Université de Pau et des Pays de l'Adour **Année 2008-2009**
Département de Mathématiques
L2 MASS-Concours Publics - Semestre 2

Algèbre bilinéaire
Feuille d'exercices n°2

Exercice 1

1) Déterminer les vecteurs propres et les sous espaces propres des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ \bar{j} & 1 & j \\ \bar{j}^2 & \bar{j} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Pour les matrices M_1 et M_4, on donne respectivement les matrices :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}-1 & -(1+\sqrt{2}) \\ 1 & 2(1-\sqrt{2}) & 2(1+\sqrt{2}) \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & j^2 \\ 1 & -1 & j \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer dans chacun des cas le produit $D = P^{-1}MP$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & 3a \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M.

2) En déduire, suivant les valeurs de a, si M est diagonalisable. Dans ce(s) cas, déterminer une base de vecteurs propres.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable. A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Exercice 4

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que M est diagonalisable. M est-elle inversible ?

2) Calculer M^k pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = X^3 P(\frac{1}{X})$

1) Calculer f^2. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et donner la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Démontrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

Exercice 6

1) Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Réduire ces deux matrices.

Travail personnel

Exercice 7 (**Contrôle continu - Mars 2008**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Déterminer le rang de A.
3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$? En déterminer une base.
4. Calculer les valeurs propres de A et préciser leur ordre de multiplicité.
5. En déduire que A est diagonalisable et préciser une base de vecteurs propres.
6. Utiliser la question précédente afin de calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n.