case α rational is not interesting since the associated circle map is periodic (and hence, in this case, the correpsonding Schrödinger operator has purely absolutely continuous spectrum which is supported on a finite union of closed intervals). The case $\beta = \alpha$ gives a Sturmian sequence and, more generally, the case $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ corresponds to quasi-Sturmian sequences and will be not considered in this paper (see [60, 209]). (Zero-measure spectrum for Schrödinger operators with quasi-Sturmian potentials was shown in [72]).

Definition 5.1.2. *A circle map is called* **nondegenerate** *if its parameters satisfy :*
- *α is irrational,*
- *$\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.*

Such a circle map is called **admissible** *if in addition we have $\alpha < \beta$.*

We recall that we can associate to a circle map its $\mathcal{D}$-expansion, as it is explained in the first chapter.

5.1.3 Results

Our main result is Theorem 5.1.3 which gives a characterization of linearly recurrent nondegenerate circle map subshifts.

Theorem 5.1.3. *A nondegenerate circle map subshift is linearly recurrent if and only if its $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfies the following : there exists an integer M such that for every integer n,*

(i) $a_n \leq M$,
(ii) $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+t} \Rightarrow t \leq M$,
(iii) $a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+t} = 0 \Rightarrow t \leq M$.

In the following, we will call this condition the $(*)$-condition.

In particular, the class of LR nondegenerate circle map subshifts contains, but is not equal to, the circle map subshifts corresponding to parameters (α, β), where α and β lie in the same quadratic field. This follows directly from the fact proved in [103] that a primitive substitutive subshift is linearly recurrent and the study lead in section 1.7.

In terms of interval exchange transformations, Theorem 5.1.3 is a full geometric generalization of the following theorem.

Theorem 5.1.4 (Durand [102]). *A Sturmian subshift associated with an irrational number α is linearly recurrent if and only if the coefficients of the continued fraction expansion of α are bounded.*

5.2 Definitions and background

5.2.1 Return words

We present here the main definitions concerning the notion of return words introduced in [99]. Let U be a uniformly recurrent sequence over the alphabet $\mathcal{A}$ and let $u = u_1u_2\dots u_n$ be a nonempty prefix of U. A *return word* to u of U is a factor $u_{[i,j-1]}$ $(= u_iu_{i+1}\dots u_{j-1})$ of U such that i and j are two consecutive occurrences of u. The sequence U can be written in a unique way as a concatenation of return words to u. Let $\mathcal{R}_{U,u}$ be the set of return words to u in U. Then $U = \omega_0\omega_1\dots\omega_i\dots$, where $\omega_i \in \mathcal{R}_{U,u}$. The fact that U is uniformly recurrent implies that $\mathcal{R}_{U,u}$ is a finite set. We can therefore consider a bijective map $\Lambda_{U,u}$ from $\mathcal{R}_{U,u}$ to the finite set $\{1, 2, \dots, \mathrm{Card}(\mathcal{R}_{U,u})\} = \mathcal{A}_{U,u}$, where, for definiteness, the return words are ordered according to their first occurrence (i.e., $\Lambda_{U,u}^{-1}(1)$ is the first return word ω_0, $\Lambda_{U,u}^{-1}(2)$ is the first ω_i which is different from ω_0, and so on). The *derived sequence* of U on u is the sequence with values in the alphabet $\mathcal{A}_u$ given by

$$\mathcal{D}_u(U) = \Lambda_{U,u}(\omega_0)\Lambda_{U,u}(\omega_1)\dots\Lambda_{U,u}(\omega_i)\dots.$$

To such a sequence we can associate a morphism $\Theta_{U,u}$ from $\mathcal{A}_{U,u}$ to $\mathcal{A}^*$ defined by :

$$\Theta_{U,u}(i) = \omega_i.$$

We obtain $\Theta_{U,u}(\mathcal{D}_u(U)) = U$. The morphism $\Theta_{U,u}$ is called the return morphism to u of U. When $\mathcal{A}_{U,u} = \mathcal{A}$, we will call it *return substitution* to u of U. When it does not create confusion, we will suppress the "U" in the symbols $\mathcal{R}_{U,u}$, $\Theta_{U,u}$, and $\mathcal{A}_{U,u}$.

Proposition 5.2.1 (Durand [99]). *Let u be a nonempty prefix of U. Then the following holds.*

(i) *The set $\mathcal{R}_u$ is a code and the map Θ_u is one to one.*

(ii) *Let v be a nonempty prefix of $\mathcal{D}_u(U)$. Then there exists a nonempty prefix w of U such that $\mathcal{D}_v(\mathcal{D}_u(U)) = \mathcal{D}_w(U)$. Moreover, we have $\Theta_u \circ \Theta_v = \Theta_w$.*

A derived sequence of a derived sequence is hence a derived sequence.

Definition 5.2.1. *Let U be a symbolic sequence defined over the alphabet $\mathcal{A}$ starting with the symbol $1 \in A$. We introduce the following notation : $\mathcal{D}^{(0)}(U) = U$ and, for $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^{(n+1)}(U) = \mathcal{D}_1(\mathcal{D}^{(n)}(U))$; Θ_0 is the identity map and, for $n \in \mathbb{N}$, $\Theta_{n+1} = \Theta_n \circ \Theta_{\mathcal{D}^{(n)}(U),1}$.*

Remark 5.2.2. *According to Proposition 5.2.1, we obtain that $(\mathcal{D}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of derived sequences of U and $(\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of return morphisms of U.*

5.2.2 LR sequences

Definition 5.2.3. *Let $\mathcal{A}$ be an alphabet, K a positive integer, and U a sequence over $\mathcal{A}$. The sequence U is called K-linearly recurrent (K-LR) if it is uniformly recurrent and for all $\omega \in \mathcal{R}_u$, we have $|\omega| \leq K|u|$. A sequence is called linearly recurrent (LR) if it is K-LR for some K.*

Proposition 5.2.2 (DHS [103]). *Let U be an aperiodic K-LR sequence over an alphabet $\mathcal{A}$. Then :*

1. *For every n, each factor of U of length n has at least one occurrence in each factor of U of length $(K+1)n$.*
2. *U is $(K+1)$-power free.*
3. *For every nonempty prefix u of U and for all $\omega \in \mathcal{R}_u$, we have $\frac{1}{K}|u| < |\omega|$.*

5.2.3 Subshifts and LR subshifts

Let $\mathcal{A}$ be an alphabet. The topology of $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ is given by the product of the discrete topologies on $\mathcal{A}$. We denote by T the standard *shift transformation* which associates to each symbolic sequence $U = (u_k)_{k\geq 0}$ the sequence $T(U) = (u_k)_{k\geq 1}$. To a sequence U in $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ we associate the dynamical system $(\overline{\mathcal{O}(U)}, T)$, where $\overline{\mathcal{O}(U)}$ is the closure of the orbit of U under the shift. This dynamical system is called the *subshift* associated with U. A dynamical system is *minimal* if it has no nontrivial invariant closed set. For a subshift associated with a sequence U, minimality of the subshift is equivalent to uniform recurrence of U.

Definition 5.2.4. *A subshift is called primitive substitutive if it contains a primitive substitutive sequence (i.e., a sequence which is the morphic image of a fixed point of a primitive substitution). A minimal subshift associated with a sequence U is called linearly recurrent (LR) if and only if U is LR.*

5.2.4 S-adic sequences and S-adic subshifts

Let $\mathcal{A}$ be an alphabet, a a letter of $\mathcal{A}$, and S a finite set of substitutions from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{A}^*$. We will say that a sequence $U \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ is an *S-adic* sequence (generated by $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ and a) if there exists a sequence $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ such that $U = \lim_{n\to\infty} \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_n(aa\dots)$. Let U be such a sequence. If there exists an integer s_0 such that for all $b \in \mathcal{A}$ and all $c \in \mathcal{A}$, the letter b has an occurrence in $\sigma_{r+1}\sigma_{r+2}\dots\sigma_{r+s_0}(c)$, then U is called a *primitive S-adic* sequence (with constant s_0).

The subshift associated with an S-adic sequence (resp., a primitive S-adic sequence) is called an S-adic subshift (resp., a primitive S-adic subshift). These notions were introduced by S. Ferenczi in [112] and by F. Durand in [100].

It was claimed in [100] that a subshift is LR if and only if it is primitive S-adic. In [102], Durand provides a counterexample and exhibits a primitive S-adic subshift which is not LR. However, LR does imply primitive S-adic and with an additional condition we can obtain a partial converse given in Proposition 5.2.3 below.

Definition 5.2.5. *Let $\mathcal{A}$ be an alphabet and σ a substitution on $\mathcal{A}$. The substitution σ is called (b,c)-proper if for any letter i in $\mathcal{A}$, $\sigma(i)$ begins with b and ends with c.*

An S-adic sequence is called *proper* if there exist two letters b and c in $\mathcal{A}$ such that any substitution in S is a (b,c)-proper substitution. A subshift which contains a proper and primitive S-adic sequence is called a *proper primitive S-adic* subshift.

Proposition 5.2.3 (Durand [102]). *A subshift (X,T) is LR if and only if it is a proper primitive S-adic subshift.*

5.2.5 Interval exchange transformations

Interval exchange transformations are classical examples of dynamical systems.

Definition 5.2.6. *Let $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Let σ be a permutation of the set $\{1, 2, \ldots, s\}$ and let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ be a vector in $\mathbb{R}^s$ with strictly positive entries. Let*

$$I = [0, |\lambda|[, \quad \textit{where } |\lambda| = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \textit{ and for } 1 \leq i \leq s, \; I_i = \left[\sum_{j<i} \lambda_j, \sum_{j \leq i} \lambda_j \right[.$$

The interval exchange transformation associated with (λ, σ) is the map E from I into itself, defined as the piecewise isometry which arises from ordering the intervals I_i with respect to σ. More precisely, if $x \in I_i$,

$$E(x) = x + a_i, \textit{ where } a_i = \sum_{k<\sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma_k} - \sum_{k<i} \lambda_k.$$

We can introduce a natural coding of the orbit of a point under the action of an interval exchange transformation by assigning to each element of this orbit the number of the interval which contains it.

Remark 5.2.7. *Let us consider an interval exchange transformation E, and U the natural coding of the orbit of the point 0 under E. The natural coding of the orbit of the point 0 under the action of the induced map of E on its first interval is the derived sequence on the letter 1 of U. Moreover, the associated induced substitution corresponds to the return substitution to 1 of U. In the case of the Rauzy induction, one does not induce on the first interval but on an interval which is larger. However, the induction on the first interval can be decomposed into several steps of the Rauzy induction.*

We refer the reader to [201] for information on the useful notion of Rauzy induction for interval exchange transformations.

5.3 A geometric interpretation

In this section, we investigate the geometric link between Theorems 5.1.3 and 5.1.4.

The symmetric Rauzy induction for two-interval exchange transformations is introduced in [18]. From the study of this induction process, the authors of [18] obtain an S-adic expresion for Sturmian subshifts. Let τ_1 and τ_2 be substitutions on $\{0, 1\}$ defined as follows :

$$\begin{array}{lcl} \tau_1(0) = 01 & \text{and} & \tau_2(0) = 0 \\ \tau_1(1) = 1 & & \tau_2(1) = 10. \end{array}$$

Proposition 5.3.1. *Let $\alpha \in (0, 1)$ be an irrational number. The Sturmian subshift associated with α is generated by the sequence*

$$\lim_{n \to \infty} \tau_2^{i_1} \tau_1^{i_2} \tau_2^{i_3} \tau_1^{i_4} \ldots \tau_2^{i_{2n-1}} \tau_1^{i_{2n}}(0),$$

where $[0; i_1 + 1, i_2, i_3, i_4, \ldots]$ is the continued fraction expansion of α.

The decomposition of the two-interval exchange transformation associated to α under the symmetric Rauzy induction is symbolized in Figure 5.1. The fact that α is irrational implies that this two-interval exchange transformation satisfies the well-known I.D.O.C. condition introduced in [145]. It also implies that an orbit under the symmetric Rauzy induction does not ultimately remain in one of the primitivity subgraphs G_1 or G_2 represented in Figure 5.2.

Moreover, an I.D.O.C. two-interval exchange is LR if and only if its orbit under the symmetric Rauzy induction can stay in any of the primitivity subgraphs G_1 and G_2 only for a bounded number

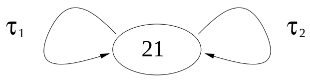


FIG. 5.1 – The symmetric Rauzy induction graph for two-interval exchange transformations.

FIG. 5.2 – The primitivity subgraphs for two-interval exchange transformations.

of consecutive induction steps. This last remark provides a geometric interpretation of Theorem 5.1.4.

We present now an analogous study in the case of nondegenerate circle map subshifts. Let us introduce the following four substitutions, defined over the alphabet $\{1,2,3\}$, given by :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} & \sigma_1 & & & \sigma_2 & & & \sigma_3 & & & \sigma_4 & \\ 1 & \longmapsto & 13 & 1 & \longmapsto & 1 & 1 & \longmapsto & 1 & 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 & 2 & \longmapsto & 2 & 2 & \longmapsto & 23 & 2 & \longmapsto & 13 \\ 3 & \longmapsto & 3 & 3 & \longmapsto & 23 & 3 & \longmapsto & 3 & 3 & \longmapsto & 2 \end{array}$$

For each integer k, we also consider the following morphism :

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_k : & \{1,2,3\}^* & \longrightarrow & \{1,0\}^* \\ & 1 & \longmapsto & 1, \\ & 2 & \longmapsto & 10^{k+1}, \\ & 3 & \longmapsto & 10^k. \end{array}$$

If $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, the sequence $(\overline{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ is defined by

$$\overline{U_n} = \begin{cases} 1 & \text{if } U_n = 0, \\ 0 & \text{if } U_n = 1. \end{cases}$$

Having fixed the above notation, we can give the following S-adic expression for nondegenerate circle map subshifts (see section 1.5).

Theorem 5.3.1. *Let us consider nondegenerate parameters $(\alpha, \beta) \in (0,1)$ and let $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the $\mathcal{D}$-expansion associated with (α,β). The circle map subshift associated with parameters (α,β) is generated by the sequence*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right)$$

if $\alpha < \beta$ and by

$$\lim_{n\to\infty} 1T\left(\overline{\Phi_{\lfloor \frac{\beta}{1-\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1 \sigma_2^{a_j} \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \sigma_1^{a_j} \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right)} \right)$$

if $\alpha > \beta$.

The proof is based on a study of an induction process for three-interval exchange transformations close to that of Rauzy. We also obtain an analog to Proposition 5.3.1 in the case of nondegenerate circle map subshifts. Figure 5.3 is the analog of Figure 5.1 and Figure 5.4 is the analog of Figure 5.2. To a nondegenerate circle map we can associate an I.D.O.C. three-interval exchange transformation. The orbit of such an interval exchange transformation under the Rauzy induction does not ultimately remain in one of the primitivity subgraphs G_1, G_2, or G_3 represented in Figure 5.4.

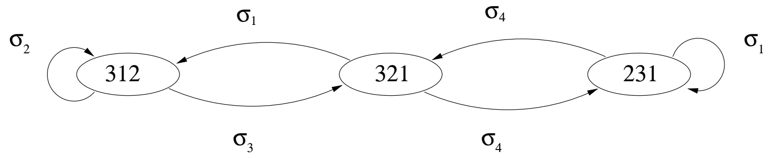


FIG. 5.3 – The Rauzy induction graph for three-interval exchange transformations.

Moreover, an I.D.O.C. three-interval exchange transformation is LR if and only if its orbit under the Rauzy induction can stay in any of the primitivity subgraphs G_1, G_2, and G_3 only for a bounded number of consecutive induction steps. This last remark provides a geometric interpretation of the $(*)$-condition in Theorem 5.1.3 and will be proved in Section 5.4.

A similar study could clearly be carried out in the general case of an I.D.O.C. interval exchange transformation. However, the results quickly become hard to read since the complexity of the equivalent to the $(*)$-condition increases rapidly (cf. Appendix B).

In this section we have exhibited some similarities between the Sturmian and the circle map cases. On the other hand, some aspects of the two cases do not have mutual counterparts. The strategy used to prove Theorem 5.1.4 is the following :

- Exhibit a primitive S-adic expression for Sturmian subshifts generated by an irrational α when the coefficients of the continued fraction expansion of α are bounded and use this to establish linear recurrence in this case.
- Show that otherwise a Sturmian sequence contains arbitrarily high powers.

We thus obtain that a Sturmian sequence is LR if and only if it is power free. This equivalence is also true for some generalizations of Sturmian sequences, namely Arnoux-Rauzy sequences (see [208]). However, such an equivalence does not hold for circle maps. We can therefore not mimic the strategy used in the Sturmian case. For example, the circle map sequences with $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, where $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is the periodic sequence $(10)^\omega$, $a_n = 1$ if n is a power of 2 and 0 otherwise, are both non-LR and power free (see Appendix A).

5.4 Proof of theorem 5.1.3

The proof of Theorem 5.1.3 is based on Theorem 5.3.1 and Proposition 5.2.3 which states that a proper primitive S-adic subshift is LR. Our strategy to prove this theorem is the following :

- We exhibit a proper primitive S-adic expression for three-interval exchanges associated with circle maps whose $\mathcal{D}$-expansion satisfies the $(*)$-condition (Proposition 5.4.1).
- We prove the existence of a uniform upper bound of the gaps between successive occurrences of letters in the different derived sequences of an LR-sequence (Lemma 5.4.4).
- Finally, we show that such a uniform bound does not exist for a circle map whose $\mathcal{D}$-expansion does not satisfy the $(*)$-condition (Proposition 5.4.2).

For $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, let A_i denote the incidence matrix of the substitution σ_i which has been defined in the previous section. For every integer k, we write

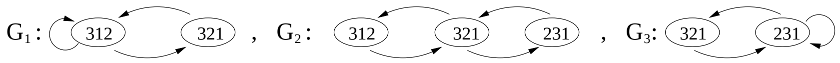


FIG. 5.4 – The primitivity subgraphs for three-interval exchange transformations.

$$\mathcal{F}_k = (\sigma_1 \sigma_2^k \sigma_3) \text{ and } \mathcal{G}_k = (\sigma_4 \sigma_1^k \sigma_4), \tag{5.3}$$

and for the associated incidence matrices, we write

$$\mathcal{B}_k = (A_1 A_2^k A_3) \text{ and } \mathcal{C}_k = (A_4 A_1^k A_4). \tag{5.4}$$

Definition 5.4.1. *Let $(C, D) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, $C = (c_{i,j})$, $D = (d_{i,j})$. We say that $C \geq D$ if $c_{i,j} \geq d_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$. Similarly, we say that $C > D$ holds if $c_{i,j} > d_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$.*

Proposition 5.4.1. *A nondegenerate circle map whose $\mathcal{D}$-expansion satisfies the $(*)$-condition is the image by a morphism of a proper primitive S-adic sequence.*

Lemma 5.4.2. *If C is a nonnegative matrix in $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, then for every integer k, the following four inequalities hold :*

$$\mathcal{B}_k C \geq C,\ C\mathcal{B}_k \geq C,\ \mathcal{C}_k C \geq C, \text{ and } C\mathcal{C}_k \geq C.$$

Démonstration. This follows directly from $\mathcal{B}_k = I_3 + A'_k$ with $A'_k \geq 0$ and $\mathcal{C}_k = I_3 + B'_k$ with $B'_k \geq 0$. □

Lemma 5.4.3. *Let $(a_n, i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a $\mathcal{D}$-expansion satisfying the $(*)$-condition with an integer M_0 and let $S = \left\{ \prod_{j=kM_0}^{(k+1)M_0} \mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j},\ k \in \mathbb{N} \right\}$. Then S is a finite set of substitutions and each of its element is $(1,3)$-proper.*

Démonstration. The set S is clearly finite because the sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded by M_0. In view of (5.3), we obtain for every integer k

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_k & \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 2^{k+1}3 \\ 3 & \longmapsto & 2^k 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_k & \\ 1 & \longmapsto & 12^k \\ 2 & \longmapsto & 12^{k+1} \\ 3 & \longmapsto & 13 \end{array}$$

Let k be an integer and $i \in \{1,2,3\}$. Then $\mathcal{F}_k(i)$ ends with 3 and $\mathcal{F}_k(1)$ begins with 1. Moreover $\mathcal{G}_k(i)$ begins with 1 and $\mathcal{G}_k(1)$ ends with 3. It follows thus that each composition of substitutions of types $\mathcal{F}_k$ and $\mathcal{G}_k$ in which the two types both appear is $(1,3)$-proper. Part (ii) of the $(*)$-condition allows us to conclude. □

Proof of Proposition 5.4.1. Let us consider a circle map U whose $\mathcal{D}$-expansion satisfies the $(*)$-condition with some integer M_0. Theorem 5.3.1 provides us with an S-adic expression for this circle map. Our goal is now to prove that we can extract a proper primitive S-adic expression for U from this representation.

We can suppose that U is admissible in order to simplify the notation. We have

$$U = \lim_{n \to \infty} \Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right).$$

Let

$$V=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right). \tag{5.5}$$

Thus,

$$U=\Phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}(V) \tag{5.6}$$

and

$$V=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}\mathcal{F}_{a_j}^{i_j}\circ\mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j}\right)(1).$$

We have then

$$V=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\left(\prod_{j=kM_0}^{(K+1)M_0}\mathcal{F}_{a_j}^{i_j}\circ\mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j}\right)\right)(1). \tag{5.7}$$

Let

$$S=\left\{\prod_{j=kM_0}^{(k+1)M_0}\mathcal{F}_{a_j}^{i_j}\circ\mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j},\ k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Then Lemma 5.4.3 implies that (5.7) gives us a proper S-adic representation of V.

We have now to prove that this representation is primitive or more precisely that there exists an integer s_0 such that for every integer r and all $b\in\{1,2,3\}$ and $c\in\{1,2,3\}$, the letter b has an occurrence in

$$\left(\prod_{k=r}^{r+s_0}\left(\prod_{j=rM_0}^{(r+1)M_0}\mathcal{F}_{a_j}^{i_j}\circ\mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j}\right)\right)(c).$$

Or similarly, we have to show that the corresponding product of matrices

$$\left(\prod_{k=r}^{r+s_0}\left(\prod_{j=rM_0}^{(r+1)M_0}\mathcal{B}_{a_j}^{i_j}\circ\mathcal{C}_{a_j}^{1-i_j}\right)\right)$$

is positive, where the matrices $\mathcal{B}_k$ and $\mathcal{C}_k$ are defined in (5.4). Let us consider the matrix

$$\mathcal{M}_r=\left(\prod_{j=rM_0}^{(r+1)M_0}\mathcal{B}_{a_j}^{i_j}\circ\mathcal{C}_{a_j}^{1-i_j}\right).$$

By the fact that the $\mathcal{D}$-expansion associated with U satisfies the $(*)$-condition with the integer M_0, we get

$$\begin{array}{lll}\exists j_1\in\{1,2,\ldots,l\} & \text{such that} & i_{j_1}=0,\\ \exists j_2\in\{1,2,\ldots,l\} & \text{such that} & i_{j_2}=1,\\ \exists j_3\in\{1,2,\ldots,l\} & \text{such that} & a_{j_3}\geq 1.\end{array}$$

The previous remark and Lemma 5.4.2 show that at least one of the following inequalities holds :

$$\begin{array}{l}\mathcal{M}_r\geq\mathcal{B}_0\mathcal{C}_1,\\ \mathcal{M}_r\geq\mathcal{B}_1\mathcal{C}_0,\\ \mathcal{M}_r\geq\mathcal{C}_1\mathcal{B}_0,\\ \mathcal{M}_r\geq\mathcal{C}_0\mathcal{B}_1.\end{array}$$

Now we just have to remark that each element of $\{\mathcal{B}_0\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0\mathcal{B}_1\}^2$ is positive. Therefore, we obtain primitive S-adicity of our representation with constant $s_0 = 2$. We therefore obtain that U is the image under the morphism $\Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor}$ of the proper primitive S-adic sequence V, concluding the proof. □

Proposition 5.4.2. *A nondegenerate circle map subshift whose $\mathcal{D}$-expansion does not satisfy the $(*)$-condition is not linearly recurrent.*

Since we will work with the derived sequences of a given circle map sequence in our proof of Proposition 5.4.2, we start off by discussing LR properties of derived sequences of an LR sequence.

Lemma 5.4.4. *Let U be a K-linearly recurrent sequence defined over an alphabet $\mathcal{A}$ and let ω be a nonempty prefix of U. Then every word of length at least $K^2(K+1)$ in $D_\omega(U)$ contains all the elements of $\mathcal{A}_\omega$.*

Démonstration. Let ω be a factor of U and $i \in \mathcal{A}_\omega = \{1, 2, \ldots, d\}$. Then there exists a unique word ω_i such that $\Theta_\omega(i) = \omega_i$. By definition we have

$$\forall j \in \mathcal{A}_\omega, \quad |\omega_j| \leq K|\omega|.$$

This inequality implies that ω_i appears in each word of length at least $(K+1)(K|\omega|)$, in view of Proposition 5.2.2. Moreover, again by Proposition 5.2.2, we have

$$\forall j \in \mathcal{A}_\omega, \quad \frac{1}{K}|\omega| \leq |\omega_j| \leq K|\omega|.$$

The set $\mathcal{R}_\omega$ is a code. We thus obtain that the letter i occurs in each word of length at least $K^2(K+1)$ in $D_\omega(U)$. □

Lemma 5.4.5. *Let U be a K-linearly recurrent sequence. Then, for every integer n, we have*

$$\forall i \in \mathcal{A}_n, \quad |\Theta_n(i)| \leq K^2(K+1),$$

where the maps Θ_n are introduced in Definition 5.2.1.

Démonstration. Let i be an element of $\mathcal{A}_n$ and $\Theta_n(i) = \omega_i$. By definition of the return words and the sequence $\mathcal{D}^{(n)}$, the letter 1 has just one occurrence in ω_i and 1 is the first letter of ω_i. Then, 1 does not appear in the maximal proper suffix of ω_i. Lemma 5.4.4 implies that the length of this suffix is at most $K^2(K+1) - 1$. □

Lemma 5.4.6. *Let U be a K-linearly recurrent sequence defined over an alphabet $\mathcal{A}$ and let ω be a nonempty prefix of U. Then the sequence $D_\omega(U)$ is K^3-linearly recurrent.*

Démonstration. This statement and its proof are very similar in spirit to the previous two lemmas. Let x be a factor of $D_\omega(U)$. Consider any occurrence of x in $D_\omega(U)$ and the length of the corresponding return word to x in $D_\omega(U)$ (i.e., the length of the gap between this occurrence of x and the next, plus the length of x). We use again that $\mathcal{R}_\omega$ is a code. Namely, to this occurrence of x in $D_\omega(U)$ corresponds a word of length at most $K \cdot |\omega| \cdot |x|$ in U whose return words have length at most $K^2 \cdot |\omega| \cdot |x|$. Choose the one that corresponds to this particular occurrence and go back via $\Lambda_{U,\omega}$ to factors of $D_\omega(U)$. We conclude that the length of the return word to x in question is bounded by $K^3 \cdot |x|$. In the previous steps, we have made repeated use of Proposition 5.2.2. This shows that $D_\omega(U)$ is K^3-linearly recurrent since x and its occurrence were arbitrary. □

Lemma 5.4.7. *Let r be a positive integer. Then for every $(i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \{1, 2, 3, 4\}^r$, we have*

$$|\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_r}(123)| \geq \left|\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_{r-1}}(123)\right| + 1.$$

Démonstration. We just have to remark that for each $k \in \{1,2,3,4\}$, there exists a letter $b \in \{1,2,3\}$ such that $|\sigma_k(b)| \geq 2$ and that 1, 2, and 3 occur in $\sigma_k(123)$. $\square$

Lemma 5.4.8. *Let r be a positive integer and $(i_1, i_2, \ldots, i_{3r+1}) \in \{1,2,3,4\}^{3r+1}$. Then there exists at least one letter $b \in \{1,2,3\}$ such that*

$$\left|\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_{3r+1}}(b)\right| > r.$$

Démonstration. According to Lemma 5.4.7, it follows by induction that

$$\left|\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_{3r+1}}(123)\right| \geq 3r+1.$$

The assertion follows immediately. $\square$

Lemma 5.4.9. *Let n be an integer, $(m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, and $(l_0, l_1, \ldots, l_n) \in \{0,1\}^n$. Then, for each $b \in \{1,2,3\}$, we have*

(i) $\left|\prod_{j=0}^{n}\left(\sigma_1\sigma_2^{m_j}\sigma_3\right)(b)\right|_1 \leq 1,$

(ii) $\left|\prod_{j=0}^{n}\left((\sigma_1\sigma_3)^{l_j} \circ (\sigma_4\sigma_4)^{1-l_j}\right)(b)\right|_2 \leq 1,$

(iii) $\left|\prod_{j=0}^{n}\left(\sigma_4\sigma_1^{m_j}\sigma_4\right)(b)\right|_3 \leq 1.$

Here, $|w|_i$ denotes the number of occurrences of the symbol i in the word w.

Démonstration. (i) The incidence matrix associated with the substitution $\prod_{j=0}^{n}\left(\sigma_1\sigma_2^{m_j}\sigma_3\right)$ is equal to $\prod_{j=0}^{n}\mathcal{B}_{m_j}$, where the matrices $\mathcal{B}_{m_j}$ are defined in (5.4). For each integer k, the matrix $\mathcal{B}_k$ is of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix},$$

and so the matrix $\prod_{j=0}^{n}\mathcal{B}_{m_j}$ is of course of the same form. Then, the definition of the incidence matrix allows us to conclude.

(ii) The incidence matrix associated with $\prod_{j=0}^{n}\left((\sigma_1\sigma_3)^{l_j} \circ (\sigma_4\sigma_4)^{1-l_j}\right)$ is equal to $\prod_{j=0}^{n}\left(\mathcal{B}_0^{l_j}\mathcal{C}_0^{1-l_j}\right)$. The matrices $\mathcal{B}_0$ and $\mathcal{C}_0$ are of the form

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 \\ \times & \times & \times \end{pmatrix},$$

and so the matrix $\prod_{j=0}^{n}\left(\mathcal{B}_0^{l_j}\mathcal{C}_0^{1-l_j}\right)$ is of the same form.

(iii) The incidence matrix associated with the substitution $\prod_{j=0}^{n}\left(\sigma_4\sigma_1^{m_j}\sigma_4\right)$ is equal to $\prod_{j=0}^{n}\mathcal{C}_{m_j}$, where the matrices $\mathcal{C}_{m_j}$ are defined in (5.4). For each integer k, the matrix $\mathcal{C}_k$ is of the form

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and so the matrix $\prod_{j=0}^{n}\mathcal{C}_{m_j}$ is of the same form, concluding the proof. $\square$

Proof of Proposition 5.4.2. Let U be a circle map whose $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ does not satisfy the $(*)$-condition. Let V be as in (5.5) so that we have (5.6). Let us assume for the moment that $1-\beta > \alpha$ so that V is the derived sequence corresponding to the prefix 1 of U. We will comment later on the case $1-\beta < \alpha$.

Now assume there exists an integer K such that U is K-LR. We consider four cases.

(i) Let us suppose that the sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is unbounded. Then a direct consequence of the fact that $\sigma_2^{a_n}(3) = 2^{a_n}3$, $\sigma_1^{a_n}(1) = 13^{a_n}$, and that powers propagate by substitution is that U cannot be $(K+1)$-power free. Proposition 5.2.2 thus yields a contradiction.

(ii) Let us suppose that the sequence $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contains arbitrarily long blocks of 1's. In particular, there exists an integer n_0 such that

$$i_{n_0} = i_{n_0+1} = \ldots = i_{n_0+12K^2(K+1)} = 1. \tag{5.8}$$

We recall that there exists an increasing sequence of integers $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$ such that

$$\Theta_N = \prod_{j=k_{N-1}+1}^{k_N} \left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j} \right),$$

where Θ_N is introduced in Definition 5.2.1. This follows from Remark 5.2.7 and the fact that, as was already observed in [5], certain steps of our induction process correspond to induction on the first interval of three-interval exchange transformations associated with U. According to Lemmas 5.4.5 and 5.4.8, the fact that U is K-LR implies that for each integer N,

$$k_{N+1} - k_N < 3K^2(K+1) + 1. \tag{5.9}$$

Now, let us consider two particular elements of the sequence $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$k_{N_1} = \min\left\{k_N, n_0 \le k_N \le n_0 + 12K^2(K+1)\right\}$$

and

$$k_{N_2} = \max\left\{k_N, n_0 \le k_N \le n_0 + 12K^2(K+1)\right\}.$$

By the inequality (5.9), we obtain that k_{N_1} and k_{N_2} are well-defined and

$$k_{N_2} - k_{N_1} \ge 6K^2(K+1) + 1. \tag{5.10}$$

Let us introduce the substitution $\Theta = \Theta_{N_1+1}\Theta_{N_1+2}\ldots\Theta_{N_2}$. Then,

$$\Theta = \prod_{j=k_{N_1}+1}^{k_{N_2}} \left(\left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4\sigma_1^{a_j}\sigma_4\right)^{1-i_j} \right).$$

More precisely, using condition (5.8), we have

$$\Theta = \prod_{j=k_{N_1}+1}^{k_{N_2}} \left(\sigma_1\sigma_2^{a_j}\sigma_3\right). \tag{5.11}$$

Proposition 5.2.1 implies that Θ is a return substitution for U since it is a composition of return substitutions. Thus there exists a nonempty prefix ω of U such that $\Theta = \Theta_{U,\omega}$.

According to the inequality (5.10) and Lemma 5.4.8, we obtain that there exists a letter b in the alphabet $\{1,2,3\}$ such that

$$|\Theta(b)| \geq \frac{k_{N_2} - k_{N_1}}{3} > 2K^2(K+1),$$

and it follows from the equality (5.11) and Lemma 5.4.9 that

$$|\Theta(b)|_1 \leq 1.$$

But $\Theta(b)$ is necessarily a factor of $\mathcal{D}_\omega(U)$. Hence there exists a factor of $\Theta(b)$ of length greater or equal than $K^2(K+1)$ in which the letter 1 does not occur. We obtain finally that there exists a factor of $\mathcal{D}_\omega(U)$ of length greater than or equal to $K^2(K+1)$ in which the letter 1 does not occur. This last remark is in contradiction with the K-LR property of U in view of Lemma 5.4.4.

(iii) Let us suppose that the sequence $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contains arbitrarily long blocks of 0's. Then, we just have to mimic the above arguments in order to find a return substitution Θ' for U and a letter b in $\{1,2,3\}$ such that

$$|\Theta'(b)|_3 \leq 1 \text{ and } |\Theta'(b)| > 2K^2(K+1).$$

We thus obtain a nonempty prefix ω' of U such that $\mathcal{D}_{\omega'}(U)$ contains a factor of length greater than or equal to $K^2(K+1)$ in which the letter 3 does not occur.

(iv) Let us suppose that the sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contains arbitrarily long blocks of 0. Then, analogous reasoning gives a return substitution Θ'' for U and a letter b in $\{1,2,3\}$ such that :

$$|\Theta''(b)|_2 \leq 1 \text{ and } |\Theta''(b)| > 2K^2(K+1).$$

We find a nonempty prefix ω'' of U such that $\mathcal{D}_{\omega''}(U)$ contains a factor of length greater than or equal to $K^2(K+1)$ in which the letter 2 does not occur.

Thus we arrive at a contradiction in each case. Recall that we assumed $1-\beta > \alpha$ at the beginning of the proof. Let us now discuss the case where $1-\beta < \alpha$. In this case V in (5.5) is not the derived sequence corresponding to the prefix 1 of U, that is, $\mathcal{D}_1(U) \neq V$. In fact, V takes three values, while 1 has only two return words, 1 and 10. However, for sufficiently large n, it is relatively easy to see that $\mathcal{D}^{(n)}(U)$ is one of the sequences obtained in the induction process of [5] (leading to the representation (5.6)) and hence there is a morphism Ψ such that $V = \Psi(\mathcal{D}^{(n)}(U))$. If we now again assume that U is LR, then so is $\mathcal{D}^{(n)}(U)$, by Lemma 5.4.6, and hence we get that V is LR. Now we can derive a contradiction following the steps given above. □

Proof of Theorem 5.1.3. In view of Proposition 5.2.3, Theorem 5.1.3 follows directly from Propositions 5.4.1 and 5.4.2. □

5.5 Application of theorem 5.1.3 to Schrödinger operators

In this section we apply our main result, Theorem 5.1.3, to discrete one-dimensional Schrödinger operators with potentials given by circle maps. As explained in the introduction, this is in part motivated by previous results on their Sturmian counterparts and a recent result of Lenz which relates aspects of their spectral theory to LR properties.

A discrete one-dimensional Schrödinger operator acts in the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{Z})$. If $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, then $H\phi$ is given by

$$(H\phi)(n) = \phi(n+1) + \phi(n-1) + V(n)\phi(n),$$

where $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. The map V is called the potential.

If A is an alphabet, $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ is the standard shift, $\Omega \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ is T-invariant (i.e., $T\Omega = \Omega$) and closed (discrete topology on A and product topology on $A^{\mathbb{Z}}$), then Ω is called a (two-sided) subshift. Given such a subshift and a function $f : A \to \mathbb{R}$, we define, for $\omega \in \Omega$, a potential $V = V_\omega$ by

$$V_\omega(n) = f(\omega_n)$$

and an operator H_ω (as above, with this particular potential). It is a standard result that if Ω is minimal, then the spectrum of H_ω does not depend on ω, that is, there is a set $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ such that $\sigma(H_\omega) = \Sigma$ for every $\omega \in \Omega$.

A special case of a recent result of Lenz is given in the following theorem.

Theorem 5.5.1 (Lenz [157]). *If Ω is a linearly recurrent subshift and Ω and f are such that the resulting potentials V_ω are aperiodic, then Σ has Lebesgue measure zero.*

Note in particular that the result is essentially independent of the function f. Moreover, it suffices that at least one V_ω is aperiodic. This implies that all V_ω are aperiodic.

Our goal is to apply this theorem to circle map subshifts. A circle map generates a two-sided subshift as follows. If $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ is a circle map corresponding to parameters (α, β), the associated subshift is given by

$$\Omega = \Omega_{\alpha,\beta} = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \text{ every factor of } \omega \text{ is a factor of } u\}.$$

If we restrict the sequences in Ω to the right half-line, we get exactly the one-sided subshift that was introduced and discussed above. By recurrence, the languages associated with the one-sided and two-sided subshifts are the same. In particular, LR-properties are the same for both subshifts.

Combining our Theorem 5.1.3 and the theorem of Lenz, we obtain the following result.

Theorem 5.5.2. *Suppose that u is a nondegenerate circle map corresponding to parameters (α, β) whose $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies the $(*)$-condition. Consider the associated subshift $\Omega = \Omega_{\alpha,\beta}$ and, for a nonconstant function $f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$, the operators $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$. Then we have that for every $\omega \in \Omega$, the spectrum of H_ω has Lebesgue measure zero.*

It is easy to see that for every θ, the sequence $\omega_n = \chi_{[0,\beta)}(n\alpha + \theta \mod 1)$ is an element of $\Omega_{\alpha,\beta}$. In other words, Theorem 5.5.2 says that if α, β are such that their $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies the $(*)$-condition, then the potential V in (5.2) is linearly recurrent for every choice of θ and $\lambda \neq 0$, and in this case, the operator H satisfies property (i) from the introduction.

Appendix A

In this section we give a proof (and a little bit more) of the power freeness of the sequence we consider in the end of the Section 5.3. This proof was suggested by J. Cassaigne [59].

Let us introduce the following two substitutions, defined over $\{1,2,3\}$, given by :

$f = \sigma_1\sigma_3\sigma_4\sigma_4$			$g = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_4$		
1	$\longmapsto$	13	1	$\longmapsto$	13
2	$\longmapsto$	1323	2	$\longmapsto$	13223
3	$\longmapsto$	133	3	$\longmapsto$	1323

where the substitutions σ_i are defined in Section 5.3. We denote by $\mathcal{F}$ the largest language defined over the alphabet $\{1,2,3\}$ which satisfies the following three conditions :

- $\forall\omega \in \{1,2,3\}^*$, $\omega^4 \in \mathcal{F} \Rightarrow \omega = \varepsilon$,
- $\forall\omega \in \{1,2,3\}^*$ and $\forall z \in \{1,2,3\}$, $(\omega z)^3\omega \notin \mathcal{F}$,
- $11 \notin \mathcal{F}$.

The language $\mathcal{F}$ is naturally obtained as the union of all the languages defined over the alphabet $\{1,2,3\}$ which satisfy these three conditions.

Lemma 5.5.3. *If $\omega \in \mathcal{F}$, then $f(\omega)$ and $g(\omega)$ are two elements of $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Let ω be an element of $\mathcal{F}$. We consider three cases to prove that $f(\omega) \in \mathcal{F}$.

1. Assume there exists a nonempty word M such that M^4 is a factor of $f(\omega)$. Then, M could be decomposed in a unique way in $xf(v)y$, where $(x,v,y) \in \{\varepsilon,3,23,33,323\} \times \{1,2,3\}^* \times \{\varepsilon,1,13,132\}$ and the length of v is maximal with the convention that if v ends with the letter 1, then $y \neq \varepsilon$. We consider two subcases.

   (a) Let us suppose that $v = \varepsilon$. Then $M = xy$ and thus
   $$\begin{aligned} M \in\ & \{3,33,3313,32313\} \cup \{31,313,3132,2313,331,3231\} \\ & \cup \{23,33132,323,323132\} \cup \{23132\} \cup \{231\}. \end{aligned}$$
   But $M \notin \{3,33,3313,32313\}$ because 33 is always followed by a 1 in $f(\omega)$. If $M \in \{31,313,3132,2313,331,3231\}$, we obtain that there exists a letter $z \in \{1,2,3\}$ such that z^3 is a factor of ω. This gives a contradiction because $\omega \in \mathcal{F}$. The word M cannot belong to the set $\{23,33132,323,323132\}$ because 23 is always followed by a 1 in $f(\omega)$. M cannot belong to $\{23132\}$ because the letter 2 is always followed by a 3 in $f(\omega)$. Finally, M cannot belong to $\{231\}$ because the letter 1 is never followed by a 2 in $f(\omega)$.

   (b) Let us suppose that $v \neq \varepsilon$. Then
   $$M^4 = xf(v)yxf(v)yxf(v)yxf(v)y$$
   and necessarily $yx = f(z)$ with $z \in \{\varepsilon,1,2,3\}$. If $z = \varepsilon$, then $M^4 = f(v^4)$. The fact that v does not end with a 1 allows us to infer that v^4 is a factor of ω. We obtain a contradiction because $\omega \in \mathcal{F}$. If z is a letter, then $f((vz)^3v)$ is a factor of $f(\omega)$. The fact that v does not end with a 1 shows that $(vz)^3v$ is a factor of ω. We obtain a contradiction because $\omega \in \mathcal{F}$.

2. Let us suppose that there exist a word M and a letter z such that $(Mz)^3M$ is a factor of $f(\omega)$. Then, M can be decomposed in a unique way in $xf(v)y$, where $(x,v,y) \in \{\varepsilon,3,23,33,323\} \times \{1,2,3\}^* \times \{\varepsilon,1,13,132\}$ and the length of v is maximal with the convention that if v ends with the letter 1, then $y \neq \varepsilon$. We obtain that
   $$(Mz)^3M = xf(v)yzxf(v)yzxf(v)yzxf(v)y,$$
   and necessarily $xzy = f(m)$ with $m \in \{1,2,3\}$ and $|m| \leq 2$ because $|xzy|_1 \leq 2$ and the letter 1 has exactly one occurrence in the image of each letter. Again we consider two subcases.

   (a) Let us suppose that $|m| = 2$. Then there exist two letters a and b such that $yzx = f(ab)$. But $|y|_1 \leq 1$ and $|x|_1 = 0$ imply that $y = f(a)$ and $z = 1$. We get $(Mz)^3M = xf((vab)^3va)$. If $a \neq 1$, then $(vab)^3va$ is a factor of $f(\omega)$ and we obtain a contradiction because $\omega \in \mathcal{F}$. If $a = 1$, $xf((v1b)^3v)$ is a factor of $f(\omega)$. We recall that $zx = 1x = f(b)$.

It follows that if $b = 2$ or $b = 3$, then $x = 323$ or $x = 33$ and thus x is always preceded by the letter 1 in $f(\omega)$. This implies that $1xf((v1b)^3v)$ is a factor of $f(\omega)$. But since $1xf((v1b)^3v) = f((bv1)^3bv)$ and v does not end with the letter 1, it follows that $(bv1)^3bv$ is a factor of ω. This is in contradiction with $\omega \in \mathcal{F}$. Finally, if $b = 1$, then $f((v11)^3v)$ is a factor of $f(\omega)$. The fact that v does not end with the letter 1 gives that $(v11)^3v$ is a factor of ω and thus 11 is a factor of ω. We get a contradiction since $11 \notin \mathcal{F}$.

(b) Let us suppose that $|m| = 1$, then $(Mz)^3M = xf((vm)^3v)y$. In particular, $f((vm)^3v)$ is a factor of $f(\omega)$. But since v does not end with the letter 1, $(vm)^3v$ is a factor of ω. We obtain a contradiction because m is a letter and $\omega \in \mathcal{F}$.

3. Let us suppose that 11 is a factor of $f(\omega)$. This yields a contradiction immediately because the letter 1 is always followed by a 3 in $f(\omega)$ by definition of f.

The proof for g is exactly the same. □

Proposition 5.5.1. *A circle map whose $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies*
- $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} = (10)^\omega$,
- $i_n = 0$ *implies* $a_n = 0$, *and*
- $i_n = 1$ *implies* $a_n \in \{0, 1\}$

is power free.

Démonstration. Let U be such a circle map and V be the natural coding of the three-interval exchange transformation associated with U. Theorem 5.3.1 says that there exists a sequence of integers $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that

$$U = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(f^{b_0}g^{b_1}f^{b_2}g^{b_3}\dots f^{b_{2n}}(1)\right)$$

and thus

$$V = \lim_{n\to\infty} f^{b_0}g^{b_1}f^{b_2}g^{b_3}\dots f^{b_{2n}}(1).$$

With the previous notation, $1 \in \mathcal{F}$. Then Lemma 5.5.3 implies that

$$f^{b_0}g^{b_1}f^{b_2}g^{b_3}\dots f^{b_{2n}}(1) \in \mathcal{F}$$

for every integer n. We thus obtain $\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{F}$. This implies that V is 4-power free. Then, in view of the definition of the morphisms Φ_k, U is clearly power free if $\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor > 0$ (i.e., $1-\beta > \alpha$). In the case where $1-\beta < \alpha$, we can use an argument similar to the one used in the proof of Proposition 5.4.2. It is relatively easy to see that if a sequence is not power free, then all of its derived sequences are not power free, either. We have already noticed at the end of the proof of Proposition 5.4.2 that for sufficiently large n, there is a morphism Ψ such that $V = \Psi(\mathcal{D}^{(n)}(U))$. Now, if we assume that U is not power free, then $\mathcal{D}^{(n)}(U)$ is not power free and hence V is not power free because morphisms propagate powers. We therefore obtain a contradiction to the 4-power freeness of V obtained above. □

In particular, we obtain the power freeness of the sequences mentioned in Section 5.3. These sequences are of course not LR in view of Theorem 5.1.3 and hence they are both power free and not LR. To the best of our knowledge, these are the first examples of sequences with these two properties.

We end this appendix with the following conjecture concerning the power freeness of circle maps.

Conjecture. A nondegenerate circle map is power free if and only if its $\mathcal{D}$-expansion $(a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies the following : there exists an integer M such that for every integer n, we have

– $a_n \leq M$,
– $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M} \Rightarrow \exists k,\ n \leq k \leq n+M$ such that $a_k \neq 0$.

Appendix B

We present here what would be the analog of the geometric considerations of Section 5.3 in the case of I.D.O.C. four-interval exchange transformations which lie in the Rauzy class of (4321). The notion of Rauzy class for an interval exchange transformation was introduced in [201].

Let us introduce the following substitutions, defined on the alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$, given by

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 14 \\ 3 & \longmapsto & 2 \\ 4 & \longmapsto & 3 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 14 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & 4 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & 34 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\ \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 34 \\ 4 & \longmapsto & 4 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 24 \\ 4 & \longmapsto & 3 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 24 \\ 3 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & 4 \end{array} \end{array}$$

The Rauzy induction graph for the Rauzy class of (4321) is given in Figure 5. The orbit of an I.D.O.C. four-interval exchange transformation in the Rauzy class of (4321) under the Rauzy induction cannot be ultimately confined to one of its primitivity subgraphs G_1, G_2, G_3 or G_4 represented in Figures 5.6, 5.7, 5.8, and 5.9, respectively. Moreover, an I.D.O.C. four-interval exchange in the Rauzy class of (4321) is LR if and only if its orbit under the Rauzy induction can stay in any of the primitivity subgraphs G_1, G_2, G_3, and G_4 only for a bounded number of consecutive induction steps.

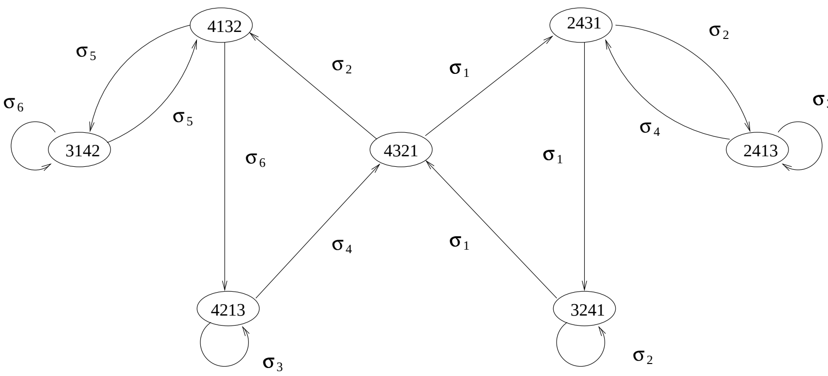


FIG. 5.5 – The Rauzy induction graph for the Rauzy class of (4321).

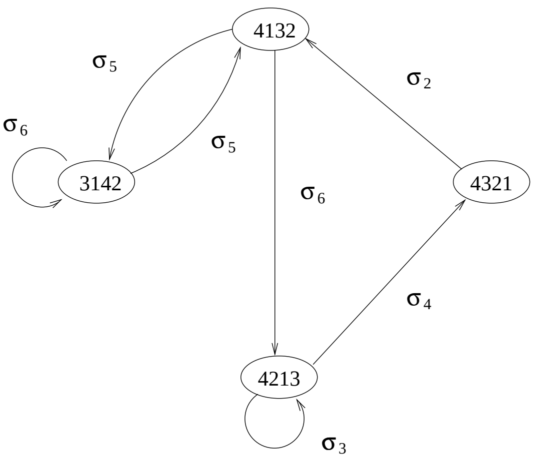


FIG. 5.6 – The primitivity subgraph G_1 for the Rauzy class of (4321).

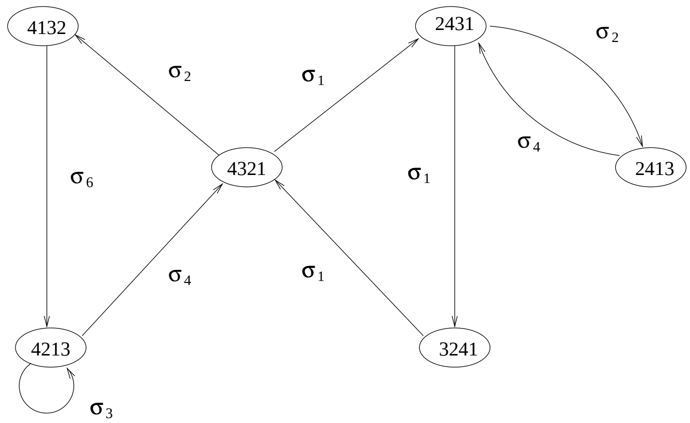


FIG. 5.7 – The primitivity subgraph G_2 for the Rauzy class of (4321).

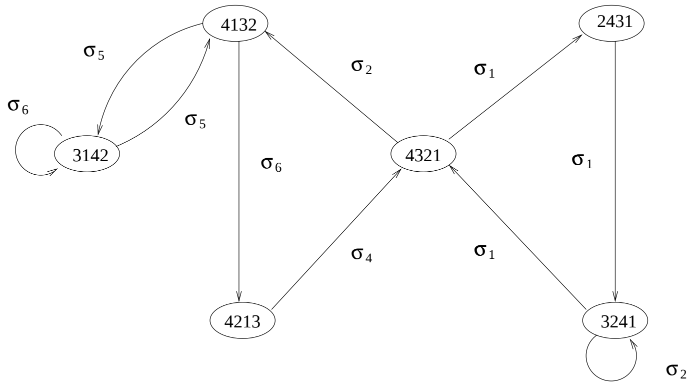


FIG. 5.8 – The primitivity subgraph G_3 for the Rauzy class of (4321).

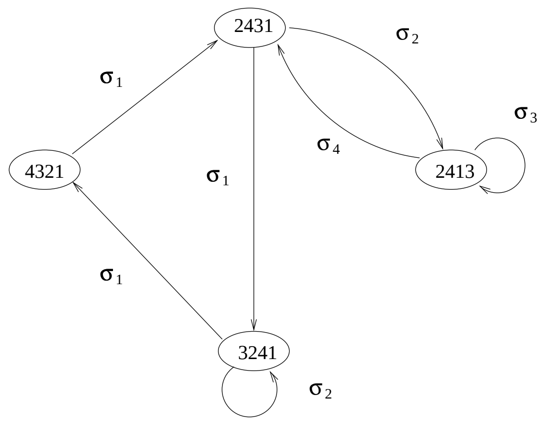


FIG. 5.9 – The primitivity subgraph G_4 for the Rauzy class of (4321).

Chapitre 6

Transcendance de nombres réels à développements réguliers

Dans ce chapitre, nous utilisons la description S-adique des codages de rotations établie au chapitre 1, pour montrer le résultat suivant : si le développement b-adique d'un nombre réel est un codage binaire de rotation ou le codage naturel d'un échange de trois intervalles non périodique, alors ce nombre est transcendant. Ce chapitre correspond à l'article *On the transcendence of real numbers with a regular expansion* écrit en collaboration avec Julien Cassaigne[1] et soumis pour publication à la revue *Journal of Number Theory.*

6.1 Definition and results

In the following, a morphism will mean a homomorphism of free monoid. The notion of three-interval exchange transformation is introduced in the first chapter. We first recall the definition of the codings of rotations.

Codings of rotations

Let $(\alpha, \beta) \in (0,1)^2$. The coding of rotation corresponding to the parameters (α, β, x) is the symbolic sequence $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 0}$ defined over the binary alphabet $\{0, 1\}$ by :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{if } \{x + n\alpha\} \in [0, \beta[, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

When α is rational the sequences obtained are clearly periodic, otherwise the coding of rotation is said *irrational.* The cases $\beta = \alpha$ or $\beta = 1 - \alpha$ give Sturmian sequences and, more generally, the case $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ gives to quasi-Sturmian sequences (see [209]). A coding of rotation is called nondegenerate if its parameters satisfy : α is irrational and $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

Main result

We shall prove the following, extending the result obtained for Sturmian and quasi-Sturmian sequences in [118] and [13].

[1]Institut de Mathématiques de Luminy

Theorem 6.1.1. *Let x be a real number and $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 0}$ be its b-ary expansion. Then the number x is transcendental if one of the following conditions holds :*

- *the sequence $\mathbf{u}$ is an irrational coding of rotation.*
- *the sequence $\mathbf{u}$ is the natural coding of a non-periodic three-interval exchange transformation.*

Remark 6.1.2. *If $\mathbf{u}$ is a rational coding of rotation or the natural coding of a periodic interval exchange transformation, then x is obviously a rational number.*

Theorem 6.1.1 is obtained via the following combinatorial translation of a result due to Ridout [207]. We recall that the result of Ridout is an improvement of Roth's theorem [211] (see also [168]).

Theorem 6.1.3 (Ferenczi-Mauduit [118]). *Let Θ be an irrational number, such that its b-ary expansion begins, for every integer $n \in \mathbb{N}$, in $0.u_n v_n v_n v'_n$, where u_n is a possibly empty word and where v_n is a non-empty word admitting v'_n as a prefix. If $|v_n|$ tends to infinity, $\limsup(|u_n|/|v_n|) < \infty$, and $\liminf(|v'_n|/|v_n|) > 0$, then Θ is a transcendental number.*

6.2 Proof of Theorem 6.1.1

In the following, we will say that a sequence $\mathbf{u}$ satisfies the property $\mathcal{P}$, if any $\mathbf{v} \in \overline{\mathcal{O}(\mathbf{u})}$ begins, for every integer $n \in \mathbb{N}$, in $u_n v_n v_n v'_n$, where u_n is a possibly empty word, v_n is a non-empty word admitting v'_n as a prefix, $|v_n|$ tends to infinity, $\limsup(|u_n|/|v_n|) < \infty$, and $\liminf(|v'_n|/|v_n|) > 0$. It thus follows from Theorem 6.1.3 that if $\mathbf{u}$ satisfies the property $\mathcal{P}$ and if x is an irrational number whose b-ary expansion is in $\overline{\mathcal{O}(\mathbf{u})}$, then x is transcendental.

For each integer k, let us introduce the following two morphisms :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_k & \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 2^{k+1}3 \\ 3 & \longmapsto & 2^k 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_k & \\ 1 & \longmapsto & 12^k \\ 2 & \longmapsto & 12^{k+1} \\ 3 & \longmapsto & 13 \end{array}$$

Having fixed the above notation, we recall that we can give the following combinatorial structure for natural codings of i.d.o.c. three-interval exchanges (see section 1.5). This result will play a key role in the proof of Theorem 6.1.1.

Theorem 6.2.1. *Let $\mathbf{u}$ be the natural coding of the orbit of 0 under the action of an i.d.o.c. three-interval exchange. Then, there exist a morphism ϕ defined on $\{1,2,3\}$ and a sequence $(a_n, i_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{N} \times \{0,1\})^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ not ultimately vanishing and $(i_n)_{n\geq 0}$ not ultimately constant, such that :*

$$\mathbf{u} = \lim_{n\to\infty} \phi\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j}\right)(1)\right),$$

where $\prod$ means the composition of morphisms from the left to the right.

Let $\mathbf{u}$ be the natural coding of an i.d.o.c. three-interval exchange. For every integer k, we introduce (following the notation of Theorem 6.2.1) the sequence $\mathbf{v}_k$ defined by :

$$\mathbf{v}_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=k}^{n}\left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j}\right)(1).$$

We will write $\mathbf{v}$ instead of $\mathbf{v_0}$ and we will denote by ϕ_k the morphism

$$\phi_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j} \right).$$

It thus follows that $\mathbf{v} = \phi_k(\mathbf{v}_k)$.

We first state the following result which gives the key idea to show that a sequence obtained by a composition of morphisms satisfies the property $\mathcal{P}$.

Lemma 6.2.2. *If there exist a pair (w, w') of finite words on $\{1,2,3\}$ and an increasing sequence of integers $(k_l)_{l\geq 0}$, such that :*

- *for all $l \in \mathbb{N}$, the word www' appears in $\mathbf{v}_{k_l}$ with bounded gaps, the bound being independent of the integer l,*
- *w' is a prefix of w and either the letters 1 and 3 or the letter 2 appear in w',*

then, the sequence $\mathbf{u}$ satisfies the property $\mathcal{P}$.

Proof. Let (w, w') be a pair of words and let $(k_l)_{l\geq 0}$ be an increasing sequence of integers, with the required properties. Let l be an integer and let us note $w_l = \phi_{k_l}(w)$ and $w_l' = \phi_{k_l}(w')$.

It follows from the definition of $\mathcal{F}_k$ and $\mathcal{G}_k$ and from the condition on the sequence $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ that $|w_l|$ tends to infinity with l. Moreover, we easily obtain by induction that for every integer l,

$$|\phi_{k_l}(13)| > |\phi_{k_l}(2)| = \max\{|\phi_{k_l}(1)|,\ |\phi_{k_l}(2)|,\ |\phi_{k_l}(3)|\}, \tag{6.1}$$

which implies

$$\frac{|w'_{k_l}|}{|w_{k_l}|} \geq \frac{\min\{|\phi_{k_l}(2)|,\ |\phi_{k_l}(13)|\}}{|w||\phi_{k_l}(2)|} = \frac{1}{|w|} \text{ and thus } \liminf_{l\to\infty} \frac{|w'_{k_l}|}{|w_{k_l}|} \geq \frac{1}{|w|} > 0.$$

Let $\mathbf{w} \in \overline{\mathcal{O}(\mathbf{v})}$. Since $\mathbf{v}$ is uniformly recurrent, the word $w_{k_l} w_{k_l} w'_{k_l}$ occurs in $\mathbf{w}$ and its first occurrence is at most $R_l = \max\left\{|u|,\ u \in \mathcal{R}_{\mathbf{v}, w_l w_l w_l'}\right\}$. Then, it just remains to prove that $\limsup_{l\to\infty} \frac{R_l}{|w_l|} < +\infty$. Moreover, we have that $R_l \leq \max\left\{|\phi_{k_l}(v)|,\ v \in \mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k_l}, www'}\right\}$ and www' appears with bounded gaps in $\mathbf{v}_{k_l}$. The bound being independent of l, there thus exists a positive c (independent on l) such that $\max\left\{|v|,\ v \in \mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k_l},(www')}\right\} \leq c$. This implies that $R_l \leq c|\phi_{k_l}(2)|$ and since $|w_l| \geq |\phi_{k_l}(2)|$, it follows that $\limsup_{l\to\infty} \frac{R_l}{|w_l|} \leq c$, concluding the proof. $\square$

We will also need the following modification of Lemma 6.2.2, where the condition on w' is relaxed while the one on the sequence $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ is strengthened.

Lemma 6.2.3. *We assume that neither $(0,0)^3$ nor $(0,1)^3$ appear in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and that $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded by two. If there exists a pair (w, w') of finite words on $\{1,2,3\}$ and an increasing sequence of integers $(k_l)_{l\geq 0}$, such that :*

- *for all $l \in \mathbb{N}$, the word www' appears in $\mathbf{u}_{k_l}$ with bounded gaps, the bound being independent of the integer l,*
- *w' is a non-empty prefix of w,*

then, every sequence in $\overline{\mathcal{O}(\mathbf{u})}$ satisfies the property $\mathcal{P}$.

Proof. If 1 and 3 or 2 appear in w', then Lemma 6.2.2 is enough to conclude. Otherwise, at least 1 or 3 appears in w' since it is a non-empty word.

Let us assume that 1 appears in w'. By hypothesis, there exists c such that the word www' appears in each sequence $\mathbf{v}_{k_l}$ with gaps bounded by c. Moreover, for every integer l, there exists a morphism σ_l, given by a composition of three morphisms of type $\mathcal{F}_k$ and $\mathcal{G}_k$, such that $\mathbf{v}_{(k_l-3)} = \sigma_l(\mathbf{v}_{k_l})$. Since $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded, the set $\{\sigma_l, l \in \mathbb{N}\}$ is finite and there exists a morphism σ, given by a composition of three morphisms of type $\mathcal{F}_k$ and $\mathcal{G}_k$, such that $\mathbf{v}_{(k_l-3)} = \sigma(\mathbf{v}_{k_l})$ for an infinite number of integers l. It thus follows that there exists c' such that the word $\sigma(w)\sigma(w)\sigma(w')$ appears with gaps bounded by c' in an infinite number of sequences $\mathbf{v}_k$. But, since $(0,0)^3$ is not allowed, σ is not equal to $\mathcal{G}_0^3$, implying that 13 or 12 appears in $\sigma(1)$ and therefore in $\sigma(w')$. The pair $(\sigma(w), \sigma(w'))$ thus satisfies the condition required in Lemma 6.2.2, hence the result.

If we assume that 3 appears in w', we can do the same reasoning, applying, instead of $\mathcal{G}_0^3$, that $\mathcal{F}_0^3$ is not allowed. □

The next step consists in studying the combinatorial structure of sequences obtained by a composition of morphisms as in Theorem 6.2.1. More precisely, we have to show that such sequences satisfy the property $\mathcal{P}$ and this result will be obtained via Lemma 6.2.2 and 6.2.3. Next, we will easily deduce Theorem 6.1.1 from Lemma 6.2.4.

Lemma 6.2.4. *Let $(a_n, i_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{N} \times \{0,1\})^{\mathbb{N}}$, with $(a_n)_{n\geq 0}$ not ultimately vanishing and with $(i_n)_{n\geq 0}$ not ultimately constant, and let $\mathbf{v}$ be the infinite sequence defined by :*

$$\mathbf{v} = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j} \right)(1) \right).$$

Then, the sequence $\mathbf{v}$ satisfies the property $\mathcal{P}$.

Proof. We keep in this proof the notations introduced in the beginning of this section.

• Let us first assume that a block of three consecutive $(0,0)$ (that we will denote by $(0,0)^3$) appears infinitely often in the sequence $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. Then, at least one of the following holds :

a) there exists $j \in \mathbb{N}^*$ such that $(j,0)(0,0)^3$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$,

b) there exists $j \in \mathbb{N}$ such that $(j,1)(0,0)^3$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$,

c) there exists an increasing sequence of integers $(j_m)_{m\geq 0}$, $j_m \geq 3$, such that for every m, the block $(j_m, 0)(0,0)^3$ appears in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$,

d) there exists an increasing sequence of integers $(j_m)_{m\geq 0}$, $j_m \geq 3$, such that for every m, the block $(j_m, 1)(0,0)^3$ appears in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$.

a) In that case, we obtain that for an infinite number of k, $\mathbf{v}_k = \left(\mathcal{G}_j \circ \mathcal{G}_0^3\right)(\mathbf{v}_{k+4})$, which implies that $(12^j)^3$ appears in $\mathbf{v}_k$ with gaps bounded by $3j+5$. In fact, since

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_j \circ \mathcal{G}_0^3 & \\ 1 & \longmapsto & 12^j \\ 2 & \longmapsto & (12^j)^3 12^{j+1} \\ 3 & \longmapsto & (12^j)^3 13, \end{array} \tag{6.2}$$

the return words to $(12^j)^3$ are exactly 12^j, $(12^j)^3 2$ and $(12^j)^3 13$. Therefore, the sequence $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$ in view of Lemma 6.2.2 since $j \geq 1$.

b) We obtain as above that for an infinite number of k, $\mathbf{v}_k = \left(\mathcal{F}_j \circ \mathcal{G}_0^3\right)(\mathbf{v}_{k+4})$. This implies that $(13)^3$ appears in $\mathbf{v}_k$ with gaps bounded by $j+8$. In fact, since

$$\begin{array}{ccl} & \mathcal{F}_j \circ \mathcal{G}_0^3 & \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & (13)^3 2^{j+1} 3 \\ 3 & \longmapsto & (13)^3 2^j 3, \end{array} \tag{6.3}$$

the return words to $(13)^3$ are 13, $(13)^3 2^j 3$ and $(13)^3 2^{j+1} 3$. Therefore, the sequence $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$ in view of Lemma 6.2.2.

c) In that case, we obtain that for every integer m there exists an integer k such that $\mathbf{v}_k = \left(\mathcal{G}_{j_m} \circ \mathcal{G}_0^3\right)(\mathbf{v}_{k+4})$ and thus, in view of (6.2) and since $j_m \geq 3$, the word 2^3 appears with gaps bounded by 6 in $\mathbf{v}_k$ for an infinite number of integers k, hence $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$.

d) In that case, we obtain that for every integer m there exists an integer k such that $\mathbf{v}_k = \left(\mathcal{F}_{j_m} \circ \mathcal{G}_0^3\right)(\mathbf{v}_{k+4})$ and thus, in view of (6.3) and since $j_m \geq 3$, for an infinite number of integers k, every factor of $\mathbf{v}_k$ of length greater than 8 contains either $(13)^3$ or 2^3. It follows that every factor of $\mathbf{v}$ of length greater than $10|\phi_k(2)| - 2$ contains either $(\phi_k(13))^3$ or $(\phi_k(2))^3$, which implies following (6.1) that $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$.

The case $(0,1)^3$ could be dealt with as above using the symmetry between $\mathcal{F}_{||}$ and $\mathcal{G}_k$.

Now, we can assume without restriction that neither $(0,0)^3$ nor $(0,1)^3$ appear in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ since the conditions required to satisfy $\mathcal{P}$ are clearly preserved by morphism. This directly implies that the words 1^3 and 3^3 cannot appear in any sequence $\mathbf{v}_k$.

• Let us assume that there exists an increasing sequence $(k_l)_{l\geq 0}$ such that $j_l = a_{k_l} \geq 3$. Then, $\mathbf{v}_{k_l} = \mathcal{F}_{j_l}(\mathbf{v}_{k_l+1})$ or $\mathbf{v}_{k_l} = \mathcal{G}_{j_l}(\mathbf{v}_{k_l+1})$. Since $j_l \geq 3$ and 1^3 and 3^3 are not factors of $\mathbf{v}_{k_l+1}$, we obtain that 2^3 appears in $\mathbf{v}_{k_l}$ with gaps bounded by 8, hence $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$.

Now, we can assume without restriction that neither $(0,0)^3$ nor $(0,1)^3$ appear in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and that $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded by two. This implies in particular that we can use Lemma 6.2.3.

• Let us assume that $(0,0)^2$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. Then, for an infinite number of integers k, either $\mathbf{v}_k = \left(\mathcal{G}_j \circ \mathcal{G}_0^2\right)(\mathbf{v}_{k+3})$ with $1 \leq j \leq 2$, or $\mathbf{v}_k = \left(\mathcal{F}_j \circ \mathcal{G}_0^2\right)(\mathbf{v}_{k+3})$ with $0 \leq j \leq 2$, since $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded by two.

In the first case, the word $(12^j)^2 1$ appears in $\mathbf{v}_k$ with gaps bounded by $3j+4$ (≤ 10 because j is at most 2) and

$$\begin{array}{ccl} & \mathcal{G}_j \circ \mathcal{G}_0^2 & \\ 1 & \longmapsto & 12^j \\ 2 & \longmapsto & (12^j)^2 12^{j+1} \\ 3 & \longmapsto & (12^j)^2 13, \end{array}$$

hence $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$ in view of Lemma 6.2.3.

In the second case, the word 31313 appears in $\mathbf{v}_k$ with gaps bounded by $j+6$ (≤ 8 because j is at most 2). We obtain that $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$ in view of Lemma 6.2.3 (here of course $w = 31$ and $w' = 3$).

The case where $(0,1)^2$ appears infinitely often is similar.

We can thus assume without restriction that neither $(0,0)^2$ nor $(0,1)^2$ does appear in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and that $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded by two.

• Let us assume that $((0,1)(0,0))^2$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. Then, for an infinite number of integers k, $\mathbf{v}_k = (\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}_0)^2(\mathbf{v}_{k+4})$. Since

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}_0)^2 & \\ 1 & \longmapsto & 13133 \\ 2 & \longmapsto & 131331323133 \\ 3 & \longmapsto & 13133133, \end{array}$$

the word 31313 appears with bounded gaps in an infinite number of sequences $\mathbf{v}_k$. Lemma 6.2.3 thus implies that $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$.

Just as, we can deal with the case where $((0,0)(0,1))^2$ appears infinitely often.

We can thus assume without restriction that $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded by two and that $(a_n)_{n\geq 0}$ does not take consecutively more than three times the value 0. This together with the fact that 1^3 and 3^3 do not appear in any $\mathbf{v}_k$ implies the existence of c such that the letter 2 appears with gaps bounded by c in $\mathbf{v}_k$ for every integer k. In fact, if $\mathbf{w}$ is a sequence in which 1^3 and 3^3 do not appear and if j denotes a positive integer, then 2 appears with gaps bounded by 6 in $\mathcal{F}_j(\mathbf{w})$ and $\mathcal{G}_j(\mathbf{w})$.

• Let us assume that $(2,0)$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. Then, for an infinite number of integers k, $\mathbf{v}_k = \mathcal{G}_2(\mathbf{v}_{k+1})$. Since 2^3 appears in $\mathcal{G}_2(2)$, it thus follows that $\mathbf{v}$ satisfies $\mathcal{P}$.

Just as, we can deal with the case where $(2,1)$ appears infinitely often.

We can thus assume without restriction that $(a_n)_{n\geq 0}$ is bounded by one and the existence of c such that the letter 2 appears with gaps bounded by c in $\mathbf{v}_k$ for every integer k.

• Let us assume that $(1,0)$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$. Then, at least one of the following holds :
a) the block $(1,0)(1,0)$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and then, for an infinite number of integers k, $\mathbf{v}_k = (\mathcal{G}_1)^2(\mathbf{v}_{k+2})$, implying that the word 2122122 (which is a factor of $\mathcal{G}_1^2(2)$) occurs with uniformly bounded gaps in infinitely many $\mathbf{v}_k$,
b) the block $(1,1)(1,0)$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and then, for an infinite number of integers k, $\mathbf{v}_k = (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_1)(\mathbf{v}_{k+2})$, implying that the word 3223223 (which is a factor of $(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_1)(2)$) occurs with uniformly bounded gaps in infinitely many $\mathbf{v}_k$,
c) the block $(0,1)(1,0)$ appears in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and then, for an infinite number of integers k, $\mathbf{v}_k = (\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}_1)(\mathbf{v}_{k+2})$, implying that the word 32323 (which is a factor of $(\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}_1)(2)$) occurs with uniformly bounded gaps in infinitely many $\mathbf{v}_k$,
d) the block $(0,0)(1,0)$ appears in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ and then, for an infinite number of integers k, $\mathbf{v}_k = (\mathcal{G}_0 \circ \mathcal{G}_1)(\mathbf{v}_{k+2})$, implying that the word 12121 occurs with uniformly bounded gaps in infinitely many $\mathbf{v}_k$. In fact, the word 1212 is a factor of $(\mathcal{G}_0 \circ \mathcal{G}_1)(2)$ and it is always followed by the letter 1.
In each case, Lemma 6.2.3 implies that $\mathbf{v}$ satisfies the property $\mathcal{P}$.

The case where $(1,1)$ appears infinitely often in $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ is similar and this finishes the proof of Lemma 6.2.4. □

Proof of Theorem 6.1.1. If $\mathbf{u}$ denotes the natural coding of the orbit of 0 under the action of an i.d.o.c. three-interval exchange, then Theorem 6.2.1 together with Lemma 6.2.4 implies the existence of a morphism ϕ defined on $\{1,2,3\}$ such that $\mathbf{u} = \phi(\mathbf{v})$, the sequence $\mathbf{v}$ satisfying the property $\mathcal{P}$. It follows immediately that $\mathbf{u}$ satisfies $\mathcal{P}$ too and then, the natural coding of the orbit of any point satisfies the condition required in Theorem 6.1.3, concluding the proof in this case. If $\mathbf{u}$ denotes the natural coding of a non-periodic three-interval exchange which does not satisfy the i.d.o.c., then it is shown in [5] that $\mathbf{u}$ must be quasi-Sturmian and thus the result is already proved in [13].

If $\mathbf{u}$ denotes a nondegenerate coding of rotation of parameters $(\alpha, \beta, 0)$, then it is shown in [5] that there exists a natural coding of the orbit of 0 under the action of an i.d.o.c. three-interval exchange $\mathbf{v}$ and a morphism ϕ from $\{1,2,3\}$ into $\{1,2\}$ such that either $\mathbf{u} = \phi(\mathbf{v})$ or $\mathbf{u} = 1S(\phi(\mathbf{v}))$, where S denotes the classical shift transformation. In these two cases, we easily obtain that the sequence $\mathbf{u}$ satisfies $\mathcal{P}$, since it is the case for $\mathbf{v}$ and then, any coding of rotation of parameters (α, β, x) satifies the conditions of Theorem 6.1.3, concluding the proof in this case. Finally, if $\mathbf{u}$ denotes an irrational coding of rotation whose parameters satisfy $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, then it is proved in [209] that $\mathbf{u}$ is also quasi-Sturmian, hence the proof. $\square$

Chapitre 7

Puissances de mots dans les codages de rotations

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude des répétitions intervenant dans les codages de rotations. Nous donnons une caractérisation des codages de rotations dont l'index est fini en fonction de leur développement $\mathcal{D}$. Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus dans [173, 36] et [243] pour les suites sturmiennes. Nous exhibons ensuite un ensemble non dénombrable de codages de rotations n'ayant aucune puissance initiale asymptotique. En particulier, nous prouvons que, contrairement aux suites sturmiennes, les codages de rotations ne commencent pas tous par des carrés arbitrairement longs. Nous discutons enfin de l'application de ces résultats à la transcendance des fractions continues associées aux codages de rotations.

7.1 Quelques définitions et notations

Commençons par rappeler certaines définitions et notations qui nous seront utiles dans la suite.

Définition 7.1.1. *Soit ω un mot fini et p un entier. On appelle puissance p-ième de ω le mot*

$$\omega^p = \underbrace{\omega\omega\ldots\omega}_{p\ \textit{fois}}.$$

On définit alors l'index entier d'un mot infini U, noté $ind_e(U)$, comme le supremum des entiers p pour lesquels il existe un mot ω, non vide, tel que ω^p soit un facteur de U.

On définit également l'index entier asymptotique, noté $ind_e^*(U)$, comme le supremum des entiers p pour lesquels il existe une suite de mots $(\omega_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout n $(\omega_n)^p$ soit un facteur de U, et telle que $\limsup_{n\to\infty} |\omega_n| = +\infty$.

Ces définitions impliquent naturellement que pour toute suite U,

$$\mathrm{ind}_e^*(U) \leq \mathrm{ind}_e(U).$$

Définition 7.1.2. *Soit ω un mot fini et p un réel strictement positif. On appelle puissance pième de ω le mot $\omega^p = \omega^{\lfloor p \rfloor} u$ où u est le préfixe de longueur $\lceil (p - \lfloor p \rfloor)|\omega| \rceil$. Dans la suite, nous noterons $v \prec u$ lorsque v est un préfixe du mot u.*

On définit l'eposant critique initial d'un mot fini U, noté $ice(U)$, comme le plus grand p pour lequel il existe un mot non vide ω tel que $\omega^p \prec U$. L'exposant critique initial d'un mot infini U, noté $ice(U)$, est alors défini par :

$$ice(U) = \sup_{n\to\infty} ice(U_n),$$

où U_n désigne le préfixe de longueur n de la suite U.

7.2 Un premier résultat métrique

Les échanges de trois intervalles que nous considérons ici sont toujours associés à la permutation (321). Ainsi, la donnée d'un élément v du simplexe $\Lambda_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x+y+z=1\}$, définit naturellement un unique échange de trois intervalles T_v. Nous munissons Λ_3 de la mesure induite par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$. À tout échange de trois intervalles (et donc à tout élément de Λ_3) on associe un unique produit infini de matrices $\prod\limits_{n\geq 0} A_{i_n}$ correspondant aux étapes successives de l'induction de Rauzy (voir paragraphe 1.4), où pour tout entier n, $i_n \in \{1,2,3,4\}$; les matrices A_{i_n} étant définies, comme au paragraphe 1.4, par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étant donné $v = (l_1, l_2, l_3) \in \Lambda_3$, nous noterons V_v le codage naturel de l'orbite du point 0 sous l'action de T_v. Si k désigne un entier, nous avons vu au paragraphe 1.9 qu'il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$ tel que le codage de rotation caractéristique associé U (c'est-à-dire, le codage de paramètres $(\alpha,\beta,0)$), vérifie $\varphi_k(V_v) = U$, où φ_k est le morphisme défini par :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_k & \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 12^{k+1} \\ 3 & \longmapsto & 12^k. \end{array} \tag{7.1}$$

De plus, nous avons déjà remarqué au paragraphe 1.9 que si E_k désigne l'application

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_3 & \overset{E_k}{\longrightarrow} & [0,1[^2 \\ (l_1,l_2,l_3) & \longmapsto & \left(\frac{l_2+l_3}{l_1+(k+1)l_2+kl_3}, \frac{l_1+l_2+l_3}{l_1+(k+1)l_2+kl_3}\right), \end{array}$$

alors (α,β) est l'image par E_k de v. De même, il existe un unique codage de rotation caractéristique, U', de paramètres (α,β) tel que $U' = a\overline{S(\varphi_k(V_v))}$, où S désigne le shift et $\overline{S(\varphi_k(V_v))}$ est la suite obtenue à partir de $S(\varphi_k(V_v))$ en échangeant les lettres a et b (voir l'équation 1.3). En définissant l'application E'_k par :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_3 & \overset{E'_k}{\longrightarrow} & [0,1[^2 \\ (l_1,l_2,l_3) & \longmapsto & \left(1-\frac{l_2+l_3}{l_1+(k+1)l_2+kl_3}, 1-\frac{l_1+l_2+l_3}{l_1+(k+1)l_2+kl_3}\right), \end{array}$$

on obtient alors que $(\alpha, \beta) = E'_k(v)$. Réciproquement, nous avons montré au paragraphe 1.3 que pour tout $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, il existe un unique entier k tel que le codage de rotation caractéristique associé, U, vérifie soit $U = \varphi_k(V_v)$ avec $v = E_k^{-1}(\alpha, \beta)$ (lorsque $\alpha < \beta$), soit $U = a\overline{S(\varphi_k(V_v))}$ avec $v = E_k^{'-1}(\alpha, \beta)$ (lorsque $\alpha > \beta$). Ceci permet d'affirmer que

$$\bigcup_{k \geq 0} \left(E_k(\Lambda_3) \cup E'_k(\Lambda_3)\right) = [0,1[^2. \tag{7.2}$$

Proposition 7.2.1. *Pour presque tout $v \in \Lambda_3$, le codage naturel V_v associé à l'échange de trois intervalles T_v vérifie*

$$ind_e^*(V_v) = ind_e(V_v) = +\infty.$$

Démonstration. Soit $M = A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}$ une matrice associée à un chemin, fini et admissible, dans le graphe d'induction de Rauzy des échanges de trois intervalles (voir figure 1.6). Un résultat de W. Veech ([244], p. 225) implique alors que, pour presque tout $v \in \Lambda_3$, M admet une infinité d'occurrences dans le produit infini associé à l'échange T_v. En choisissant le produit admissible $\mathcal{A}_k = A_1 A_2^k A_3$, on vérifie facilement (voir théorème 1.5.6) que le codage naturel d'un échange de trois intervalles dont la suite de matrices contient une infinité d'occurences de $\mathcal{A}_k$ possède des puissances k-ièmes arbitrairement grandes. Ainsi, pour presque tout $v \in \Lambda_3$, $\text{ind}_e^*(V_v) \geq k$. On en déduit alors facilement que pour presque tout $v \in \Lambda_3$, $\text{ind}_e^*(V_v) = +\infty$. □

Nous allons déduire de la proposition précédente le résultat suivant.

Proposition 7.2.2. *Pour presque tout (au sens de la mesure de Lebesgue) $(\alpha, \beta, x) \in [0,1[^3$, le codage de rotation U de paramètre (α, β, x) vérifie*

$$ind_e^*(U) = ind_e(U) = +\infty.$$

Démonstration. Considérons l'ensemble F_1 défini par :

$$\left\{(\alpha, \beta) \in [0,1[^2, \text{ tel que } \text{ind}_e^*(U) < +\infty\right\},$$

où U désigne le codage de rotation caractéristique de paramètres (α, β). Nous voulons dans un premier temps montrer que F_1 est de mesure nulle. Considérons également l'ensemble F_2 défini par :

$$\{v \in \Lambda_3, \text{ tel que } \text{ind}_e^*(V_v) < +\infty\}.$$

Soient $v \in \Lambda_3$ et k un entier. Alors, si $\text{ind}(V_v) = +\infty$, les codages de rotations U et U' associés respectivement aux paramètres $E_k(v)$ et $E'_k(v)$ vérifient $\text{ind}(U) = \text{ind}(U') = +\infty$, puisque $U = \varphi_k(V_v)$ et $U' = a\overline{S(\varphi_k(V_v))}$. Ainsi,

$$F_1 \subset \bigcup_{k \geq 0} \left(E_k(F_2) \cup E'_k(F_2)\right),$$

puisque d'après l'égalité (7.2) :

$$\bigcup_{k \geq 0} \left(E_k(\Lambda_3) \cup E'_k(\Lambda_3)\right) = [0,1[^2.$$

Or comme F_2 est de mesure nulle (voir proposition 7.2.1) et que les applications E_k et E'_k sont suffisamment régulières, il suit que pour tout entier k les ensembles $E_k(F_2)$ et $E'_k(F_2)$ sont également de mesure nulle. On en déduit alors directement que F_1 est un ensemble de mesure nulle.

Soit $(\alpha, \beta, x) \in [0,1[^3$, notons U_1 le codage de rotation caractéristique de paramètres (α, β) et U_2 le codage de rotation de paramètres (α, β, x). Le fait que $\mathcal{L}(U_1) = \mathcal{L}(U_2)$, impliqué par la minimalité de la rotation d'angle α, entraîne que $\mathrm{ind}_e^*(U_1) = \mathrm{ind}_e^*(U_2)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 7.2.3. *Pour presque tout (au sens de la mesure de Lebesgue) $(\alpha, \beta, x) \in [0,1[^3$, le codage de rotation U de paramètre (α, β, x) vérifie*

$$ice(U) = +\infty.$$

Démonstration. De même que nous avons défini l'index entier asymptotique d'une suite U, il est possible de définir l'index asymptotique de U, noté $\mathrm{ind}^*(U)$, en considérant des puissances fractionnaires (comme dans la définition 7.1.2). Lorsque U définit un sous-shift X ergodique, minimal et de complexité sous-affine, alors la fonction ice est presque partout constante sur X, égale à $\mathrm{ind}^*(U)$ (voir [40] pour une démonstration). La proposition 7.2.2 nous permet donc de conclure puisque $\mathrm{ind}_e^*(U) \leq \mathrm{ind}^*(U)$. $\square$

Remarque 7.2.4. *Ce résultat implique notamment que pour presque tout codage de rotation U, le nombre réel dont le développement en base b est U est en fait un nombre de Liouville. Un tel nombre n'est évidemment pas normal en base b, mais on ne peut pas pour autant conclure qu'il n'est normal dans aucune base (voir [54] pour une preuve de l'existence de nombres de Liouville qui ne sont normaux dans aucune base). Ainsi, la plupart des nombres réels dont nous avons prouvé la transcendance au chapitre précédent ne sont pas "nouveaux" et l'intérêt du théorème 6.1.1 est donc essentiellement dû au cas des codages dont l'index est fini.*

7.3 Index fini et puissances entières maximales

Nous allons à présent préciser les résultats métriques que nous venons d'obtenir. Pour cela, nous voulons estimer l'index d'un codage de rotation en fonction de son développement $\mathcal{D}$.

Définition 7.3.1. *Soit k un entier supérieur ou égal à deux. Un mot infini U est dit sans puissance k-ième, si $\omega^k \in \mathcal{L}(U) \Rightarrow \omega = \varepsilon$. Plus généralement, on dit qu'un mot U a un index fini si $ind_e(U) < +\infty$, c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que U soit sans puissance k-ième.*

Remarque 7.3.2. *Pour toute suite U, $ind_e(U) < +\infty$ si et seulement si $ind_e^*(U) < +\infty$.*

Par exemple, il est montré dans [177] qu'un point fixe de substitution primitive a toujours un index fini. Pour les codages de rotations et les codages d'échanges de trois intervalles, qui sont des généralisations naturelles des suites sturmiennes, nous cherchons à obtenir des résultats semblables au théorème suivant.

Théorème 7.3.3 (Vandeth [243]). *Soit U une suite sturmienne d'angle $\alpha = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. Alors U a un index fini si et seulement si α a des quotients partiels bornés. De plus, si α a des quotients partiels bornés, alors U est sans puissance k-ième, mais pas sans puissance $(k-1)$-ième, pour $k = 3 + \max_{n \geq 0} a_n$.*

Le fait qu'une suite sturmienne a un index fini si et seulement si son angle a des quotients partiels bornés est en fait un résultat antérieur [173].

7.3.1 Rappels

Commençons par rappeler les notations du chapitre précédent. Soit k un entier. Considérons alors les deux substitutions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_k & \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 2^{k+1}3 \\ 3 & \longmapsto & 2^k 3 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_k & \\ 1 & \longmapsto & 12^k \\ 2 & \longmapsto & 12^{k+1} \\ 3 & \longmapsto & 13 \end{array}$$

Avec les notations précédentes, nous avons obtenu le résultat suivant (au chapitre 1).

Théorème 7.3.4. *Soient V le codage naturel d'un échange d'intervalle satisfaisant à la condition I.D.O.C. et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. Alors,*

$$V = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j} \right)(1) \right),$$

où $\prod$ désigne la composition des substitutions de gauche à droite.

7.3.2 Le cas des échanges de trois intervalles

Nous proposons de donner, dans le cas des échanges de trois intervalles, l'analogue du théorème 7.3.3.

Théorème 7.3.5. *Soient V le codage naturel d'un échange d'intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. Alors, V a un index fini si, et seulement si, il exite un entier M tel que :*

(i) $a_n \leq M$,

(ii) $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1} \Rightarrow \exists k,\ n \leq k \leq n+M-1$ *tel que* $a_k \neq 0$.

De plus, s'il existe un entier n tel que $a_n = M$ ou $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1}$ et $a_k = 0$, $n \leq k \leq n+M-1$, alors V est sans puissance k-ième, mais pas sans puissance $(k-2)$-ième, pour $k = M+3$.

Corollaire 7.3.6. *Soient V le codage naturel d'un échange d'intervalle satisfaisant à la condition I.D.O.C. et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. S'il existe un entier M tel que :*

(i) $a_n \leq M$,

(ii) $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1} \Rightarrow \exists k,\ n \leq k \leq n+M-1$ *tel que* $a_k \neq 0$,

et s'il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n = M$ ou $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1}$ et $a_k = 0$, $n \leq k \leq n+M-1$, alors

$$M+1 \leq ind_e^*(V) \leq M+2.$$

Démonstration. Soit V le codage d'un échange de trois intervalles satisfaisant les conditions demandées. D'après le théorème 7.3.4,

$$V = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j} \right)(1) \right). \tag{7.3}$$

Ainsi, s'il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n = M$ ou $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1}$ et $a_k = 0$, $n \leq k \leq n+M-1$, alors au moins une des substitutions $\mathcal{F}_M$, $\mathcal{G}_M$, $\mathcal{F}_0^M$ ou $\mathcal{G}_0^M$ apparaît une infinité de fois dans le produit (7.3). On obtient immédiatement, par définition de ces substitutions, que dans ce cas V contient des puissances $(M+1)$-ième arbitrairement longues et ainsi, $\mathrm{ind}_e^*(V) \geq M+1$. Enfin, d'après le théorème 7.3.5, $\mathrm{ind}_e(V) \leq M+2$ et donc *a fortiori* $\mathrm{ind}_e^*(V) \leq M+2$, ce qui achève la démonstration. □

Afin de démontrer le théorème 7.3.5, nous reprenons une idée introduite dans l'annexe A du chapitre 5. Pour cela, nous devons tout d'abord définir quatre langages sur l'alphabet $\{1,2,3\}$.

Soit $\mathcal{L}_1$ le plus grand langage (au sens de l'inclusion), défini sur l'alphabet $\{1,2,3\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall \omega \in \{1,2,3\}^*$, $\omega^{M+3} \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \omega = \varepsilon$,
(ii) $\forall \omega \in \{1,2,3\}^*$ et $\forall z \in \{1,2,3\}$, $(\omega z)^{M+2}\omega \notin \mathcal{L}_1$,
(iii) $33 \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow (21 \notin \mathcal{L}_1$ et $22 \notin \mathcal{L}_1)$,
(iv) $11 \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow (22 \notin \mathcal{L}_1$ et $23 \notin \mathcal{L}_1)$.

Soit $\mathcal{L}_2$ le plus grand langage, défini sur l'alphabet $\{1,2,3\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall \omega \in \{1,2,3\}^*$, $\omega^{M+3} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \omega = \varepsilon$,
(ii) $\forall \omega \in \{1,2,3\}^*$ et $\forall z \in \{1,2,3\}$, $(\omega z)^{M+2}\omega \notin \mathcal{L}_2$,
(iii) $33 \notin \mathcal{L}_2$.

Soit $\mathcal{L}_3$ le plus grand langage, défini sur l'alphabet $\{1,2,3\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall \omega \in \{1,2,3\}^*$, $\omega^{M+3} \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \omega = \varepsilon$,
(ii) $\forall \omega \in \{1,2,3\}^*$ et $\forall z \in \{1,2,3\}$, $(\omega z)^{M+2}\omega \notin \mathcal{L}_3$,
(iii) $11 \notin \mathcal{L}_3$.

Ces trois langage sont évidemment inclus dans le langage $\mathcal{L}$ défini sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ comme étant le plus grand langage satisfaisant à la condition :

$$\forall \omega \in \{1,2,3\}^*,\ \omega^{M+3} \in \mathcal{L} \Rightarrow \omega = \varepsilon.$$

Lemme 7.3.7. *Soit k un entier, $1 \leq k \leq M$. Alors,*

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1) \subset (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3)\,.$$

Lemme 7.3.8. *Soient k un entier positif ou nul, $w \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$ et $z \in \{1,2\}$. Alors, si $3w\mathcal{F}_k(z) \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, il existe un mot $w' \in \{1,2,3\}^*$ tel que $w = \mathcal{F}_k(w')$.*

Démonstration. La preuve découle de la définition de la substitution $\mathcal{F}_k$. □

Démonstration du lemme 7.3.7. Soit k un entier, $1 \leq k \leq M$. Le fait que $k \geq 1$ implique immédiatement que les lettres 1 et 3 sont isolées dans $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$. Ceci guarantit que $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$ vérifie les assertions (*iii*) et (*iv*) de la définition de $\mathcal{L}_1$ et les assertions (*iii*) des définitions de $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$.

Montrons à présent que les assertions (*i*) et (*ii*) de la définition de $\mathcal{L}_1$ sont vérifiées par $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$.

(i) Soit $\omega \in \{1,2,3\}^*$ tel que $\omega^{M+3} \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$. Alors on vérifie aisément qu'il existe un triplet (x,v,y), $x \in \{\varepsilon, 2^l 3, 1 \leq l \leq k\}$, $v \in \{1,2,3\}^*$, $y \in \{\varepsilon, 1, 2^l, 1 \leq l \leq k+1\}$, tel que

$$\omega = x\mathcal{F}_k(v)y. \tag{7.4}$$

Cette décomposition est unique si v est choisi de longueur maximale et si 3 n'est pas un préfixe de v. Supposons que ω ne soit pas le mot vide. Nous avons alors deux cas à considérer.

(a) Si $v = \varepsilon$, alors $(xy)^{M+3} \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, ce qui impliquerait, comme $|yx|_3 \leq 1$, l'existence d'une lettre z telle que $z^{M+2} \in \mathcal{L}_1$. On obtient une contradiction car z^{M+2} ne peut appartenir à $\mathcal{L}_1$ au vu de l'assertion (ii).

(b) Si $v \neq \varepsilon$, ω^{M+3} admet la décomposition $\omega^{M+3} = x(\mathcal{F}_k(v)yx)^{M+2}\mathcal{F}_k(v)y$. Comme v ne commence pas par la lettre 3 et que $|yx|_3 \leq 1$, le lemme 7.3.8 entraîne l'existence d'une lettre $a \in \{1,2,3\}$ telle que $yx = \mathcal{F}_k(a)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \omega^{M+3} &= x(\mathcal{F}_k(va))^{M+2}\mathcal{F}_k(v)y \\ &= x\mathcal{F}_k\left((va)^{M+2}v\right)y. \end{aligned}$$

Le fait que v ne commence pas par 3 implique alors que $(va)^{M+2}v \in \mathcal{L}_1$, ce qui est interdit par (ii). En effet, considérons un mot $u \in \{1,2,3\}^*$. Si $\mathcal{F}_k(u) \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$ et que u ne commence pas par la lettre 3, alors $u \in \mathcal{L}_1$.

(ii) Soient $\omega \in \{1,2,3\}^*$ et $z \in \{1,2,3\}$, tels que $(\omega z)^{M+2}\omega \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$. Considérons la décomposition de ω en $\omega = x\mathcal{F}_k(v)y$ (voir (7.4)). Ainsi, $(\omega z)^{M+2}\omega = x\left(\mathcal{F}_k(v)yzx\right)^{M+2}\mathcal{F}_k(v)y$. Puisque v ne commence pas par la lettre 3 et que $|yzx|_3 \leq 2$, le lemme 7.3.8 implique soit l'existence d'une lettre a telle que soit $yzx = \mathcal{F}_k(a)$, soit l'existence de deux lettres a et b telles que $yzx = \mathcal{F}_k(ab)$.

(a) Si $yzx = \mathcal{F}_k(a)$, alors $(\omega z)^{M+2}\omega = x\mathcal{F}_k\left((va)^{M+2}v\right)y$. On obtiendrait donc (à nouveau en utilisant que 3 n'est pas préfixe de v) que $(va)^{M+2}v \in \mathcal{L}_1$, ce qui contredirait l'assertion (ii).

(b) Si $yzx = \mathcal{F}_k(ab)$, alors nécessairement $z = 3$, $b = 3$ et $x = 2^k3$ car $x \in \{\varepsilon, 2^l3, 1 \leq l \leq k\}$ et $y \in \{\varepsilon, 1, 2^l, 1 \leq l \leq k+1\}$. On obtient donc $(\omega z)^{M+2}\omega = 2^k3\mathcal{F}_k\left((va3)^{M+2}v\right)y$.

(b_1) Si $a = 1$, alors $y = 1$, ce qui implique $(\omega z)^{M+2}\omega = 2^k3\mathcal{F}_k\left((v13)^{M+2}v\right)13 \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, car la lettre 1 est toujours suivie d'un 3. Ainsi, $(\omega z)^{M+2}\omega = 2^k3\mathcal{F}_k\left((v13)^{M+2}v1\right) \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$. Comme v ne commence pas par un 3, il vient $(v13)^{M+2}v1 \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, ce qui contredit l'assertion (ii).

(b_2) Si $a = 2$, alors $y = 2^{k+1}$, ce qui implique $(\omega z)^{M+2}\omega = 2^k3\mathcal{F}_k\left((v23)^{M+2}v2\right) \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, car 2^{k+1} est toujours suivi d'un 3. Comme v ne commence pas par un 3, il vient $(v23)^{M+2}v2 \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, ce qui contredit l'assertion (ii).

(b_3) Si $a = 3$, alors comme $x = 2^k3$, soit $3(v33)^{M+2}v \in \mathcal{L}_1$, ce qui est impossible d'après (ii) car $3(v33)^{M+2}v = (3v3)^{M+2}3v$, soit $2(v33)^{M+2}v \in \mathcal{L}_1$. Ce dernier cas est également à éliminer. En effet, comme v ne commence pas par 3, $2v$ admet soit 21 soit 22 comme facteur. Comme 33 serait aussi un élément de $\mathcal{L}_1$, cela contredirait (iii).

□

Lemme 7.3.9. *Soit k un entier, $1 \leq k \leq M$. Alors,*

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1) \subset (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3)\,.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle donnée pour la substitution $\mathcal{F}_k$. Cela vient de la symétrie entre les substitutions $\mathcal{F}_k$ et $\mathcal{G}_k$, pour lesquelles le rôle des lettres 1 et 3 est simplement échangé. Ainsi, la place prépondérante de la lettre 3 dans la démonstration précédente est cette fois occupée par la lettre 1. Afin de guider le lecteur nous rappelons tout de même l'analogue du lemme 7.3.8 (voir lemme 7.3.10) ainsi que la décomposition suivante des mots dans $\mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$, analogue de celle donnée en (7.4). Soit $\omega \in \{1,2,3\}^*$, tel que $\omega^{M+3} \in \mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$. Alors, il existe un triplet (x,v,y), $x \in \left\{\varepsilon, 3, 2^l, 1 \leq l \leq k+1\right\}$, $v \in \{1,2,3\}^*$, $y \in \left\{\varepsilon, 12^l, 1 \leq l \leq k\right\}$, tel que

$$\omega = x\mathcal{G}_k(v)y.$$

□

Lemme 7.3.10. *Soient k un entier positif ou nul, $w \in \mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$ et $z \in \{2,3\}$. Alors, si $\mathcal{F}_k(z)w1 \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_1)$, il existe un mot $w' \in \{1,2,3\}^*$ tel que $w = \mathcal{G}_k(w')$.*

Démonstration. La preuve découle de la définition de la substitution $\mathcal{G}_k$. □

Lemme 7.3.11. *Soit k un entier, $1 \leq k \leq M$. Alors,*

$$\mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2) \subset (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3)\,.$$

Démonstration. Nous rappelons que la substitution $\mathcal{F}_0^k$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_0^k & \\ 1 & \longmapsto & 13^k \\ 2 & \longmapsto & 23^k \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{array}$$

Cette définition implique qu'aucun des mots 11, 21 et 22 n'appartient au langage $\mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. En particulier, $\mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$ vérifie les assertions (iii) et (iv) de la définition de $\mathcal{L}_1$ et l'assertion (iii) de la définition de $\mathcal{L}_3$.

Montrons à présent que les assertions (i) et (ii) des définitions de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3$ sont vérifiées par $\mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$.

(i) Soit $\omega \in \{1,2,3\}^*$, tel que $\omega^{M+3} \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. Alors on vérifie aisément qu'il existe un triplet (x,v,y), $x \in \left\{\varepsilon, 3^l, 1 \leq l \leq k+1\right\}$, $v \in \{1,2,3\}^*$, $y \in \left\{\varepsilon, 1, 13^l, 23^l, 1 \leq l \leq k+1\right\}$, tel que

$$\omega = x\mathcal{F}_k(v)y. \tag{7.5}$$

Cette décomposition est unique si v est choisi de longueur maximale et si 3 n'est pas un préfixe de v. Supposons que ω ne soit pas le mot vide. Nous avons alors deux cas à considérer.

(a) Si $v = \varepsilon$, alors $(xy)^{M+3} \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. Si $y = \varepsilon$, alors $3^{M+2} \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$, ce qui est impossible car $33 \notin \mathcal{L}_2$. Comme clairement x ne peut être le mot vide, on obtient l'existence de $a \in \{1,2\}$ telle que soit $xy = \mathcal{F}_0^k(a)$, soit $yx = \mathcal{F}_0^k(a3)$. Dans le premier cas, on aurait, puisque a est différent de 3, que $a^{M+2} \in \mathcal{L}_2$, ce qui est impossible d'après (ii). Dans le second cas, le même raisonnement donne $(a3)^{M+2}a \in \mathcal{L}_2$, contredisant à nouveau l'assertion (ii).

(b) Si $v \neq \varepsilon$, ω^{M+3} admet la décomposition $\omega^{M+3} = x(\mathcal{F}_0^k(v)yx)^{M+2}\mathcal{F}_0^k(v)y$. Comme v ne commence pas par 3 et que $|yx|_1 + |yx|_2 \leq 1$, le lemme 7.3.8 entraîne l'existence d'une lettre $a \in \{1,2,3\}$ telle que soit $yx = \mathcal{F}_0^k(a) \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$, soit $yx = \mathcal{F}_0^k(a3) \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. Dans le premier cas, on aurait $(va)^{M+2}v \in \mathcal{L}_2$, ce qui est impossible. Dans le second cas, on obtiendrait, puisqu'alors $a \neq 3$, $(va3)^{M+2}va \in \mathcal{L}_2$, ce qui est interdit par (ii).

(ii) Soient $\omega \in \{1,2,3\}^*$ et $z \in \{1,2,3\}$, tel que $(\omega z)^{M+2}\omega \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. Considérons la décomposition de ω en $\omega = x\mathcal{F}_0^k(v)y$. Alors, $(\omega z)^{M+2}\omega = x\left(\mathcal{F}_0^k(v)yzx\right)^{M+2}\mathcal{F}_0^k(v)y$. Puisque v ne commence pas par 3 et que $|yx|_1 + |yx|_2 \leq 2$, deux cas sont à considérer. Il existe une lettre $a \in \{1,2,3\}$ telle que soit $yzx = \mathcal{F}_0^k(a)$, soit $yzx = \mathcal{F}_0^k(a3)$.

(a) Si $yzx = \mathcal{F}_0^k(a)$, alors $(\omega z)^{M+2}\omega = x\mathcal{F}_0^k\left((va)^{M+2}v\right)y$. On obtiendrait donc (à nouveau en utilisant que 3 n'est pas préfixe de v) que $(va)^{M+2}v \in \mathcal{L}_1$, ce qui contredirait l'assertion (ii).

(b) Si $yzx = \mathcal{F}_0^k(a3)$, alors nécessairement $a \neq 3$ car $33 \notin \mathcal{L}_2$.
Soit $y \neq \varepsilon$ et alors $\mathcal{F}_0^k\left((va3)^{M+2}v\right)y \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$ implique $\mathcal{F}_0^k\left((va3)^{M+2}v\right)\mathcal{F}_0^k(a) \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. Il suit $(va3)^{M+2}va \in \mathcal{L}_2$, ce qui est impossible.
Soit $y = \varepsilon$, alors $x = 3^{k+1}$ et $3^{k+1}\mathcal{F}_0^k\left((va3)^{M+2}v\right) \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$ implique donc l'existence d'une lettre $b \in \{1,2\}$, telle que $\mathcal{F}_0^k(b3)\mathcal{F}_0^k\left((va3)^{M+2}v\right) \in \mathcal{F}_0^k(\mathcal{L}_2)$. On en déduit $(3va)^{M+2}3v \in \mathcal{L}_2$, ce qui contredit (ii).

□

Lemme 7.3.12. *Soit k un entier, $1 \leq k \leq M$. Alors,*

$$\mathcal{G}_0^k(\mathcal{L}_3) \subset (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)\,.$$

Démonstration. Pour les raisons invoquées dans la preuve du lemme 7.3.9, la démonstration est identique à celle que nous venons de présenter, si ce n'est qu'il faut à nouveau échanger les rôles des lettres 1 et 3. □

Démonstration du théorème 7.3.5. Soit V le codage naturel d'un échange d'intervalles satisfaisant la condition I.D.O.C. et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. Supposons qu'il existe un entier M tel que :
(i) $a_n \leq M$,
(ii) $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1} \Rightarrow \exists k,\, n \leq k \leq n+M-1$ tel que $a_k \neq 0$.
Considérons alors les ensembles de substitutions suivants :

$$S_1 = \{\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_k,\, 1 \leq k \leq M\}\,,\ S_2 = \left\{\mathcal{F}_0^k,\, 1 \leq k \leq M\right\} \text{ et } S_3 = \left\{\mathcal{G}_0^k,\, 1 \leq k \leq M\right\}.$$

D'après le théorème 7.3.4 et les conditions vérifiées par le développement $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ associé à V, nous pouvons affirmer qu'il existe une unique suite de substitutions $(\sigma_n)_{n\geq 0}$, $\sigma_n \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$, telle que :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_n(1), \tag{7.6}$$

avec la condition

$$\sigma_k \in S_2 \Rightarrow \sigma_{k+1} \notin S_2 \text{ et } \sigma_k \in S_3 \Rightarrow \sigma_{k+1} \notin S_3.$$

Les lemmes 7.3.7, 7.3.9, 7.3.11 et 7.3.12 impliquent que pour tout entier n

$$\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_n(1) \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3) \subset \mathcal{L},$$

ce qui montre que V ne contient pas de puissance $(M+3)$-ième.

De plus, s'il existe un entier n tel que $a_n = M$ ou $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1}$ et $a_k = 0$, $n \leq k \leq n+M-1$, alors au moins une des substitutions $\mathcal{F}_M$, $\mathcal{G}_M$, $\mathcal{F}_0^M$ ou $\mathcal{G}_0^M$ apparaît dans la composition (7.6). On obtient immédiatement, par définition de ces substitutions, que dans ce cas V contient des puissances $(M+1)$-ièmes, ce qui achève la démonstration. □

7.3.3 Le cas des codages de rotations

Nous cherchons à présent à caractériser les codages de rotations dont l'index est fini en fonction de leur développement $\mathcal{D}$. En particulier, nous allons démontrer le résultat suivant, conjecturé dans [7] (et également au chapitre 5).

Théorème 7.3.13. *Soient U un codage de rotation de paramètres (α, β, x) et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. Alors, U a un index fini si et seulement s'il exite un entier M tel que :*
(i) $a_n \leq M$,
(ii) $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1} \Rightarrow \exists k,\ n \leq k \leq n+M-1$ *tel que* $a_k \neq 0$.

De plus, s'il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n = M$ ou $i_n = i_{n+1} = \ldots = i_{n+M-1}$ et $a_k = 0$, $n \leq k \leq n+M-1$, alors

$$M+1 \leq ind_e^*(U) \leq M+3.$$

Corollaire 7.3.14. *Tout codage de rotation contient des carrés arbitrairement longs. De plus, il existe des codages de rotations qui ne contiennent aucune puissance 4-ième arbitrairement longue.*

Afin de prouver ce résultat, nous allons bien sûr nous servir du théorème 7.3.5, mais il est également nécessaire d'utiliser les liens que nous avons déjà exhibés entre les codages de rotations et les codages d'échanges de trois intervalles. Pour cela, nous devons tout d'abord prouver le lemme suivant.

Lemme 7.3.15. *Une suite U uniformément récurrente a un index fini si et seulement si toutes ses suites dérivées ont également un index fini. Plus précisément, pour toute suite dérivée V, les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$ind_e^*(V) \leq ind_e^*(U) \leq ind_e^*(V) + 1.$$

Démonstration. Soient U une suite définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ et u un facteur de U. Alors, il existe un morphisme φ_u, appelé morphisme dérivé, tel que $\varphi_u(\mathcal{D}_u(U)) = U$, où $\mathcal{D}_u(U)$ est la suite dérivée de U en u. Ceci implique

$$\mathrm{ind}_e^*(\mathcal{D}_u(U)) \leq \mathrm{ind}_e^*(U).$$

En particulier, si U a un index fini, alors toutes ces suites dérivées ont également un index fini.

Notons à présent r le nombre de mots de retour sur u ; il existe alors des mots $v_1, v_2, \ldots, v_r$, éventuellement vides mais tous distincts, définis sur $\mathcal{A}$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} = \{1, 2, \ldots, r\} & \stackrel{\varphi_u}{\longrightarrow} & \mathcal{A} \\ i & \longmapsto & uv_i \end{array}$$

Supposons que U admette des puissances $(k+1)$-ièmes arbitrairement grandes et considérons un mot w suffisamment long tel que $w^{k-1} \in \mathcal{L}(U)$. Le fait de choisir w suffisamment long guarantit qu'il existe au moins deux occurrences de u dans w (car U est uniformément récurrente). Le mot w admet alors la décomposition suivante :

$$w = x\varphi_u(v)y,$$

où x est un suffixe strict d'image de lettre par φ_u, $v \in \mathcal{B}$ est un mot non vide, et où y est un préfixe strict d'image de lettre par φ_u. Ainsi, $w = x\left(\varphi_u(v)yx\right)^k \varphi_u(v)y$. Le fait que l'ensemble des mots de retour sur u forme un code (voir [99]) nous permet d'affirmer qu'il existe une unique lettre $i \in \mathcal{B}$ telle que $yx = \varphi_u(i)$. Il vient alors que le mot $\varphi_u((vi)^k)$ est un facteur de U et donc par définition des suites (et des morphismes) dérivés $(vi)^k$ est nécessairement facteur de $\mathcal{D}_u(U)$. On obtient finalement que $\mathrm{ind}^*_e(\mathcal{D}_u(U)) \geq \mathrm{ind}^*_e(U) - 1$ ou encore

$$\mathrm{ind}^*_e(U) \leq \mathrm{ind}^*_e(\mathcal{D}_u(U)) + 1.$$

□

Démonstration du théorème 7.3.13. Soit V le codage d'un échange de trois intervalles. Notons alors $(V_n)_{n\geq 1}$ la suites des codages des échanges d'intervalles obtenus par l'induction de Rauzy à partir de V. Alors, il existe, pour tout entier n, des substitutions σ_n telles que $\sigma_n(V_n) = V$ et donc

$$\mathrm{ind}^*_e(V_n) \leq \mathrm{ind}^*_e(V). \tag{7.7}$$

Soit U un codage de rotation caractéristique de paramètres (α, β). Au chapitre 5, nous avons déjà remarqué que si V est le codage de l'échange de trois intervalles associé à U, alors il existe un entier n tel que V_n soit une suite dérivé de U. En fait, lorsque $\alpha < 1-\beta$ la suite V est elle-même une suite dérivée de U. D'après le lemme 7.3.15 et l'égalité (7.7), il vient

$$\mathrm{ind}^*_e(V) \leq \mathrm{ind}^*_e(U) \leq \mathrm{ind}^*_e(V) + 1. \tag{7.8}$$

Le corollaire 7.3.6 permet alors de conclure. □

Remarque 7.3.16. *L'inégalité $\mathrm{ind}^*_e(U) \leq \mathrm{ind}^*_e(V) + 1$ donnée en (7.8) n'est plus vérifiée si l'on remplace ind^*_e par ind_e. En effet, lorsque $\alpha < \beta$, $U = \varphi_k(V)$ avec $k = \lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor$, φ_k étant définie en (7.1). Dans ce cas, on verifie aisément que $\mathrm{ind}_e(U) > k$, indépendamment de la valeur de $\mathrm{ind}(V)$.*

7.4 Exposant critique initial et fractions continues transcendantes

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la transcendance de nombres réels admettant un développement b-adique trop régulier. Une problématique similaire peut être envisagée avec le développement en fractions continues (voir paragraphe 0.2.7). Nous rappelons ici la condition combinatoire de transcendance obtenue dans [14], dans le cadre particulier, mais suffisant pour notre étude, des sous-shift uniquements ergodiques. Cette condition est l'analogue, pour les fractions continues, de celle de Ferenczi-Mauduit utilisée au chapitre 6.

Théorème 7.4.1 (Allouche-Davison-Queffélec-Zamboni). *Soit Θ un nombre réel non quadratique dont le développement en fractions continues est noté U. Alors, si le sous-shift engendré par U est uniquement ergodique et si $\mathrm{ice}(U) > \frac{3}{2}$, Θ est un nombre transcendant.*

La présence de puissances dans le développement en fractions continues d'un nombre réel permet donc d'en déduire sa transcendance. La grande différence avec l'étude menée au chapitre précédent est que cette fois les puissances doivent être initiales (c'est-à-dire préfixes du développement U). Ainsi, les hypothèses requises pour appliquer le théorème 7.4.1 sont beaucoup plus rigides que celles permettant d'utiliser le théorème 6.1.3. Nous allons d'ailleurs exhiber des codages de rotations et des codages d'échanges de trois intervalles ne satisfaisant pas à ces conditions.

7.4.1 Facteurs carrés initiaux

Pour montrer la transcendance des fractions continues sturmiennes et quasi-sturmiennes, les auteurs de [14] utilisent la propriété suivante, dont une démonstration peut être trouvée dans [14], [40] ou [71].

Proposition 7.4.2. *Toute suite sturmienne commence par des carrés arbitrairement longs.*

Nous allons voir, comme l'illustre la proposition 7.4.3, que cette propriété n'est pas vérifiée par tous les codages d'échanges de trois intervalles.

Proposition 7.4.3. *Soient V le codage naturel d'un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. Alors V admet un facteur carré comme préfixe si et seulement s'il existe un entier n tel que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*
(i) $a_n = i_n = 0$,
(ii) $i_n = i_{n+1} = 0$.

Afin de démontrer la proposition 7.4.3, nous suivrons une idée similaire à celle utilisée pour obtenir le théorème 7.3.5. Pour cela, nous devons tout d'abord définir trois langages sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$.

Soit $\mathcal{L}_1$ le plus grand langage, défini sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall u \in \mathcal{L}_1,\ \omega^2 \prec u \Rightarrow \omega = \varepsilon$,
(ii) $11 \notin \mathcal{L}_1$,
(iii) $\forall u \in \mathcal{L}_1,\ \omega \prec u \Rightarrow 1 \prec \omega$,
(iv) $\forall u \in \mathcal{L}_1,\ \omega 1 \omega 2 \not\prec u$.

Soit $\mathcal{L}_2$ le plus grand langage, défini sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall u \in \mathcal{L}_2,\ \omega^2 \prec u \Rightarrow \omega = \varepsilon$,
(ii) $11 \notin \mathcal{L}_2$,
(iii) $\forall u \in \mathcal{L}_2,\ \omega \prec u \Rightarrow 1 \prec \omega$.

Ces deux langages sont évidemment inclus dans le langage $\mathcal{L}$ défini sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ comme étant le plus grand langage satisfaisant à la condition :

$$\forall u \in \mathcal{L}_1,\ \omega^2 \prec u \Rightarrow \omega = \varepsilon.$$

Lemme 7.4.4. *Pour tout entier k,*

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2) \subset (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)\,.$$

Démonstration. Soit k un entier, nous rappelons que la substitution $\mathcal{F}_k$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_k & \\ 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 2^{k+1}3 \\ 3 & \longmapsto & 2^k 3 \end{array}$$

Le langage $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$ vérifie donc trivialement les assertions (ii) et (iii). Supposons qu'il existe deux mots u et w dans $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$ tels que $w1w2 \prec u$. Si $w = \varepsilon$, on obtiendrait que $12 \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$ ce qui est impossible. Si $\neq \varepsilon$, alors (iii) implique que $1 \prec w$ et donc $11 \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$, ce qui contredit (ii). L'assertion (iv) est donc vérifiée. Supposons à présent qu'il existe deux mots u et w, non vides, dans $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$ tels que $ww \prec u$. Alors, d'après (iii), on obtient $1 \prec w$, puis $w = \mathcal{F}_k(1)w'$ car $ww \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$. Ainsi, $ww = \mathcal{F}_k(1)w'\mathcal{F}_k(1)w'$, ce qui entraîne l'existence d'un mot v tel que $w = \mathcal{F}_k(1v)$. Le mot v ne peut être vide et v ne peut finir par la lettre 1 car sinon 11 appartiendrait à $\mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$. Or si $a \in \{2,3\}$, alors $\mathcal{F}_k(\omega a) \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}_2)$ implique $\omega a \in \mathcal{L}_2$, pour tout mot ω. Nous pouvons appliquer ce raisonnement au mot $1v1v$, ce qui conduit à une contradiction car $\mathcal{L}_2$ vérifie (i). □

Lemme 7.4.5. *Pour tout entier k strictement positif,*

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_2.$$

Démonstration. Soit k un entier strictement positif, nous rappelons que la substitution $\mathcal{G}_k$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_k & \\ 1 & \longmapsto & 12^k \\ 2 & \longmapsto & 12^{k+1} \\ 3 & \longmapsto & 13 \end{array}$$

Le langage $\mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$ vérifie donc trivialement les assertions (ii) et (iii). Supposons qu'il existe deux mots u et w, non vides, dans $\mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$ tels que $ww \prec u$. Alors, d'après (iii), on obtient $1 \prec w$, puis $w = \mathcal{G}_k(1)w'$ car $ww \in \mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$. Ainsi, $ww = \mathcal{G}_k(1)w'\mathcal{G}_k(1)w'$, ce qui entraîne l'existence d'un mot v tel que $w = \mathcal{G}_k(1v)$. Le mot v ne peut être vide car sinon soit 11 soit 12 appartiendrait à $\mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$. Supposons que v finisse par la lettre 1, alors il existerait un mot v' tel que $\mathcal{G}_k(1v'11v'1) \in \mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$. Ceci impliquerait que soit le mot $1v'11v'1$, soit le mot $1v'11v'2$ appartiendrait à $\mathcal{L}_1$ ce qui contredirait l'une des assertions (i) et (iv). Le mot v ne peut donc admettre 1 comme suffixe. Or, si $a \in \{2,3\}$, alors $\mathcal{G}_k(\omega a) \in \mathcal{G}_k(\mathcal{L}_1)$ implique $\omega a \in \mathcal{L}_1$, quel que soit le mot ω. Nous pouvons appliquer ce raisonement au mot $1v1v$, ce qui conduit à une contradiction car $\mathcal{L}_1$ vérifie (i). □

Démonstration de la proposition 7.4.3. Soient V le codage d'un échange de trois intervalles et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. D'après le théorème 7.3.4,

$$V = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\mathcal{F}_{a_j}^{i_j} \circ \mathcal{G}_{a_j}^{1-i_j} \right)(1) \right). \tag{7.9}$$

Considérons les deux ensembles de substitutions suivants :

$$S_1 = \{\mathcal{F}_k,\ k \geq 0\} \quad \text{et} \quad S_2 = \{\mathcal{G}_k,\ k \geq 1\}.$$

Si de plus V vérifie les hypothèse de la proposition, à savoir s'il n'existe aucun entier n tel que $a_n = i_n = 0$ ou $i_n = i_{n+1} = 0$, alors il existe une unique suite de substitutions $(\sigma_n)_{n\geq 0}$, $\sigma_n \in S_1 \cup S_2$, telle que :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_n(1), \tag{7.10}$$

avec la condition

$$\sigma_k \in S_2 \Rightarrow \sigma_{k+1} \notin S_2.$$

Les lemmes 7.4.4 et 7.4.5 impliquent que pour tout entier n

$$\sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_n(1) \in \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L},$$

ce qui montre que V n'admet aucun carré comme préfixe.

De plus, s'il existe un entier n tel que $a_n = i_n = 0$ ou $i_n = i_{n+1} = 0$, alors soit la substitution $\mathcal{G}_0$, soit la substitution $\mathcal{G}_{a_n}\mathcal{G}_{a_n+1}$ apparaît dans la composition 7.9. Les mots $\mathcal{G}_0(1)$ et $\mathcal{G}_{a_n}\mathcal{G}_{a_n+1}(1)$ admettant des carrés pour préfixes, on en déduit le résultat recherché. □

La proposition 7.4.3 permet d'obtenir rapidement les résultats suivants.

Proposition 7.4.6. *Soient V le codage naturel d'un échange d'intervalle satisfaisant à la condition I.D.O.C. et $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ le développement $\mathcal{D}$ associé. Alors V admet des facteurs carrés initiaux arbitrairement longs si et seulement s'il existe une infinité d'entiers n tels que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) $a_n = i_n = 0$,

(ii) $i_n = i_{n+1} = 0$.

Démonstration. La condition imposée sur le développement $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ est nécessaire d'après la proposition 7.4.3. En adaptant le raisonnement proposé à la fin de la preuve de la proposition 7.4.3, on obtient que cette condition est suffisante. □

Corollaire 7.4.7. *Presque tout échange de trois intervalles (au sens de la mesure de Lebesgue induite sur Λ_3) commence par des carrés arbitrairement longs.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le résultat de W. Veech rappelé dans la preuve de la proposition 7.2.1. □

Corollaire 7.4.8. *Pour presque tout paramètre $(\alpha, \beta, x) \in [0, 1[^3$, le codage de rotation associé U, vérifie $ice(U) \geq 2$.*

Démonstration. Il suffit de reprendre les arguments donnés dans la preuve de la proposition 7.2.2. □

Corollaire 7.4.9. *Soient $U = (u_n)_{n\geq 0}$ un codage de rotation caractéristique associé au développement $(a_n, i_n)_{n\geq 0}$ et $V = (v_n)_{n\geq 0}$ le codage de l'échange de trois intervalles associé à ce même développement. S'il existe une infinité d'entiers n tels que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) $a_n = i_n = 0$,

(ii) $i_n = i_{n+1} = 0$,

alors les deux réels $[0; u_0, u_1, \dots, u_n \dots]$ et $[0; v_0, v_1, \dots, v_n \dots]$ sont transcendants.

Démonstration. Le résultat découle directement du corollaire 7.4.7 et du théorème 7.4.1. □

7.4.2 Mots sans puissance initiale

Le but de ce paragraphe est d'exhiber des codages de rotations (et des codages d'échanges de trois intervalles) pour lesquels on ne peut pas appliquer le théorème 7.4.1. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 7.4.10. *Il existe un nombre non dénombrable de codages de rotations U vérifiant $ice(U) = 1$.*

Afin de prouver ce théorème, considérons $(l_n)_{n\geq 0}$ et $(k_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers strictement positifs. La substitution $\sigma_n = \mathcal{G}_{l_n} \circ \mathcal{F}_0^{k_n}$ est alors définie sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ par :

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_n & \\ 1 & \longmapsto & 12^{l_n}(13)^{k_n} \\ 2 & \longmapsto & 12^{l_n+1}(13)^{k_n} \\ 3 & \longmapsto & 13. \end{array}$$

Posons alors $\psi_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sigma_k$, où $\prod$ désigne la composition des substitutions de gauche à droite. Notre but est d'étudier l'exposant critique initial de la suite $V = \lim_{n\to\infty} \psi_n(1)$. Dans la suite, nous noterons $V_{(l)} = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=l}^{n-1} \sigma_k\right)(1)$, de sorte que $\psi_l(V_{(l)}) = V$. Remarquons également que pour tout choix de suites $(l_n)_{n\geq 0}$ et $(k_n)_{n\geq 0}$, la suite V est le codage naturel d'un échange de trois intervalles.

Remarque 7.4.11. *Par définition de σ_n, si $\psi_n(w) \prec V$ alors $w \prec V_{(n)}$.*

Définition 7.4.12. *Soit k un entier strictement positif. Le préfixe de longueur k de la suite V, noté V_k (ne pas confondre avec $V_{(k)}$), est appelé puissance initiale optimale s'il admet la décomposition suivante :*
$\exists (u, w) \in \{1, 2, 3\}^*$, $\exists (a, b) \in \{1, 2, 3\}^2$, $a \neq b$ tel que
(i) $V_k = uawu$,
(ii) $V_{k+1} = V_k b$,
(iii) $ice(V_k) = 1 + \frac{|u|}{|uaw|}$.

Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que

$$\{V_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\} = \{v,\ v \text{ puissance initiale optimale de } V\}$$

et donc telle que

$$\text{ice}(V) = \sup_{k\to\infty} \text{ice}(V_{n_k}). \tag{7.11}$$

Lemme 7.4.13. *Soit k un entier tel que V_k admette la décomposition suivante : $\exists (u, w) \in \{1, 2, 3\}^*$, $\exists (a, b) \in \{1, 2, 3\}^2$, $a \neq b$ telle que*
(i) $V_k = uawu$,
(ii) $V_{k+1} = V_k b$.
Alors, soit $a = 1$ et $b = 2$, soit $a = 2$ et $b = 3$.

Démonstration. Les cas $(a = 1, b = 3)$ et $(a = 3, b = 1)$ sont clairement à éliminer puisque $11 \notin \mathcal{L}(V)$.

Supposons que $a = 2$ et $b = 1$. Il suit alors que v est nécessairement non vide, commence par la lettre 1 et admet 12^{l_0} comme suffixe. Ceci entraîne donc l'existence de u_1 tel que $u = \sigma_1(u_1)12^{l_0}$ et de w_1 tel que $w = 2(13)^{k_0}\sigma_1(w_1)$. Ainsi, $V_k = \sigma_1(u_1 2 w_1 u_1)$ et donc d'après la remarque 7.4.11, $u_1 2 w_1 u_1$ serait un préfixe de $V_{(1)}$ vérifiant les hypothèses requises pour V_k et de longueur strictement inférieure ; en itérant ce procédé on aboutit finalement à une contradiction.

Le cas où $a = 3$ et $b = 2$ est similaire. □

Lemme 7.4.14. *Soit k un entier tel que V_k vérifie les hypothèses du lemme 7.4.13. Si $a = 1$ et $b = 2$ alors $\exists\, n \in \mathbb{N}$ et $m \in \{1, 2, 3\}^*$ tels que :*
(i) $3(13)^{k_n - 1} \prec m$,
(ii) $u = \psi_n(12^{l_n})\psi_{n-1}(12^{l_{n-1}}) \dots \psi_1(12^{l_1})12^{l_0}$,
(iii) $w = 3(13)^{k_0 - 1}\psi_1(3(13)^{k_1 - 1}) \dots \psi_{n-1}(3(13)^{k_{n-1} - 1})\psi_n(m)$.

Démonstration. Si $a = 1$ et $b = 2$, alors il suit que nécessairement 12^{l_0} est suffixe de u et $3(13)^{k_0-1}$ est préfixe de w. Ceci entraîne l'existence d'un mot u_1 tel que $u = \psi_1(u_1)12^{l_0}$ et d'un mot w_1 tel que $w = 3(13)^{k_0-1}\sigma(w_1)$. On obtient de plus que $V_k = \psi_1(u_1 1 w_1 u_1)12^{l_0}$ et donc que $\psi_1(u_1 1 w_1 u_1)12^{l_0}2 \prec U$. Ainsi, d'après la remarque 7.4.11, $u_1 1 w_1 v_1 2 \prec V$ et $|u_1| < |u|$. On peut donc itérer ce procédé jusqu'à ce que la longueur de u_n soit minimale, c'est-à-dire $u_n = 12^l$. On obtient alors le résultat recherché avec $m = w_n$. □

Lemme 7.4.15. *Soit k un entier tel que V_k vérifie les hypothèses du lemme 7.4.13. Si $a = 2$ et $b = 3$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ et $m \in \{1, 2, 3\}^*$ tels que :*
(i) $2^{l_n - 1} \prec m$,
(ii) $u = \psi_n(1)\psi_{n-1}(1) \dots \psi_1(1)1$,
(iii) $w = 2^{l_0}(13)^{k_0}\psi_1(2^{l_1}(13)^{k_1}) \dots \psi_{n-1}(2^{l_{n-1}}(13)^{k_{n-1}})\psi_n(m)$.

Démonstration. Si $a = 2$ et $b = 3$, alors il suit que nécessairement 1 est suffixe de u et 2^{l_0-1} est préfixe de w (puisque 1 est également préfixe de u). Ceci entraîne l'existence d'un mot u_1 tel que $u = \psi_1(u_1)1$. Si de plus u_1 est non vide, c'est-à-dire si $u \neq 1$, alors il existe un mot w_1 tel que soit $w = 2^{l_0-1}(13)^{k_0}\psi_1(w_1)$, soit $w = 2^{l_0}(13)^{k_0}\psi_1(w_1)$.

Dans le premier cas, on aurait $V_k = \psi_1(u_1 1 w_1 u_1)1$, ce qui impliquerait que $V_{k+1} = \psi_1(u_1 1 w_1 u_1 3)$ (car par hypothèse $V_{k+1} = V_k 3$) et donc d'après la remarque 7.4.11, on aurait $u_1 1 w_1 u_1 3 \prec V$. Ceci est impossible puisque $11 \notin \mathcal{L}(V)$.

Il vient donc $w = 2^{l_0}(13)^{k_0}\psi_1(w_1)$ et ainsi $V_k = \psi_1(u_1 2 w_1 u_1)1$. Comme $V_{k+1} = V_k 3$, il vient $u_1 2 w_1 u_1 3 \prec V$ avec $|u_1| < |u|$. On peut alors itérer ce procédé jusqu'à ce que la longueur de u_n soit minimale, c'est-à-dire $u_n = 1$, d'où le résultat avec $m = w_n$. □

Lemme 7.4.16. *Pour tout entier n, posons :*

$$\begin{aligned}
u_{1,n} &= \psi_n(12^{l_n})\psi_{n-1}(12^{l_{n-1}}) \dots \psi_1(12^{l_1})12^{l_0},\\
w_{1,n} &= 3(13)^{k_0-1}\psi_1(3(13)^{k_1-1}) \dots \psi_n(3(13)^{k_n-1}),\\
u_{2,n} &= \psi_n(1)\psi_{n-1}(1) \dots \psi_1(1)1 \textit{ et}\\
w_{2,n} &= 2^{l_0}(13)^{k_0}\psi_1(2^{l_1}(13)^{k_1}) \dots \psi_n(2^{l_n-1}).
\end{aligned}$$

Alors, $u_{1,n}1w_{1,n}u_{1,n} \prec V$ et $u_{2,n}2w_{2,n}u_{2,n} \prec V$.

Démonstration. (i) Une récurrence immédiate montre que pour tout entier n,

$$u_{1,n}1w_{1,n} = \psi_{n+1}(1) \text{ et } u_{1,n} \prec \psi_{n+1}(2).$$

Ainsi,

$$u_{1,n}1w_{1,n}u_{1,n} \prec \psi_{n+1}(12) \prec V.$$

(ii) De même que précédemment, une récurrence immédiate montre que pour tout entier n,

$$u_{2,n}2w_{2,n} = \psi_n(12^{l_n}) \text{ et } u_{2,n} \prec \psi_n(13).$$

Ainsi,

$$u_{2,n}2w_{2,n}v_{2,n} \prec \psi_{n+1}(12^{l_n}13) \prec V.$$

□

Lemme 7.4.17. *Considérons les suites* $(e_{1,n})_{n\geq 0}$ *et* $(e_{2,n})_{n\geq 0}$ *définies respectivement par :*

$$e_{1,n} = 1 + \frac{|u_{1,n}|}{|v_{1,n}1w_{1,n}|},$$

et

$$e_{2,n} = 1 + \frac{|u_{2,n}|}{|u_{2,n}2w_{2,n}|}.$$

Alors,

$$ice(V) = \max\left\{\limsup_{n\to\infty} e_{1,n},\ \limsup_{n\to\infty} e_{2,n}\right\}.$$

Démonstration. D'après les lemmes 7.4.13, 7.4.14, 7.4.15 et l'égalité 7.11 :

$$\text{ice}(V) \leq \max\left\{\limsup_{n\to\infty} e_{1,n},\ \limsup_{n\to\infty} e_{2,n}\right\}.$$

De plus, le lemme 7.4.16 implique

$$\text{ice}(V) \geq \max\left\{\limsup_{n\to\infty} e_{1,n},\ \limsup_{n\to\infty} e_{2,n}\right\},$$

ce qui achève la preuve. □

Démonstration du théorème 7.4.10. Nous rappelons tout d'abord que pour tout entier n,

$$|\psi_n(13)| \geq |\psi_n(2)| \geq |\psi_n(1)|.$$

Comme $l_n|\psi_n(2)| \leq |\psi_n(12^{l_n})| \leq (l_n+1)|\psi_n(2)|$ et $|\psi_n(3(13)^{k_n-1})| \geq (k_n-1)|\psi_n(2)|$, il vient :

$$\limsup_{n\to\infty} (e_{1,n}) \leq 1 + \frac{\sum_{j=0}^{n}(l_j+1)}{\sum_{j=0}^{n}(l_j+k_j-1)}.$$

Et comme $|\psi_n(2^{l_n}(13)^{k_n})| \geq |\psi_n(2^{l_n-1})| \geq (l_n-1)|\psi_n(2)|$, il vient :

$$\limsup_{n\to\infty} (e_{2,n}) \leq 1 + \frac{n}{\sum_{j=0}^{n}(l_j-1)}.$$

Ainsi, si les suites $(l_n)_{n\geq 0}$ et $(k_n)_{n\geq 0}$ sont choisies telles que $l_n = o(k_n)$, le lemme 7.4.17 implique $\text{ice}(V) = 1$. On obtient donc l'existence d'un nombre non dénombrable de codages d'échanges de trois intervalles ayant un exposant critique minimal.

Considérons à présent une telle suite V. Alors, pour tout entier m, la suite $U = \varphi_m(V)$ est un codage de rotation, φ_m désignant le morphisme de l'équation (7.1). Si m est choisi strictement positif, alors on vérifie que $\text{ice}(V) = 1$ implique $\text{ice}(U) = 1$, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 7.4.18. *Si les suites $(l_n)_{n\geq 0}$ et $(k_n)_{n\geq 0}$ sont choisies constantes (respectivement égales à l et k), alors on obtient des codages dont les paramètres appartiennent à un même corps quadratique et que l'on peut donc calculer explicitement. Dans ce cas, on a toujours $\text{ice}(U) > 1$, mais en choisissant l suffisament grand et k grand devant l, on obtient quand même des codages de rotations explicites avec un exposant critique initial inférieur strictement à $\frac{3}{2}$ et donc pour lesquels on ne peut appliquer le théorème 7.4.1. Par exemple, en utilisant l'algorithme présenté dans l'appendice B, on montre que le codage de rotation caractéristique U associé au couple de paramètres quadratiques*

$$\left(\alpha = \frac{785 - \sqrt{25277}}{1882}\ ,\ \beta = \frac{1037}{1882} + \frac{169\sqrt{25277}}{295474}\right),$$

admet le développement $\mathcal{D}$ périodique suivant : $\overline{(12,0)(0,1)^{145}}$. En reprenant le raisonnement de la preuve du théorème 7.4.10, on montre que U vérifie $\text{ice}(U) < \frac{3}{2}$. Le théorème 7.4.1 ne peut donc être appliqué à U.

Appendice A

Nous récapitulons dans cet appendice quelques éléments de comparaisons entre codages de rotations sturmiens, quasi-sturmiens et non dégénérés (c'est-à-dire, pour lesquels $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha \mod 1$). Nous avons choisi de présenter ces éléments sous forme d'un tableau afin d'obtenir un bilan synthétique. Les propriétés qui sont évoquées ici de façon compacte et abrégée, ont toutes été clairement définies auparavant.

La première partie du tableau est consacrée aux propriétés communes de ces trois classes de codages. Dans la seconde partie du tableau, nous mettons en évidence plusieurs points de divergence qui conduisent à penser que si codages sturmiens et quasi-sturmiens sont très proches, les codages non dégénérés ont eux une nature combinatoire, arithmétique et dynamique qui leur est réellement propre.

	Codages sturmiens	**Quasi-sturmiens**	**Non dégénérés**
Points communs			
Dynamique :	expression S-adique explicite	idem	idem
Codages caractéristiques : (substitutifs)	α quadratique	idem	α quadratique $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$
Index :	infini presque sûrement	idem	idem
Exposant critique : initial	infini presque sûrement	idem	idem
Transcendance en base entière :	oui	oui	oui
Transcendance des fractions continues :	oui	oui	?
Divergences			
Complexité :	$p(n) = n + 1$ caractérise ces suites	$p(n) \leq n + k$ ne les caractérise pas	$p(n) = 2n$, $n \geq n_0$ ne les caractérise pas
Dynamique :	échanges de 2 intervalles	échanges de 3 intervalles non I.D.O.C.	échanges de 3 intervalles I.D.O.C
Équilibre :	équilibrés	C-équilibrés	totalement déséquilibrés
Discrépance :	bornée	bornée	non bornée
Linéaire récurrence :	LR $\iff$ index fini	LR $\iff$ index fini	LR $\not\Leftarrow$ index fini
Puissances initiales :	carrés arbitrairement longs	carrés arbitrairement longs	$\exists\, U$ telle que $ice(U) = 1$

Appendice B

Nous donnons dans cet appendice plusieurs programmes écrits en langage MUPAD et destinés à la vérification de critères algorithmiques introduits au cours de cette thèse.

Programme 1 Ce premier programme calcul simplement le $\mathcal{D}$-développement associé à un couple $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$.

```
//Donnée des paramètres
print(alpha) ; alpha :=(sqrt(5)-1)/2 ;
print(beta) ;Beta :=(sqrt(5)+5)/10 ;
//Initialisation du développement
nbredetours :=[] : branchement :=[] :
//Calcul de la partie entière
partent :=0 :
    while partent¡=(float(expr(1-Beta)/expr(alpha))) do
        partent :=partent+1 :
    end_while :
print(partie_entiere); partent := partent - 1;
//Calcul des coordonnées de l'échange de trois intervalles associé
vectd :=Dom : :Matrix(Dom : :Complex)([[(Beta-alpha)/Beta],[(1-partent*alpha-Beta)/Beta],
[(Beta+(partent+1)*alpha-1)/Beta]]) :
//Calcul des 10 premiers termes du développement
vect :=vectd : r :=1 :
    while r¡=10 do
    if float(expr(vect[1])) ¿ float(expr(vect[3])) then
        k :=0 :
        while k¡=(float(expr(vect[2])/expr(vect[1]-vect[3]))) do k :=k+1 : end_while :
        k :=k-1 :
        vect1 :=vect[1] :
        vect[1] :=-vect[2]+(k+1)*(vect[1]-vect[3]) :
        vect[2] :=vect[2]-k*(vect1-vect[3]) :
        vect[3] :=vect[3] :
        somme :=vect[1]+vect[2]+vect[3] :
        for i from 1 to 3 do vect[i] :=vect[i]/(somme) : end_for :
        nbredetours :=nbredetours.[k] :
        branchement :=branchement.[1] :
        else
          k :=0 :
          while k¡=(float(expr(vect[2])/expr(vect[3]-vect[1]))) do k :=k+1 : end_while :
          k :=k-1 :
          vect2 :=vect[2] :
          vect[1] :=vect[1] :
          vect[2] :=vect[2]-k*(vect[3]-vect[1]) :
          vect[3] :=-vect2+(k+1)*(vect[3]-vect[1]) :
          somme :=vect[1]+vect[2]+vect[3] :
          for i from 1 to 3 do vect[i] :=vect[i]/(somme) : end_for :
          nbredetours :=nbredetours.[k] : branchement :=branchement.[0] :
    end_if :
    r :=r+1 :
    end_while :
//Affichage du développement
    print(tours) ; nbredetours ; print(branche) ; branchement ;
```

Programme 2 Étant donné un développement $\mathcal{D}$ ultimement périodique (sous forme d'un produit de matrices) et un entier k, ce programme calcul l'unique couple de paramètres admissibles (α, β) admettant ce développement et tel que $\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor = k$.

```
//CHEMIN PERIODIQUE D'INDUCTION
//Définition des matrices d'induction
A1 := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,0],[1,0,1]] ) :
A2 := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,1],[0,0,1]] ) :
A3 := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,0],[0,1,1]] ) :
A4 := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,1,0],[0,0,1],[0,1,0]] ) :
A5 := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]] ) :
print("Partie non périodique") ; NP := :
print("Partie périodique") ; P := :
print("partie entière") ; part := ;
//Calcul des coordonées de l'échange d'intervalles auto-induit
linalg : :charpoly(P,x) :
RES :=linalg : :eigenvectors(P) :
Max :=max(float(expr(RES[1][1])),float(expr(RES[2][1])),float(expr(RES[3][1]))) :
    for i from 1 to 3 do
      if float(expr(RES[i][1]))=Max then
        Valp :=RES[i][1] ;
        Vectp :=RES[i][3][1] ;
      end_if :
    end_for :
print("Coordonnées de l'échange auto-induit") ; Vectp ;
print("Coordonnées de l'échange initial") ;NP*Vectp ;
Vectinit :=NP*Vectp :
print("Alpha") ;
Alpha :=simplify(expr((Vectinit[2]+Vectinit[3])/(Vectinit[1]+(part+2)*Vectinit[2] +(part+1)*Vectinit[3])),sqrt) ;
print("Beta") ;
Beta :=simplify(expr((Vectinit[1]+Vectinit[2]+Vectinit[3])/(Vectinit[1]+(part+2)*
Vectinit[2]+(part+1)*Vectinit[3])),sqrt) ;
```

Programme 3 Étant donné un couple de paramètres admissibles (α, β), appartenant à un même corps qudratique. Le développement $\mathcal{D}$ associé est alors ultimement périodique. Les données d'entrée sont (α, β) et le développement $\mathcal{D}$ (sous forme de deux produits de matrices, partie périodique et partie non périodique). Ce programme calcul alors les quantités

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n},$$

introduites aux chapitre 2. Il indique de plus si l'intezrvalle $[0, \beta[$ est à restes majorés ou minorés pour la suite $(n\alpha)_{n\geq 0}$. Ce programme comprend plusieurs procédure, toute appelées par la procédure finale.

```
non_periodique :=proc(k,chemin)
local phi,sigma,i,rg,tau,tau_1, j;
begin
    sigma :=array(1..4) :
    for i from 1 to 4 do sigma[i] :=array(1..3) ; end_for :
    sigma[1] :=[[1,3],[2],[3]] ;
    sigma[2] :=[[1],[2],[2,3]] ;
    sigma[3] :=[[1],[2,3],[3]] ;
    sigma[4] :=[[1],[1,3],[2]] ;
    rg :=nops(chemin) :
    if rg=0 then tau :=[[1],[2],[3]] ;
      else
      tau :=sigma[chemin[rg]] ; rg :=rg-1 :
      while rg¿0 do
        for i from 1 to 3 do
        tau_1[i] :=[] ;
          for j from 1 to nops(tau[i]) do
```

```
          tau_1[i] :=tau_1[i].sigma[chemin[rg]][tau[i][j]];
        end_for :
      end_for :
      tau :=tau_1 : rg :=rg-1;
    end_while :
  end_if;
  phi[1] :=[1]; phi[2] :=[1,2]; phi[3] :=[1];
  for i from 1 to k do
    for j from 2 to 3 do phi[j] :=phi[j].[2]; end_for;
  end_for;
  for i from 1 to 3 do
    tau_1[i] :=[]; for j from 1 to nops(tau[i]) do tau_1[i] :=tau_1[i].phi[tau[i][j]]; end_for :
  end_for :
  phi :=tau_1 : return(phi);
end_proc :
```

```
periodique :=proc(chemin)
local sigma,i,rg,tau,j;
begin
  sigma :=array(1..4) :
  for i from 1 to 4 do sigma[i] :=array(1..3); end_for :
  sigma[1] :=[[1,3],[2],[3]];
  sigma[2] :=[[1],[2],[2,3]];
  sigma[3] :=[[1],[2,3],[3]];
  sigma[4] :=[[1],[1,3],[2]];
  rg :=nops(chemin) :
  tau :=sigma[chemin[rg]];
  rg :=rg-1 :
  while rg¿0 do
    for i from 1 to 3 do
      tau_1[i] :=[];
      for j from 1 to nops(tau[i]) do
        tau_1[i] :=tau_1[i].sigma[chemin[rg]][tau[i][j]];
      end_for :
    end_for :
    tau :=tau_1 :
    rg :=rg-1;
  end_while :
  return(tau);
end_proc :
```

```
poids1 :=proc(beta,phi)
local i,poids,j;
begin
  for i from 1 to 3 do
    poids[i] :=0;
    for j from 1 to nops(phi[i]) do
      if phi[i][j]=1 then
        poids[i] :=poids[i]+1;
        else
        poids[i] :=poids[i]-(beta/(1-beta));
      end_if;
    end_for;
  end_for;
  return(poids);
end_proc :
```

```
prefixes :=proc(sigma)
local i,pref,j;
begin
  for i from 1 to 3 do
```

```
        pref[i][1] :=[] ;
        for j from 1 to nops(sigma[i]) do
          pref[i][j+1] :=pref[i][j].[sigma[i][j]];
        end_for ;
      end_for ;
      return(pref) ;
end_proc :



automate :=proc(pref)
local i,j,k,l,m ;
begin
      for i from 1 to 3 do
      for j from 1 to 3 do
        autom[i][j] :=[] ;
        for k from 2 to nops(pref[i]) do
          if pref[i][k][nops(pref[i][k])]=j then
            m :=[] ;
            for l from 1 to nops(pref[i][k])-1 do
              m :=m.[pref[i][k][l]];
            end_for ;
            autom[i][j] :=[op(autom[i][j]),m] ;
          end_if ;
        end_for ;
      end_for ;
      end_for ;
      return(autom) ;
end_proc :



matrice :=proc(chemin)
local A,i,rg,mat ;
begin
      A :=array(1..4) :
      for i from 1 to 4 do A[i] :=Dom : :Matrix(Dom : :Complex ) ;
      end_for :
      A[1] := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,0],[1,0,1]] ) :
      A[2] := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,1],[0,0,1]] ) :
      A[3] := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,0],[0,1,1]] ) :
      A[4] := Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,1,0],[0,0,1],[0,1,0]] ) :
      rg :=nops(chemin) :
      mat :=Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]] ) :
      for i from 1 to rg do
        mat :=mat*A[chemin[i]];
      end_for ;
      return(mat) ;
end_proc :


poids2 :=proc(mat,p1)
local valp,vald,valmin,Max,Min,i,M,j,cond_init, lambda, poids;
begin
      valp :=linalg : :eigenvalues(mat) :
      Max :=max(float(expr(valp[1])),float(expr(valp[2])),float(expr(valp[3]))) :
      for i from 1 to 3 do
        if float(expr(valp[i]))=Max then
          vald :=valp[i] ;
        end_if :
      end_for :
      Min :=min(float(expr(valp[1])),float(expr(valp[2])),float(expr(valp[3]))) :
      for i from 1 to 3 do
        if float(expr(valp[i]))=Min then
          valmin :=valp[i] ;
        end_if :
      end_for :
      M :=Dom : :Matrix(Dom : :Complex )( [[1,1,1],[vald,1,valmin],[vald^2, 1, valmin^2]]);
```

```
      cond_init := Dom : :Matrix(Dom : :Complex ) :
      for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do
         cond_init[i,j] :=[(mat^0)[i,j],mat[i,j],(mat^2)[i,j]] :
      end_for : end_for :
      for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do
         lambda[i,j] :=simplify(expr((M^(-1)*cond_init[i,j])[2]),sqrt);
      end_for : end_for :
      for j from 1 to 3 do
         poids[j] :=0 ;
      for i from 1 to 3 do
         poids[j] :=poids[j]+p1[i]*lambda[i,j] ;
      end_for ;
      end_for ;
      return(poids,vald) ;
end_proc :



boucle :=proc(autom,p2)
local M,m,i,j,k,M1,min1,min2,min3,max1,max2,max3,l;
begin
      M :=0 : m :=0 :
      for i from 1 to 3 do
         for j from 1 to nops(autom[i][i]) do
         M1 :=0 ;
           for k from 1 to nops(autom[i][i][j]) do
             M1 :=M1+p2[autom[i][i][j][k]];
           end_for :
           if float(expr(M))=max(float(expr(M)),float(expr(M1)))
             then M :=M ; else M :=M1 ;
           end_if :
           if float(expr(M))=min(float(expr(M)),float(expr(M1)))
             then M :=M ; else m :=M1 ;
           end_if :
         end_for :
      end_for :
      for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do
      min1 :=infinity ;max1 :=-1*infinity ;
         for k from 1 to nops(autom[i][j]) do
         M1 :=0 ;
           for l from 1 to nops(autom[i][j][k]) do
             M1 :=M1+p2[autom[i][j][k][l]];
           end_for ;
           if float(expr(max1))=max(float(expr(max1)), float(expr(M1)))
             then max1 :=max1 ; else max1 :=M1 ;
           end_if :
           if float(expr(min1))=min(float(expr(min1)), float(expr(M1)))
             then min1 :=min1 ; else min1 :=M1 ;
           end_if :
         end_for ;
         min2 :=infinity ;max2 :=-1*infinity ;
         for k from 1 to nops(autom[j][i]) do
         M1 :=0 ;
           for l from 1 to nops(autom[j][i][k]) do
             M1 :=M1+p2[autom[j][i][k][l]];
           end_for ;
           if float(expr(max2))=max(float(expr(max2)), float(expr(M1)))
             then max2 :=max2 ; else max2 :=M1 ;
           end_if :
           if float(expr(min2))=min(float(expr(min2)), float(expr(M1)))
             then min2 :=min else min2 :=M1 ;
           end_if :
         end_for ;
         M :=max((max1+max2)/2,M) ; m :=min((min1+min2)/2) ;
      end_for ; end_for ;
      max1 :=-1*infinity ;min1 :=infinity ;
      for i from 1 to nops(autom[1][2]) do
```

```
M1 :=0 ;
   for j from 1 to nops(autom[1][2][i]) do
     M1 :=M1+p2[autom[1][2][i][j]] ;
   end_for ;
   if float(expr(max1))=max(float(expr(max1)),float(expr(M1)))
     then max1 :=max1 ; else max1 :=M1 ;
   end_if :
   if float(expr(min1))=min(float(expr(min1)),float(expr(M1)))
     then min1 :=min1 ; else min1 :=M1 ;
   end_if :
end_for;
max2 :=-1*infinity ;min2 :=infinity ;
for i from 1 to nops(autom[2][3]) do
M1 :=0 ;
   for j from 1 to nops(autom[2][3][i]) do
     M1 :=M1+p2[autom[2][3][i][j]] ;
   end_for ;
   if float(expr(max2))=max(float(expr(max2)),float(expr(M1)))
     then max2 :=max2 ; else max2 :=M1 ;
   end_if :
   if float(expr(min2))=min(float(expr(min2)),float(expr(M1)))
     then min2 :=min2 ; else min2 :=M1 ;
   end_if :
end_for ;
max3 :=-1*infinity ;min3 :=infinity ;
for i from 1 to nops(autom[3][1]) do
M1 :=0 ;
   for j from 1 to nops(autom[3][1][i]) do
     M1 :=M1+p2[autom[3][1][i][j]] ;
   end_for ;
   if float(expr(max3))=max(float(expr(max3)),float(expr(M1)))
     then max3 :=max3 ; else max3 :=M1 ;
   end_if :
   if float(expr(min3))=min(float(expr(min3)),float(expr(M1)))
     then min3 :=min3 ; else min3 :=M1 ;
   end_if :
end_for ;
M :=max(M,(max1+max2+max3)/3) ; m :=min(m,(min1+min2+min3)/3) ; max1 :=-1*infinity ;min1 :=infinity ;
for i from 1 to nops(autom[2][1]) do
M1 :=0 ;
   for j from 1 to nops(autom[2][1][i]) do
     M1 :=M1+p2[autom[2][1][i][j]] ;
   end_for ;
   if float(expr(max1))=max(float(expr(max1)),float(expr(M1)))
     then max1 :=max1 ; else max1 :=M1 ;
   end_if :
   if float(expr(min1))=min(float(expr(min1)),float(expr(M1)))
     then min1 :=min1 ; else min1 :=M1 ;
   end_if :
end_for ;
max2 :=-1*infinity ;min2 :=infinity ;
for i from 1 to nops(autom[3][2]) do
M1 :=0 ;
   for j from 1 to nops(autom[3][2][i]) do
     M1 :=M1+p2[autom[3][2][i][j]] ;
   end_for ;
   if float(expr(max2))=max(float(expr(max2)),float(expr(M1)))
     then max2 :=max2 ; else max2 :=M1 ;
   end_if :
   if float(expr(min2))=min(float(expr(min2)),float(expr(M1)))
     then min2 :=min2 ; else min2 :=M1 ;
   end_if :
end_for ;
max3 :=-1*infinity ;min3 :=infinity ;
for i from 1 to nops(autom[1][3]) do
M1 :=0 ;
   for j from 1 to nops(autom[1][3][i]) do
```

```
          M1 :=M1+p2[autom[1][3][i][j]];
        end_for;
        if float(expr(max3))=max(float(expr(max3)),float(expr(M1)))
          then max3 :=max3; else max3 :=M1;
        end_if :
        if float(expr(min3))=min(float(expr(min3)),float(expr(M1)))
          then min3 :=min3; else min3 :=M1;
        end_if :
      end_for;
      M :=simplify(max(M,(max1+max2+max3)/3)); m :=simplify(min(m,(min1+min2+min3)/3));
      return(M,m);
end_proc :
```

```
final :=proc(alpha,beta,chemin1,chemin2)
local k,phi;
begin
      print("alpha"= alpha); print("beta"= beta);
      k :=0 :
      while k¡=(float(expr(1-beta)/expr(alpha))) do k :=k+1 : end_while :
      k :=k-1;
      phi :=non_periodique(k,chemin1);
      sigma :=periodique(chemin2);
      p1 :=poids1(beta,phi);
      pref :=prefixes(sigma);
      auto :=automate(pref);
      mat :=matrice(chemin2);
      p2 :=poids2(mat,p1)[1];
      fin :=boucle(auto,p2);
      limsup :=simplify(expr((1-beta)*fin[1]/ln(poids2(mat,p1)[2])),sqrt);
      liminf :=simplify(expr((1-beta)*fin[2]/ln(poids2(mat,p1)[2])),sqrt);
      print("limsup"=simplify(expr(limsup),sqrt));
      if limsup=0 then
        print("l'intervalle est à restes majorés");
      end_if;
      print("liminf"=simplify(expr(liminf),sqrt));
      if liminf=0 then
        print("l'intervalle est à restes minorés");
      end_if;
end_proc :
```

Programme 4 Étant donné une substitution σ, ce programme vérifie dans un premier temps si σ est primitive et si $\theta_2 = 1$. Il calcul ensuite la constante A_σ intervenant dans les théorèmes 3.1.3 et 4.2.1. Il permet ainsi de savoir si une substitution est "dégénérée" ou non. Là encore, ce programme est composé de plusieurs procédures qui sont appelées dans la procédure finale.

```
matrice :=proc(sigma,d)
local M,i,j,k,l,m;
begin
      M :=matrix(d,d,0);
      for k from 1 to d do
      for i from 1 to d do
        M[i,k] :=0;
        for j from 1 to nops(sigma[k]) do
          if sigma[k][j]=i then M[i,k] :=M[i,k]+1;
          end_if;
        end_for;
      end_for;
      end_for;
      return(M);
end_proc :
```

```
positive :=proc(M,d)
local i,j ;
begin
    for i from 1 to d do for j from 1 to d do
      if M[i,j]¡=0 then return(FALSE) ; end_if ;
    end_for ; end_for ;
    return(TRUE) ;
end_proc :
```

```
primitive :=proc(M,d)
local k ;
begin
    for k from 1 to 10 do
      if positive(M^k, d)thenreturn(TRUE);end_if;
    end_for ;
    return(false) ;
end_proc :
```

```
admissible :=proc(M,d)
local racd,racu,valp,valpn,i ;
begin
    racd :=0 ; racu :=0 ;
    valp :=linalg : :eigenvalues(M) : valpn :=numeric : :eigenvalues(M) :
    for i from 1 to nops(valp) do
      if abs(valpn[i])¿1.0 then racd :=racd+1 ; end_if ;
      if simplify(expr(valp[i]))=1 then racu :=racu+1 ; end_if ;
    end_for ;
    if racu=1 then else return(FALSE) ; end_if ;
    if racd=1 then return (TRUE) else return(FALSE) ; end_if ;
end_proc :
```

```
ortho :=proc(M,d)
local theta,i,vectp,lambda,lambda2,f ;
begin
    vectp :=numeric : :eigenvectors(M) ; theta :=0 ;
    for i from 1 to nops(vectp[1]) do
      if abs(vectp[1][i])¿abs(theta)
        then theta :=vectp[1][i] ;m :=i ;
      end_if ;
      if abs(vectp[1][i]-1)¡0.0000001 then
        for k from 1 to d do lambda2[k] :=vectp[2][k,i] ; end_for ;
      end_if ;
    end_for ;
    for i from 1 to d-1 do for j from 1 to d do
      if i=j then f[i][j] :=1 ; else f[i][j] :=vectp[2][i,m]/(vectp[2][i,m]-1) ;
      end_if ;
    end_for ; end_for ;
    return(f) ;
end_proc :
```

```
isnotin :=proc(j,mot)
local i ;
begin
    for i from 1 to nops(mot) do
      if j=mot[i] then return(FALSE) ; end_if ;
    end_for ;
    return(TRUE) ;
end_proc :
```

```
ordonne :=proc(M)
local valp1,valp,i,j ;
begin
      valp1 :=numeric : :eigenvectors(M) ; valp[1] :=0 ;
      for i from 1 to nops (valp1[1]) do
         valp[1] :=simplify(max(abs(valp[1]),abs(valp1[1][i]))) ;
         tab :=[i] ;
      end_for ;
      for i from 2 to nops(valp1[1]) do
         valp[i] :=0 ;
      for j from 1 to nops(valp1[1]) do
         if isnotin(j,tab) then
           if abs(valp1[1][j])-abs(valp[i-1])¡0.0000001 then
             if abs(valp1[1][j])¿abs(valp[i]) then valp[i] :=valp1[1][j] ; end_if ;
           end_if ;
         end_if ;
      end_for ;
      for j from 1 to nops(valp1[1]) do
         if valp[i]=valp1[1][j] then tab :=tab.[j] ; end_if ;
      end_for ;
      end_for ;
      return(valp) ;
end_proc :
```

```
mat_inv :=proc(M,valp,d)
local m,i,mat,tab,k,j,mult,nvalp ;
begin
      m :=0 ;
      for i from 1 to nops(valp) do
         if abs(valp[i])¡0.00000001 then m :=m+1 ; end_if
      end_for ;
      mat :=matrix(nops(valp)-m,nops(valp)-m,0) ; tab :=[] ; k :=0 ;
      for i from 1 to nops(valp)-m do
         if isnotin(i,tab) then
           k :=k+1 ; mult[k] :=0 ;
           for j from 1 to nops(valp)-m do
             if isnotin(j,tab) then
               if abs(valp[i]-valp[j])¡0.0000001 then
                 mult[k] :=mult[k]+1 ; nvalp[k] :=valp[i] ; tab :=tab.[i,j] ;
               end_if ;
             end_if ;
           end_for ;
         end_if ;
      end_for ;
      k :=0 ;
      for i from 1 to nops(nvalp) do for j from 1 to mult[i] do
           mat[1,j+k] :=((1+m)^(j − 1)) ∗ valp[i]^(1 + m − 1); k := k + 1;
         end_for ; end_for ;
      for l from 2 to nops(valp)-m do
      k :=0 ;
      for i from 1 to nops(nvalp) do for j from 1 to mult[i] do
           mat[l,j+k] :=((l+m-1)^(j − 1)) ∗ valp[i]^(l + m − 1); k := k + 1;
      end_for ; end_for ;
      end_for ;
      for i from 1 to d do for j from 1 to d do
         cond_init[i, j] := matrix(nops(valp) − m, 1, 0);
      end_for ; end_for ;
      for i from 1 to d do for j from 1 to d do for n from 1 to nops(valp)-m do
         cond_init[i, j][n, 1] := (M^(n + m − 1))[i, j];
      end_for ; end_for ; end_for ;
      for i from 1 to d do for j from 1 to d do
         lambda[i][j] :=(mat^( − 1)) ∗ (cond_init[i, j]);
      end_for ; end_for ;
      for i from 1 to d do for j from 1 to d do
         Lambda[j][i] :=lambda[i][j][2];
```

```
    end_for ; end_for ;
    return(Lambda) ;
end_proc :



poids :=proc(f,Lambda,d)
local i,j,k,poids ;
begin
    for j from 1 to d do for k from 1 to d-1 do
      poids[k][j] :=0 ;
      for i from 1 to d do
        poids[k][j] :=poids[k][j]+Lambda[j][i]*f[k][i] ;
      end_for ;
    end_for ; end_for ;
    return(poids)
end_proc :



concat :=proc(tab,d)
local i,k,T,j ;
begin
    k :=0 ;
    for i from 1 to nops(tab) do for j from 1 to d do
      if isnotin(j,tab[i]) then
        k :=k+1 ; T[k] :=tab[i].[j] ;
      end_if ;
    end_for ; end_for ;
    return(T) ;
end_proc :



boucle :=proc(d,l)
local i,j,tab ;
begin
    for i from 1 to d do tab[i] :=[i] ; end_for ;
    for j from 1 to l-1 do tab :=concat(tab,d) ; end_for ;
    return(tab) ;
end_proc :



prefixes :=proc(sigma,d)
local i,pref,j ;
begin
    for i from 1 to d do
      pref[i][1] :=[] ;
      for j from 1 to nops(sigma[i]) do
        pref[i][j+1] :=pref[i][j].[sigma[i][j]] ;
      end_for ;
    end_for ;
    return(pref) ;
end_proc :



automate :=proc(pref,d)
local i,j,k,l,m ;
begin
    for i from 1 to d do for j from 1 to d do
      autom[i][j] :=[] ;
      for k from 2 to nops(pref[i]) do
        if pref[i][k][nops(pref[i][k])]=j then m :=[] ;
        for l from 1 to nops(pref[i][k])-1 do
          m :=m.[pref[i][k][l]] ;
```

```
      end_for;
      autom[i][j] :=[op(autom[i][j]),m];
      end_if;
    end_for;
  end_for; end_for;
  return(autom);
end_proc :



automax :=proc(automate,poids,k,d)
local i,j,max1,l,M,m,automax;
begin
  for i from 1 to d do for j from 1 to d do
    max1 :=-1*infinity;
    for l from 1 to nops(automate[i][j]) do
      M :=0;
      for m from 1 to nops(automate[i][j][l]) do
        M :=M+poids[k][automate[i][j][l][m]];
      end_for;
      if M¿max1 then max1 :=M; end_if;
    end_for;
    automax[i][j] :=max1;
  end_for; end_for;
  return(automax);
end_proc :



automin :=proc(automate,poids,k,d)
local i,j,max1,l,M,m,automin;
begin
  for i from 1 to d do for j from 1 to d do
    min1 :=infinity;
    for l from 1 to nops(automate[i][j]) do
      M :=0;
      for m from 1 to nops(automate[i][j][l]) do
        M :=M+poids[k][automate[i][j][l][m]];
      end_for;
      if M¡min1 then min1 :=M; end_if;
    end_for;
    automin[i][j] :=min1;
  end_for; end_for;     return(automin);
end_proc :



poids_max :=proc(automax,boucle)
local M,M1,i,j;
begin
  M :=0;
  for i from 1 to nops(boucle) do
  M1 :=0;
    for j from 1 to nops(boucle[i])-1 do
      M1 :=M1+automax[boucle[i][j]][boucle[i][j+1]];
    end_for;
  M1 :=M1+automax[boucle[i][nops(boucle[i])]][boucle[i][1]];
  M :=simplify(max(float(M1/nops(boucle[i])),float(M)));
  end_for;
  return(M);
end_proc :



maxi :=proc(auto,poids,d)
local max1,k,l,i,autom,bouc,M;
begin
```

```
    max1 :=0 ;
    for k from 1 to d-1 do
      for l from 2 to d do
        autom[k] :=automax(auto,poids,k,d) ; bouc[l] :=boucle(d,l) ;
        M :=poids_max(autom[k],bouc[l]);max1 := max(max1,M);
      end_for ;
    for i from 1 to d do max1 :=max(max1,autom[k][i][i]) ; end_for ;
    end_for ;
    if abs(max1)¡0.00000001 then return("A_max = 0");elsereturn(max1);
    end_if ;
end_proc :



poids_min :=proc(automin,boucle)
local M,M1,i,j ;
begin
    M :=0 ;
    for i from 1 to nops(boucle) do
    M1 :=0 ;
      for j from 1 to nops(boucle[i])-1 do
        M1 :=M1+automin[boucle[i][j]][boucle[i][j+1]] ;
      end_for ;
      M1 :=M1+automin[boucle[i][nops(boucle[i])]][boucle[i][1]] ;
      M :=simplify(min(float(M1/nops(boucle[i])),float(M))) ;
    end_for ;
    return(M) ;
end_proc :



mini :=proc(auto,poids,d)
local max1,k,l,i,autom,bouc,M ;
begin
    min1 :=0 ;
    for k from 1 to d-1 do
    for l from 2 to d do
      autom[k] :=automin(auto,poids,k,d) ; bouc[l] :=boucle(d,l) ;
      M :=poids_min(autom[k],bouc[l]);min1 := min(min1,M);
    end_for ;
    for i from 1 to d do min1 :=min(min1,autom[k][i][i]) ; end_for ;
    end_for ;
    if abs(min1)¡0.00000001 then return("A_min = 0");elsereturn(min1);
    end_if ;
end_proc :



final :=proc(sigma)
local M,f,valp,Lambda,poids,pref,auto ;
begin
    M :=matrice(sigma,nops(sigma)) ;
    positive(M,nops(sigma)) ;
    primitive(M,nops(sigma)) ;
    admissible(M,nops(sigma)) ;
    f :=ortho(M,nops(sigma)) ;
    valp :=ordonne(M) ;
    Lambda :=mat_inv(M,valp,nops(sigma));
    poids :=poids(f,Lambda,nops(sigma)) ;
    pref :=prefixes(sigma,nops(sigma)) ;
    auto :=automate(pref,nops(sigma)) ;
    return(maxi(auto,poids,nops(sigma)),mini(auto,poids,nops(sigma))) ;
end_proc :
```

Bibliographie

[1] B. Adamczewski. Balances for fixed points of primitive substitutions. *Theoret. Comput. Sci.*, to appear.

[2] B. Adamczewski. Répartitions des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et substitutions. *Acta Arith.*, à paraître.

[3] B. Adamczewski. Symbolic discrepancy and self-similar dynamics. Preprint, 2002.

[4] B. Adamczewski. Système de numération associé à un point fixe de substitution. Groupe d'Étude sur la Numération, CIRM 2001.

[5] B. Adamczewski. Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 14 :1–35, 2002.

[6] B. Adamczewski and J. Cassaigne. On the transcendence of real numbers with a regular expansion. Preprint, 2002.

[7] B. Adamczewski and D. Damanik. Linearly recurrent circle map subshifts and an application to schrödinger operators. *Ann. Henri Poincaré*, 3 :1019–1047, 2002.

[8] W. W. Adams and J. L. Davison. A remarkable class of continued fractions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65(2) :194–198, 1977.

[9] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 :309–319, 1965.

[10] S. Akiyama. Pisot numbers and greedy algorithm. In *Number theory (Eger, 1996)*, pages 9–21. De Gruyter, Berlin, 1998.

[11] S. Akiyama. Self affine tiling and Pisot numeration system. In *Number theory and its applications (Kyoto, 1997)*, volume 2 of *Dev. Math.*, pages 7–17. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[12] P. Alessandri and V. Berthé. Three distance theorems and combinatorics on words. *Enseign. Math. (2)*, 44 :103–132, 1998.

[13] J.-P. Allouche. Nouveaux résultats de transcendance de réels à développement non aléatoire. *Gaz. Math.*, (84) :19–34, 2000.

[14] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, and L. Q. Zamboni. Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions. *J. Number Theory*, 91 :39–66, 2001.

[15] J.-P. Allouche and J. O. Shallit. *Automatic sequences : Theory and Applications.* Cambridge University Press, to appear.

[16] J.-P. Allouche and L. Q. Zamboni. Algebraic irrational binary numbers cannot be fixed points of non-trivial constant length or primitive morphisms. *J. Number Theory*, 69 :119–124, 1998.

[17] E. Altman, B. Gaujal, and A. Hordijk. Balanced sequences and optimal routing. *J. ACM*, 47 :752–775, 2000.

[18] P. Arnoux, S. Ferenczi, and P. Hubert. Trajectories of rotations. *Acta Arith.*, 87 :209–217, 1999.

[19] P. Arnoux and S. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 8(2) :181–207, 2001. Journées Montoises d'Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000).

[20] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa, and J.-i. Tamura. Complexity of sequences defined by billiard in the cube. *Bull. Soc. Math. France*, 122(1) :1–12, 1994.

[21] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa, and J.-i. Tamura. Rauzy's conjecture on billiards in the cube. *Tokyo J. Math.*, 17(1) :211–218, 1994.

[22] P. Arnoux, D. S. Ornstein, and B. Weiss. Cutting and stacking, interval exchanges and geometric models. *Israel J. Math.*, 50(1-2) :160–168, 1985.

[23] P. Arnoux and G. Rauzy. Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$. *Bull. Soc. Math. France*, 119 :199–215, 1991.

[24] Y. Baryshnikov. Complexity of trajectories in rectangular billiards. *Comm. Math. Phys.*, 174(1) :43–56, 1995.

[25] C. Baxa. On the discrepancy of the sequence $(n\alpha)$. *J. Number Theory*, 55 :94–107, 1995.

[26] C. Baxa. Comparing the distribution of $(n\alpha)$-sequences. *Acta Arith.*, 94 :345–363, 2000.

[27] C. Baxa and J. Schoissengeier. Minimum and maximum order of magnitude of the discrepancy of $(n\alpha)$. *Acta Arith.*, 68 :281–290, 1994.

[28] J. Beck. A two-dimensional van Aardenne-Ehrenfest theorem in irregularities of distribution. *Compositio Math.*, 72(3) :269–339, 1989.

[29] J. Beck. Probabilistic Diophantine approximation. I. Kronecker sequences. *Ann. of Math. (2)*, 140(2) :449–502, 1994.

[30] J. Beck and V. T. Sós. Discrepancy theory. In *Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 1405–1446. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[31] H. Behnke. Über die Verteilung von Irrationalitäten mod. 1. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 1 :252–267, 1922.

[32] H. Behnke. Zur Theorie der diophantischen Approximationen. I. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 3 :261–318, 1924.

[33] J. Bellissard, B. Iochum, E. Scoppola, and D. Testard. Spectral properties of one-dimensional quasi-crystals. *Comm. Math. Phys.*, 125(3) :527–543, 1989.

[34] J. Bellissard, B. Iochum, and D. Testard. Continuity properties of the electronic spectrum of 1D quasicrystals. *Comm. Math. Phys.*, 141(2) :353–380, 1991.

[35] D. Bernardi, A. Guerziz, and M. Koskas. Sturmian words : description and orbits. Work in progress.

[36] J. Berstel. On the index of Sturmian words. In *Jewels are forever*, pages 287–294. Springer, Berlin, 1999.

[37] V. Berthé and A. Siegel. Purely Periodic beta-Expansions in the Pisot Non-unit Case. Preprint 2002.

[38] V. Berthé. Sequences of low complexity : automatic and Sturmian sequences. In *Topics in symbolic dynamics and applications (Temuco, 1997)*, volume 279 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–34. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[39] V. Berthé. Autour du système de numération d'Ostrowski. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 8(2) :209–239, 2001. Journées Montoises d'Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000).

[40] V. Berthé, C. Holton, and L. Q. Zamboni. Initial Critical Exponent. Preprint, 2002.

[41] V. Berthé and R. Tijdeman. Balance properties of multi-dimensional words. *Theoret. Comput. Sci.*, 273(1-2) :197–224, 2002. WORDS (Rouen, 1999).

[42] V. Berthé and L. Vuillon. Suites doubles de basse complexité. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 12(1) :179–208, 2000.

[43] V. Berthé and L. Vuillon. Tilings and rotations on the torus : a two-dimensional generalization of Sturmian sequences. *Discrete Math.*, 223(1-3) :27–53, 2000.

[44] V. Berthé and L. Vuillon. Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences. *J. Autom. Lang. Comb.*, 6(2) :121–138, 2001.

[45] P. E. Böhmer. Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche. *Math. Annalen*, 96 :367–377. Erratum 96 :735, 1926.

[46] H. Bohl. Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. *J. Reine Angew. Math.*, 135 :189–283, 1909.

[47] É. Borel. Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 :591–593, 1950.

[48] M. D. Boshernitzan and C. R. Carroll. An extension of Lagrange's theorem to interval exchange transformations over quadratic fields. *J. Anal. Math.*, 72 :21–44, 1997.

[49] A. Bovier and J.-M. Ghez. Spectral properties of one-dimensional Schrödinger operators with potentials generated by substitutions. *Comm. Math. Phys.*, 158(1) :45–66, 1993.

[50] A. Bovier and J.-M. Ghez. Erratum : "Spectral properties of one-dimensional Schrödinger operators with potentials generated by substitutions" [Comm. Math. Phys. **158** (1993), no. 1, 45–66 ; MR 94k :82064]. *Comm. Math. Phys.*, 166(2) :431–432, 1994.

[51] J. Brillhart, P. Erdős, and P. Morton. On sums of Rudin-Shapiro coefficients. II. *Pacific J. Math.*, 107 :39–69, 1983.

[52] T. C. Brown. A characterization of the quadratic irrationals. *Canad. Math. Bull.*, 34(1) :36–41, 1991.

[53] T. C. Brown. Descriptions of the characteristic sequence of an irrational. *Canad. Math. Bull.*, 36(1) :15–21, 1993.

[54] Y. Bugeaud. Nombres de Liouville et nombres normaux. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(2) :117–120, 2002.

[55] V. Canterini. Géométrie des systèmes Pisot unitaires. Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée, 2000.

[56] V. Canterini and A. Siegel. Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 13(2) :353–369, 2001.

[57] V. Canterini and A. Siegel. Geometric representation of substitutions of Pisot type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 :5121–5144, 2001.

[58] M. Casdagli. Symbolic dynamics for the renormalization map of a quasiperiodic Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 107(2) :295–318, 1986.

[59] J. Cassaigne. Private communication.

[60] J. Cassaigne. Sequences with grouped factors. *Developments in Language Theory III*, Publications of the Aristotle University of Thessaloniki (1998), 211–222.

[61] J. Cassaigne. Special factors of sequences with linear subword complexity. In *Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995)*, pages 25–34. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

[62] J. Cassaigne. Double sequences with complexity $mn+1$. *J. Autom. Lang. Comb.*, 4(3) :153–170, 1999. Journées Montoises d'Informatique Théorique (Mons, 1998).

[63] J. Cassaigne, S. Ferenczi, and L. Q. Zamboni. Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50 :1265–1276, 2000.

[64] R. V. Chacon. Weakly mixing transformations which are not strongly mixing. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22 :559–562, 1969.

[65] W. W. L. Chen and M. M. Skriganov. Explicit constructions in the classical mean squares problem in irregularities of point distribution. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :67–95, 2002.

[66] J. Coquet. A summation formula related to the binary digits. *Invent. Math.*, 73 :107–115, 1983.

[67] E. M. Coven. Sequences with minimal block growth. II. *Math. Systems Theory*, 8(4) :376–382, 1974/75.

[68] E. M. Coven and G. A. Hedlund. Sequences with minimal block growth. *Math. Systems Theory*, 7 :138–153, 1973.

[69] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, and P. Shiue. Substitution invariant cutting sequences. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 5 :123–137, 1993.

[70] D. Damanik. Gordon-type arguments in the spectral theory of one-dimensional quasicrystals. In *Directions in mathematical quasicrystals*, volume 13 of *CRM Monogr. Ser.*, pages 277–305. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[71] D. Damanik, R. Killip, and D. Lenz. Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals. III. α-continuity. *Comm. Math. Phys.*, 212(1) :191–204, 2000.

[72] D. Damanik and D. Lenz. Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals. IV. Quasi-Sturmians potentials. Preprint, Caltech and TU Chemnitz 2001.

[73] D. Damanik and D. Lenz. Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals. I. Absence of eigenvalues. *Comm. Math. Phys.*, 207(3) :687–696, 1999.

[74] D. Damanik and D. Lenz. Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals. II. The Lyapunov exponent. *Lett. Math. Phys.*, 50(4) :245–257, 1999.

[75] D. Damanik and D. Lenz. Linear repetitivity. I. Uniform subadditive ergodic theorems and applications. *Discrete Comput. Geom.*, 26(3) :411–428, 2001.

[76] D. Damanik and D. Zare. Palindrome complexity bounds for primitive substitution sequences. *Discrete Math.*, 222(1-3) :259–267, 2000.

[77] J. L. Davison. A series and its associated continued fraction. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 63(1) :29–32, 1977.

[78] J. L. Davison. A class of transcendental numbers with bounded partial quotients. In *Number theory and applications (Banff, AB, 1988)*, pages 365–371. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[79] J. L. Davison. Continued fractions with bounded partial quotients. *Proc. Edinburgh Mth. Soc.*, 45 :653–671, 2002.

[80] F. M. Dekking. Recurrent sets. *Adv. in Math.*, 44(1) :78–104, 1982.

[81] F. M. Dekking. On the distribution of digits in arithmetic sequences. In *Seminar on number theory, 1982–1983 (Talence, 1982/1983)*, pages Exp. No. 32, 12. Univ. Bordeaux I, Talence, 1983.

[82] F. M. Dekking and M. Keane. Mixing properties of substitutions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 42(1) :23–33, 1978.

[83] M. Dekking. Transcendance du nombre de Thue-Morse. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 285(4) :A157–A160, 1977.

[84] F. Delyon and D. Petritis. Absence of localization in a class of Schrödinger operators with quasiperiodic potential. *Comm. Math. Phys.*, 103(3) :441–444, 1986.

[85] G. Didier. Échanges de trois d'intervalles et suites sturmiennes. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 9(2) :463–478, 1997.

[86] G. Didier. Codages de rotations et fractions continues. *J. Number Theory*, 71 :275–306, 1998.

[87] G. Didier. Combinatoire des codages de rotations. *Acta Arith.*, 85 :157–177, 1998.

[88] M. Doudekova. Contribution à l'étude dynamique de translations par intervalles. Thèse de l'Université de Provence, (1999).

[89] M. Drmota and R. F. Tichy. *Sequences, discrepancies and applications.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[90] X. Droubay, J. Justin, and G. Pirillo. Epi-Sturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy. *Theoret. Comput. Sci.*, 255(1-2) :539–553, 2001.

[91] J.-M. Dumont. Formules sommatoires et systèmes de numération liés aux substitutions. In *Séminaire de Théorie des Nombres, 1987–1988 (Talence, 1987–1988)*, pages Exp. No. 39, 12. Univ. Bordeaux I, Talence, 1988.

[92] J.-M. Dumont and A. Thomas. Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoret. Comput. Sci.*, 65 :153–169, 1989.

[93] J.-M. Dumont and A. Thomas. Digital sum problems and substitutions on a finite alphabet. *J. Number Theory*, 39 :351–366, 1991.

[94] Y. Dupain. Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 29 :289–303, 1977.

[95] Y. Dupain. Discrépance de la suite $(\{n\alpha\})$, $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 29 :xiv, 81–106, 1979.

[96] Y. Dupain and V. T. Sós. On the one-sided boundedness of discrepancy-function of the sequence $\{n\alpha\}$. *Acta Arith.*, 37 :363–374, 1980.

[97] Y. Dupain and V. T. Sós. On the discrepancy of $(n\alpha)$ sequences. In *Topics in classical number theory, Vol. I, II (Budapest, 1981)*, pages 355–387. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[98] F. Durand. Contributions à l'étude des suites et systèmes dynamiques substitutifs. Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée, 1996.

[99] F. Durand. A characterization of substitutive sequences using return words. *Discrete Math.*, 179 :89–101, 1998.

[100] F. Durand. Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20 :1061–1078, 2000.

[101] F. Durand. Combinatorial and dynamical study of substitutions around the theorem of cobham. Dynamics and Randomness (Santiago 2001), Kluwer Acad. Publ., to appear.

[102] F. Durand. Corrigendum and addendum to : Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, to appear.

[103] F. Durand, B. Host, and C. Skau. Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19 :953–993, 1999.

[104] H. Ei and S. Ito. Tiling from some β-cubic Pisot numbers. Preprint 2000.

[105] P. Erdös and P. Turán. On a problem in the theory of uniform distribution. I. *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, 51 :1146–1154, 1948.

[106] P. Erdös and P. Turán. On a problem in the theory of uniform distribution. II. *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, 51 :1262–1269, 1948.

[107] I. Fagnot and L. Vuillon. Generalized balances in sturmian words. to appear in *Discrete Applied Mathematics*.

[108] H. Faure. Discrépances de suites associées à un système de numération (en dimension un). *Bull. Soc. Math. France*, 109(2) :143–182, 1981.

[109] H. Faure. Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension s). *Acta Arith.*, 41(4) :337–351, 1982.

[110] S. Ferenczi. Bounded remainder sets. *Acta Arith.*, 61 :319–326, 1992.

[111] S. Ferenczi. Les transformations de Chacon : combinatoire, structure géométrique, lien avec les systèmes de complexité $2n+1$. *Bull. Soc. Math. France*, 123(2) :271–292, 1995.

[112] S. Ferenczi. Rank and symbolic complexity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16 :663–682, 1996.

[113] S. Ferenczi. Systems of finite rank. *Colloq. Math.*, 73(1) :35–65, 1997.

[114] S. Ferenczi, C. Holton, and L. Q. Zamboni. Joinings of three interval exchange transformations. Preprint 2002.

[115] S. Ferenczi, C. Holton, and L. Q. Zamboni. Structure of three interval exchange transformations. II. Combinatorial description of the trajectories. Preprint 2001.

[116] S. Ferenczi, C. Holton, and L. Q. Zamboni. Structure of three interval exchange transformations. III. Ergodic and spectral properties. Preprint 2001.

[117] S. Ferenczi, C. Holton, and L. Q. Zamboni. Structure of three interval exchange transformations. I. An arithmetic study. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(4) :861–901, 2001.

[118] S. Ferenczi and C. Mauduit. Transcendence of numbers with a low complexity expansion. *J. Number Theory*, 67 :146–161, 1997.

[119] H. Furstenberg, H. Keynes, and L. Shapiro. Prime flows in topological dynamics. *Israel J. Math.*, 14 :26–38, 1973.

[120] B. Gaujal. Convexité discrète et régularité ; application au contrôle des systèmes à événements discrets. Habilitation à diriger des recherches, LORIA et INRIA, 2001.

[121] W. H. Gottschalk. Substitution minimal sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 109 :467–491, 1963.

[122] R. L. Graham. Covering the positive integers by disjoint sets of the form $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \ldots\}$. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 15 :354–358, 1973.

[123] G. Halász. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 28 :389–395, 1976.

[124] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some problems of diophantine approximation : The lattice points of a right-angled triangle ii. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambourg 1*, pages 212–249, 1922.

[125] E. Hecke. Über analytische Functionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 1 :54–76, 1922.

[126] A. Heinis. Arithmetics and combinatorics of words of low complexity. Ph. D. Thesis of the Leiden University, 2001.

[127] E. Hlawka. Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 54 :325–333, 1961.

[128] A. Hof. Some remarks on discrete aperiodic Schrödinger operators. *J. Statist. Phys.*, 72(5-6) :1353–1374, 1993.

[129] A. Hof, O. Knill, and B. Simon. Singular continuous spectrum for palindromic Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 174(1) :149–159, 1995.

[130] C. Holton and L. Q. Zamboni. Geometric realizations of substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 126 :149–179, 1998.

[131] M. Hörnquist and M. Johansson. Singular continuous electron spectrum for a class of circle sequences. *J. Phys. A*, 28(2) :479–495, 1995.

[132] B. Host. Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4) :529–540, 1986.

[133] P. Hubert. Complexité de suites définies par des billards rationnels. *Bull. Soc. Math. France*, 123(2) :257–270, 1995.

[134] P. Hubert. Propriétés combinatoires des suites définies par le billard dans les triangles pavants. *Theoret. Comput. Sci.*, 164(1-2) :165–183, 1996.

[135] P. Hubert. Suites équilibrées. *Theoret. Comput. Sci.*, 242 :91–108, 2000.

[136] B. Iochum, L. Raymond, and D. Testard. Resistance of one-dimensional quasicrystals. *Phys. A*, 187(1-2) :353–368, 1992.

[137] B. Iochum and D. Testard. Power law growth for the resistance in the Fibonacci model. *J. Statist. Phys.*, 65(3-4) :715–723, 1991.

[138] S. Ito. On periodic expansions of cubic numbers and Rauzy fractals. In *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, pages 144–164. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[139] S. Ito and M. Kimura. On Rauzy fractal. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 8(3) :461–486, 1991.

[140] S. Ito and H. Rao. On purely periodic β-expansion with Pisot base. Preprint, 2001.

[141] S. Ito and Y. Sano. On periodic β-expansions of Pisot numbers and Rauzy fractals. *Osaka J. Math.*, 38(2) :349–368, 2001.

[142] S. Y. Jitomirskaya. Singular spectral properties of a one-dimensional Schrödinger operator with almost periodic potential. In *Dynamical systems and statistical mechanics (Moscow, 1991)*, volume 3 of *Adv. Soviet Math.*, pages 215–254. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991. Translated from the Russian by V. E. Nazaĭkinskiĭ.

[143] S. Kakutani. Induced measure preserving transformations. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 19 :635–641, 1943.

[144] M. Kaminaga. Absence of point spectrum for a class of discrete Schrödinger operators with quasiperiodic potential. *Forum Math.*, 8(1) :63–69, 1996.

[145] M. Keane. Interval exchange transformations. *Math. Zeit.*, 141 :25–31, 1975.

[146] H. Kesten. On a conjecture of Erdős and Szüsz related to uniform distribution mod 1. *Acta Arith.*, 12 :193–212, 1966/1967.

[147] A. Khintchine. Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen. *Math. Zeit.*, 18 :289–306, 1923.

[148] A. Y. Khintchine. *Continued fractions.* Translated by Peter Wynn. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1963.

[149] J. F. Koksma. Some integrals in the theory of uniform distribution modulo 1. *Mathematica, Zutphen. B.*, 11 :49–52, 1942.

[150] J. F. Koksma. *Some theorems on Diophantine inequalities.* Scriptum no. 5. Math. Centrum Amsterdam, 1950.

[151] S. Kotani. Jacobi matrices with random potentials taking finitely many values. *Rev. Math. Phys.*, 1(1) :129–133, 1989.

[152] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.

[153] J. C. Lagarias and P. A. B. Pleasants. Repetitive delone sets and quasicristals. To appear in *Ergodic Theory Dynam. Systems.*

[154] J. P. Lambert. Quasi-Monte Carlo, low discrepancy sequences, and ergodic transformations. In *Proceedings of the international conference on computational and applied mathematics (Leuven, 1984)*, volume 12/13, pages 419–423, 1985.

[155] Y. Last and B. Simon. Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Invent. Math.*, 135(2) :329–367, 1999.

[156] D. Lenz. Singular spectrum of Lebesgue measure zero for one-dimensional quasicrystals. *Comm. Math. Phys.*, 227(1) :119–130, 2002.

[157] D. Lenz. Uniform ergodic theorems on subshifts over a finite alphabet. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(1) :245–255, 2002.

[158] J. Lesca. Sur la répartition modulo 1 de la suite $n\alpha$. *Acta Arith.*, 20 :345–352, 1972.

[159] P. Liardet. Regularities of distribution. *Compositio Math.*, 61 :267–293, 1987.

[160] D. Lind and B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[161] L.-M. Lopez and P. Narbel. D0L-systems and surface automorphisms. In *Mathematical foundations of computer science, 1998 (Brno)*, pages 522–532. Lecture Notes in Comput. Sci. **1450**, Springer, Berlin, 1998.

[162] L.-M. Lopez and P. Narbel. Substitutions from Rauzy induction (extended abstract). In *Developments in language theory (Aachen, 1999)*, pages 200–209. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[163] L.-M. Lopez and P. Narbel. Substitutions and interval exchange transformations of rotation class. *Theoret. Comput. Sci.*, 255 :323–344, 2001.

[164] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words.* Cambridge University Press, 2002.

[165] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. Arithmetic properties of automata : regular sequences. *J. Reine Angew. Math.*, 392 :57–69, 1988.

[166] K. Mahler. Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen. *Math. Annalen*, 101 :342–366, 1929. Corrigendum 103 :532, 1930.

[167] K. Mahler. Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen. *Proc. Konin. Neder. Akad. Wet. Ser. A*, 40 :421–428, 1937.

[168] K. Mahler. *Lectures on Diophantine approximations. Part I : g-adic numbers and Roth's theorem.* University of Notre Dame, 1961.

[169] C. Mauduit and A. Sárközy. On finite pseudorandom binary sequences. I. Measure of pseudorandomness, the Legendre symbol. *Acta Arith.*, 82(4) :365–377, 1997.

[170] A. Messaoudi. Autour du fractal de Rauzy. Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée, 1996.

[171] P. Michel. Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitution. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278 :811–813, 1974.

[172] P. Michel. Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitution. In *Théorie ergodique (Actes Journées Ergodiques, Rennes, 1973/1974)*, pages 189–201. Lecture Notes in Math., Vol. 532. Springer, Berlin, 1976.

[173] F. Mignosi. Infinite words with linear subword complexity. *Theoret. Comput. Sci.*, 65(2) :221–242, 1989.

[174] R. Morikawa. On eventually covering families generated by the bracket function. *Bull. Fac. Liberal Arts Nagasaki Univ.*, 23 :17–22, 1982/83.

[175] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 60 :815–866, 1938.

[176] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62 :1–42, 1940.

[177] B. Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution. *Theoret. Comput. Sci.*, 99(2) :327–334, 1992.

[178] I. Nakashima, J.-i. Tamura, and S.-i. Yasutomi. Modified complexity and $*$-Sturmian word. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 75(3) :26–28, 1999.

[179] H. Niederreiter. Application of Diophantine approximations to numerical integration. In *Diophantine approximation and its applications (Proc. Conf., Washington, D.C., 1972)*, pages 129–199. Academic Press, New York, 1973.

[180] H. Niederreiter. The distribution of Farey points. *Math. Ann.*, 201 :341–345, 1973.

[181] H. Niederreiter. Point sets and sequences with small discrepancy. *Monatsh. Math.*, 104(4) :273–337, 1987.

[182] H. Niederreiter. Low-discrepancy and low-dispersion sequences. *J. Number Theory*, 30(1) :51–70, 1988.

[183] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[184] H. Niederreiter. Low-discrepancy sequences and non-Archimedean Diophantine approximations. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 30(1-2) :111–122, 1995.

[185] H. Niederreiter. Constructions of (t, m, s)-nets. In *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 1998 (Claremont, CA)*, pages 70–85. Springer, Berlin, 2000.

[186] A. Ostrowski. Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, II. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 1 :77–98 et 250–251, 1922.

[187] A. Ostrowski. Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen III. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 4 :224, 1926.

[188] J.-J. Pansiot. Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés. In *Automata, languages and programming (Antwerp, 1984)*, pages 380–389. Springer, Berlin, 1984.

[189] B. Parvaix. Substitution invariant Sturmian bisequences. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 11(1) :201–210, 1999. Les XXèmes Journées Arithmétiques (Limoges, 1997).

[190] M. E. Paul. Minimal symbolic flows having minimal block growth. *Math. Systems Theory*, 8(4) :309–315, 1974/75.

[191] K. Petersen. On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory. *Compositio Math.*, 26 :313–317, 1973.

[192] C. Pinner. On sums of fractional parts $\{n\alpha+\gamma\}$. *J. Number Theory*, 65 :48–73, 1997.

[193] C. G. Pinner. On the one-sided boundedness of sums of fractional parts $(\{n\alpha+\gamma\}-\frac{1}{2})$. *J. Number Theory*, 81 :170–204, 2000.

[194] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics.* Lecture Notes in Mathematics 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002. To appear.

[195] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis.* Lecture Notes in Mathematics **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[196] M. Queffélec. Transcendance des fractions continues de Thue-Morse. *J. Number Theory*, 73 :201–211, 1998.

[197] M. Queffélec. Irrational numbers with automaton-generated continued fraction expansion. In *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, pages 190–198. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[198] L. Ramshaw. On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number. *J. Number Theory*, 13 :138–175, 1981.

[199] G. Rauzy. *Propriétés statistiques de suites arithmétiques.* Presses Universitaires de France, Paris, 1976. Le Mathématicien, No. 15, Collection SUP.

[200] G. Rauzy. Une généralisation du développement en fraction continue. In *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 18e année : 1976/77, Théorie des nombres, Fasc. 1*, pages Exp. No. 15, 16. Secrétariat Math., Paris, 1977.

[201] G. Rauzy. Échanges d'intervalles et transformations induites. *Acta Arith.*, 34 :315–328, 1979.

[202] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110 :147–178, 1982.

[203] G. Rauzy. Des mots en arithmétique. In *Avignon conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983)*, pages 103–113. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984.

[204] G. Rauzy. Ensembles à restes bornés. In *Seminar on number theory, 1983–1984 (Talence, 1983/1984)*, pages Exp. No. 24, 12. Univ. Bordeaux I, Talence, 1984.

[205] G. Rauzy. Sequences defined by iterated morphisms. In *Sequences (Naples/Positano, 1988)*, pages 275–286. Springer, New York, 1990.

[206] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 8 :477–493, 1957.

[207] D. Ridout. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 4 :125–131, 1957.

[208] R. N. Risley and L. Q. Zamboni. A generalization of Sturmian sequences : combinatorial structure and transcendence. *Acta Arith.*, 95 :167–184, 2000.

[209] G. Rote. Sequences with subword complexity $2n$. *J. Number Theory*, 46 :196–213, 1994.

[210] K. F. Roth. On irregularities of distribution. *Mathematika*, 1 :73–79, 1954.

[211] K. F. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2 :1–20 ; corrigendum 2 :168, 1955.

[212] W. Rudin. Some theorems on Fourier coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :855–859, 1959.

[213] W. M. Schmidt. Metrical theorems on fractional parts of sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110 :493–518, 1964.

[214] W. M. Schmidt. On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals. *Acta Math.*, 119 :27–50, 1967.

[215] W. M. Schmidt. Irregularities of distribution. VII. *Acta Arith.*, 21 :45–50, 1972.

[216] W. M. Schmidt. Irregularities of distribution. VIII. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 198 :1–22, 1974.

[217] J. Schoissengeier. On the discrepancy of $(n\alpha)$. *Acta Arith.*, 44 :241–279, 1984.

[218] J. Schoissengeier. The discrepancy of $(n\alpha)_{n\geq 1}$. *Math. Ann.*, 296 :529–545, 1993.

[219] F. Schweiger. *Multidimensional Continued Fractions.* Oxford University Press, 2000.

[220] H. Shapiro. *Extremal problems for polynomials and power series.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1951.

[221] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. V. Cahn. Metallic phase with long range orientational order and no translational symetry. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1951–1953, 1984.

[222] A. Siegel. Représentation géométrique, combinatoire et arithmétique des systèmes substitutifs de type Pisot. Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée, 2000.

[223] T. Siegl and R. F. Tichy. Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung. *Schweiz. Aktuarver. Mitt.*, (1) :95–118, 1996.

[224] T. Siegl and R. F. Tichy. Ruin theory with risk proportional to the free reserve and securitization. *Insurance Math. Econom.*, 26 :59–73, 2000.

[225] T. Siegl and R. F. Tichy. A model in ruin theory using derivative securities. *Schweiz. Aktuarver. Mitt.*, (1) :13–30, 2002.

[226] W. Sierpinski. Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme. *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. (Cracovie)*, A :9–11, 1910.

[227] W. Sierpinski. Sur une propriété caractéristique des nombres rationnels (in polish). *Pr. Mat. Fiz.*, 21 :1–6, 1910.

[228] N. B. Slater. Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 63 :1115–1123, 1967.

[229] I. M. Sobol. Distribution of points in a cube and approximate evaluation of integrals. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 7 :784–802, 1967.

[230] B. Solomyak. On the spectral theory of adic transformations. In *Representation theory and dynamical systems*, pages 217–230. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[231] B. Solomyak. Nonperiodicity implies unique composition for self-similar translationally finite tilings. *Discrete Comput. Geom.*, 20(2) :265–279, 1998.

[232] V. T. Sós. On strong irregularities of the distribution of $\{n\alpha\}$ sequences. In *Studies in pure mathematics*, pages 685–700. Birkhäuser, Basel, 1983.

[233] A. Sütő. The spectrum of a quasiperiodic Schrödinger operator. *Comm. Math. Phys.*, 111(3) :409–415, 1987.

[234] A. Sütő. Singular continuous spectrum on a Cantor set of zero Lebesgue measure for the Fibonacci Hamiltonian. *J. Statist. Phys.*, 56(3-4) :525–531, 1989.

[235] P. Szüsz. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 5 :35–39, 1954.

[236] A. Thue. Über unendliche Zeichenreihen. *Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl.*, 7 :1–22, 1906. Reprinted in "Selected mathematical papers of Axel Thue", T. Nagell, ed., Universitetsforlaget, Oslo, 1977, pp. 139–158.

[237] R. Tijdeman. On a distribution problem in finite and countable sets. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 15 :129–137, 1973.

[238] R. Tijdeman. Exact covers of balanced sequences and Fraenkel's conjecture. In *Algebraic number theory and Diophantine analysis (Graz, 1998)*, pages 467–483. De Gruyter, Berlin, 2000.

[239] R. Tijdeman. Fraenkel's conjecture for six sequences. *Discrete Math.*, 222 :223–234, 2000.

[240] R. Tijdeman and G. Wagner. A sequence has almost nowhere small discrepancy. *Monatsh. Math.*, 90 :315–329, 1980.

[241] T. van Aardenne-Ehrenfest. Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval. *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, 48 :266–271, 1945.

[242] T. van Aardenne-Ehrenfest. On the impossibility of a just distribution. *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, 52 :734–739, 1949.

[243] D. Vandeth. Sturmian words and words with a critical exponent. *Theoret. Comput. Sci.*, 242(1-2) :283–300, 2000.

[244] W. A. Veech. Interval exchange transformations. *J. Analyse Math.*, 33 :222–272, 1978.

[245] W. A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math.*, 115 :201–242, 1982.

[246] A. M. Vershik and A. N. Livshits. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. In *Representation theory and dynamical systems*, volume 9 of *Adv. Soviet Math.*, pages 185–204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[247] J. von Neumann. Zur Operatorenmethode in der klassichen Mechanik. *Ann. of Math.*, 33 :587–642, 1932.

[248] H. Weyl. Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et la théorie des perturbations. *Enseign. Math.*, 16 :455–467, 1914.

[249] H. Weyl. Über die Gleichverteilung mod. Eins. *Math. Ann*, 77 :313–352, 1916.

[250] S.-I. Yasutomi. On Sturmian sequences which are invariant under some substitutions. In *Number theory and its applications (Kyoto, 1997)*, volume 2 of *Dev. Math.*, pages 347–373. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[251] L. Q. Zamboni. Une généralisation du théorème de Lagrange sur le développement en fraction continue. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(6) :527–530, 1998.

[252] A. Zorich. Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46 :325–370, 1996.