Epreuve préalable d'admission en préparation au concours de professeurs des écoles
24 mars 2007

1 -
A : $0{,}413 \times 100 = 41{,}3$ (règle des zéros)
B : $0{,}056 : 0{,}001 = 0{,}056 : (1/1000) = 0{,}056 \times 1000 = 56$ (règle des zéros)
C : $830 : 100 = 8{,}30$ (règle des zéros)
D : $0{,}125 \times 464 = 464 \times (1/8) = 464 : 8 = 400 : 8 + 64 : 8 = 50 + 8 = 58$
E : $4{,}4 \times 2{,}5 = 4{,}4 \times (10/4) = (4{,}4 \times 10) : 4 = 44 : 4 = 11$
Les résultats entiers sont donc ceux des items B, D et E.

2 – $(40 : 0{,}5) \times (¾) = (40 : (½)) \times (¾) = (40 \times 2) \times (¾) = 80 \times (¾) = (80 \times 3)/4\ ) = 240/4 = 60$
La réponse est donc D.

3 – Le plus grand des réservoirs contient cinq fois le plus petit. On a donc en tout le contenu de six petits réservoirs. Le petit réservoir contient donc le sixième du total des deux réservoirs, soit 318/6 = 300/6 + 18/6 = 50 + 3 = 53 l.
La réponse est donc B.

4 – Paul ayant mangé deux parts de gâteau sur cinq, il reste alors 3/5 (trois cinquièmes) du gâteau. Pierre en mange la moitié, soit 3/10 (trois dixièmes) et il reste donc 3/10 du gâteau. Sachant qu'une part initiale correspond à 1/5 = 2/10 du gâteau, les bonnes réponses sont donc A (3/10 > 2/10) et D (3/10 < ½ = 5/10).

5 -
A : faux, car le développement décimal de 1/3 est illimité
B : faux, car 1/20 = 5/100 = 0,05 (on peut aussi poser la division)
C : faux, car 22/7 = 3,142857... n'est qu'une approximation de $\pi = 3{,}14159...$
D : vrai, car 3/20 = 15/100 = 0,15
E : vrai, car 1 – 1/3 = 3/3 – 1/3 = 2/3 = 6/9
Les bonnes réponses sont donc D et E.

6 -
A : Vrai : un carré a quatre côtés de même longueur, ce qui suffit à caractériser un losange.
B : Vrai : un rectangle a deux côtés opposés parallèles, ce qui suffit à caractériser un trapèze.
C : Faux : il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des rectangles.
D : Faux : il existe des losange qui ne sont pas des rectangles.
E : Vrai : un carré a deux côtés opposés parallèles, ce qui suffit à caractériser un trapèze.
Bonnes réponses : A, B et E.

7 – Le coefficient d'agrandissement fait de la largeur de l'un à la largeur de l'autre (ou d'une longueur à l'autre longueur). On a donc ici : 29,7/21 = 1,41 à un centième près.
Réponse A.

8 - On réduit ces deux nombres au même dénominateur : $39/75 = 13/25$ et $275 = 11 \times 25$ est un multiple commun à 25 et à $55 = 11 \times 5$. On a alors $a = 39/75 = 13/25 = 143/275$ et $b = 29/55 = 145/275$.
On peut conclure dès maintenant que la réponse D est vraie et, comme on sait qu'il n'y a qu'une bonne réponse, il est alors inutile d'examiner les autres propositions.
A : faux, c'est b qui est supérieur à a
B : faux, entre deux nombres rationnels quelconques, il existe toujours un nombre décimal
C : faux, la fraction 29/55 est irréductible et son dénominateur n'est pas constitué uniquement de

facteurs 2 et 5
D : Il faut ici mettre les deux nombres a et b sur un autre dénominateur commun : 4125 = 55 × 75. On a alors a = 2145/4125, b = 2175/4125 et 40/75 = 2200/4125 n'est donc pas compris entre a et b. Mais le plus simple ici est de vérifier d'abord la réponse E, ce qui évite d'avoir à examiner la réponse D.
E : vrai, voir plus haut

9 – Cent milliards cent un = 100 000 000 101. La bonne réponse est donc D.

10 – Il faut réduire la fraction (notons la F) :
1/3 + 2/5 = 5/15 + 6/15 = 11/15 et 1/15 + 1/7 = 7/105 + 15/105 = 22/105
et donc F = (11/15)/(22/105) = 11/15 × 105/22 = (11 × 105)/(15 × 22) = (11 × 7 × 15)/(15 × 2 × 11) = 7/2.
Les bonnes réponses sont donc A et C, car 7/2 = 35/10 = 3,5.

11 – Les bonnes réponses sont C et D (voir dessins).

12 – Ce nombre s'écrit 246 8-- --- où les cinq tirets représentent les cinq chiffres inconnus. Le chiffre des millions étant 6, le chiffre des unités est donc 3. Le chiffre des centaines de milliers étant 8, le chiffre des milliers est 4. Les trois autres chiffres étant des 0, le nombre en question est donc 246 804 003. Les bonnes réponses sont alors B, C et E.

13 – La remise étant de 18 €, sont taux par rapport au prix de départ est donc 18/300 = 6/100 = 6 %.
Réponse : A.

14 – L'orthocentre d'un triangle est le point de concours de ses trois hauteurs. Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé. Les droites (BE) et (CD) sont donc ici des hauteurs du triangle ABC. Elles se coupent en D qui est donc l'orthocentre cherché.
Réponse : D.

15 – La droite (BE) passe par D et est perpendiculaire à la droite (AC) : c'est donc une hauteur du triangle ADC. De même la droite (BA), passant par A et perpendiculaire à la droite (DC), est une hauteur du triangle ADC. Ces deux hauteurs se coupent en B qui est donc l'orthocentre du triangle ADC.
Réponse : B.

16 – Calculons le nombre N de minutes auquel correspond une année :
N = 60 × 24 × 365 = 525 600 (sans calculatrice, il n'y a guère d'autre solution que de poser les multiplications)
Mon âge est donc alors de 10 000 000/525 600 ~ 10 000 000/500 000, soit environ 100/5 : 20 ans.
Réponse : D.

17 – 3400 × 200 + 530 × 10 = (34 × 2) × (100 × 100) + 530 × 10 = 68 × 10 000 + 5300 = 680 000 + 5300 = 685 300.
Réponse : E.

18 – On fait en fait la division euclidienne de 3630 par 200 : 3630 = 200 × 18 + 30, soit 18 grands cartons et 3 petits cartons.
Réponse : C.

19 – 3290 = 200 × 16 + 90 = 200 × 16 + 50 ×1 + 10 × 4. Le coût est donc de :

$16 \times 7{,}5 + 1 \times 2{,}5 + 4 \times 1{,}1 = 120 + 2{,}5 + 4{,}4 = 126{,}9$ €.
Réponse : C.

20 – Notons nA, nL, et nP les nombres de billes d'Alicia, Lola et Paul respectivement. On a alors :
nA = nL + 2
nL = 2 × nP
nA = nP + 7
donc nP + 7 = nL + 2 et donc nP + 7 = 2 × nP + 2
On en déduit que nP = 5, donc nL = 10, nA = 12 et le nombre total de billes est donc de 27.
Réponse : C.

21 – On peut essayer de simplifier les fractions, mais toutes ne s'y prêtent pas facilement. On peut aussi utiliser la propriété des produits en croix : si L/H = 16/9, alors 9 × L = 16 × H. Une autre solution serait de poser les divisions pour chercher les développements décimaux des différents rapports et les comparer à celui de 16/9 = 1,77..., mais ces divisions ne sont pas faciles ici.
A : 80/45 = (5 ×16)/(5 × 9) = 16/9
B : 104 ×9 = 104 ×10 – 104 = 1040 – 104 = 936 et 58,5 × 16 = 117 × 8 = 1170 – 234 = 936
C : 152 × 9 = 1520 – 152 = 1368 et 85,5 × 16 = 171 × 8 = 342 × 4 = 684 × 2 = 1368
D : 132 × 9 = 1320 – 132 = 1188 et 74 × 16 = 1184 (on pose cette dernière multiplication)
La bonne réponse est donc D.

22 – La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à 180°, dans le triangle IPQ, la somme des angles en P et Q est donc égale à 180 – 110 = 70°.
Dans le triangle PQR, les bissectrices (PI) et (QI) partagent les angles en P et Q en deux angles de même mesure. La somme des angles en P et Q dans le triangle PQR est donc égale au double de la somme des angles en P et Q dans le triangle PQI, soit 2 × 70 = 140°.
L'an gle en R dans le triangle PQR a donc une mesure de 180 – 140 = 40°.
Réponse : A.

23 – Un rectangle est ici défini par la donnée de deux droites verticales distinctes. Il faut donc compter de combien de façon on peut choisir un couple de droites. On a 7 possibilités pour la première et, une fois le choix de celle-ci effectuée, il reste 6 possibilités pour la seconde. On aurait donc ainsi 7 × 6 couples de droites. Mais cette façon de procéder donne deux fois chaque couple (par exemple (AH) et (CJ), puis (CJ) et (AH) qui définissent le même rectangle ACJH). Il faut donc diviser par 2 : 42 : 2 = 21 couples de droites distincts, donnant 21 rectangles.
Les nombres en jeu n'étant pas très élevés, on peut aussi procéder de la façon suivante.
Avec la droite (AH), on peut associer n'importe laquelle des 6 autres droites verticales, ce qui nous donner 6 rectangles. A la droite (BI), on peut associer les 5 droites situées à sa droite (le rectangle formé par les droites (AB) et (BI) a déjà été pris en compte). La droite (CJ) nous donne elle 4 nouveaux rectangles avec les droites situées à sa droite. Et ainsi de suite jusqu'au dernier rectangle formé par les droites (FM) et (GN). On obtient donc un nombre de rectangles égal à 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.
Réponse : E.

24 – La surface d'un disque est égale à $\pi \times r^2$, où r est le rayon du disque. Ce rayon étant ici de 15 cm, la pizza initiale a donc une surface égale à $225 \times \pi$ (en cm²) et chaque convive a une part de $75 \times \pi$. Pour que chacun en ait autant avec un convive supplémentaire, il faudra donc une pizza ayant une surface de $300 \times \pi$. Le nouveau rayon R sera donc tel que $300 \times \pi = \pi \times R^2$, soit $R^2 = 300$ et donc $R = \sqrt{300} = \sqrt{(3 \times 100)} = \sqrt{3} \times \sqrt{100} = \sqrt{3} \times 10 = 10\sqrt{3}$.
Réponse : A

25 – Le pilote A parcourt les 3 tours en 19' et 80'', le pilote B en 19' et 75'', le pilote C en 19' et 94'',

le pilote D en 19' et 92'', le pilote E en 110''.
L'ordre des pilotes est donc : B – A – D – C – E.
Réponse : E.

26 -
A : On écrit les multiples de 4 et on regarde si la différence avec 17 est un multiple de 3 :
17 = 0 + 17   17 = 4 + 13   17 = 8 + 9   17 = 12 + 5   17 = 16 + 1
Le seul cas où l'on a la somme d'un multiple de 4 et d'un multiple de 3 est donc bien 8 + 9.
La réponse A est donc vraie.

On essaie de décomposer 34 de la même façon :
34 = 0 + 34   34 = 4 + 30   34 = 8 + 26   34 = 12 + 22   34 = 16 + 18
34 = 20 + 14   34 = 24 + 10   34 = 28 + 6   34 = 32 + 2
Il y a donc 3 possibilités.
L'autre bonne réponse est donc la D.

27 -
A : faux, 1 l = 1 000 ml et non 5 × 20 = 100 ml.

2,4 m^3 = 2,4 × 1000 = 2 400 l et 1 l = 1 000 ml = 50 expressos de 20 ml chacun.
Donc 2,4 m^3 correspond à 2 400 × 50 = 120 000 expressos.
Réponse : D.

28 -
A : faux
B : vrai, car, la symétrie conservant les distances, les distances RN, RM et RO sont égales.
D : vrai, car la médiatrice d'un segment est la droite reliant les points situés à égale distance des extrémités du segment et on vient de voir que RO = RN.
Comme on sait qu'il n'y a que deux bonnes réponses, il n'est pas nécessaire d'examiner les propositions C et E. Un dessin suffit de toute façon à se convaincre qu'elles sont fausses dans le cas général.

29 – Les quatre enfants pèsent 43,1 (Basile), 43,1 – x, 43,1 – 2x et 43,1- 3x (Daniel). Ils pèsent donc à eux quatre 43,1 + 43,1 – x + 43,1 – 2x + 43,1 – 3x = 4 × 43,1 – 6x (= 157,4 kg). La réponse B est donc vraie.
Daniel et Basile pèsent à eux deux 43,1 + 43,1 – 3x = 2 × 43,1 – 3x.
Charly et Alex pèsent donc ensemble 43,1 - x + 43,1 – 2x = 43,1 – 3x.
La réponse C est donc vraie.

30 -
Il est 7 heures de moins à Houston qu'à Paris. Quand il est 23 h à Paris, il est donc 16 h à Houston.
A est donc vraie.
Arnaud se pose à Houston à 3 h (heure locale) et en repart au bout d'une heure, soit à 4 h (heure locale). Le vol entre Houston et Rio de Janeiro durant 10 h, il arrive donc à Rio quand il est 14 h à Houston. Il est donc alors 17 h à Rio.
B est donc fausse.
Lorsqu'il est 3 h à Houston, il est 10 h à Paris. Le vol a donc duré 11 h.
C est fausse.
Comme on sait qu'il y a trois bonnes réponses, c'est donc que les réponses D et E sont vraies. Vérifions-le tout de même.
Quand il est midi à Paris, il est 5 h à Houston et donc 8 h à Rio de Janeiro. Le décalage entre Paris et Rio de Janeiro est donc de 4 h.

D est donc vraie.
On a vu qu'Arnaud arrive à Rio à 17 h heure locale et que le décalage entre Paris et Rio est de 4 h. Il est donc alors 21 h à Paris. Comme il est parti de Paris à 23 h et qu'il s'est arrêté une heure à Houston, la durée totale des vols est donc bien de 21 h.
E est vraie.

31 – Le rapport entre les rayons est l'inverse du rapport entre les vitesses de rotation, soit r/R = 1200/1500 = 4×300/5×300 = 4/5, ou encore r = 0,8R.
On peut voir dès ici que les valeurs données dans les propositions C, D et E ne vérifient pas ce rapport. Comme R > r, la bonne réponse est donc B. Sinon, on continue le calcul :
On a en outre 2R + 2r = 9 cm, or 2R + 2 × 0,8R = 2R + 1,6R = 3,6R. On a donc R = 9/3,6 = 2,5 cm et donc r = 0,8 × 2,5 = 2 cm.
Réponse : B.

32 – En 8 h, 3 personnes nettoient 1 km de plage. Ces 3 personnes nettoieront donc 6 km de plage en 6 × 8 = 48 h. S'il y a 9 personnes, soit 3 fois plus de personnes, il faudra 3 fois moins de temps, soit 16 h.
Réponse : D.

33 – Il est généralement plus facile de montrer qu'un patron ne convient pas que le contraire.
Patron II : on aurait deux faces à points ou deux faces hachurées côte à côte : impossible
Patron IV et V : idem
Les 2 patrons qui conviennent sont donc les patrons I et III.
Réponses : A et C.

34 -
A : faux, le reste d'une division euclidienne doit être inférieur au diviseur (ici 126) ; la division euclidienne de 26 607 par 126 est donc 26 607 = 126 × 211 + 21.
B : vrai, car on a bien ici 147 < 210.
C : On applique le critère de divisibilité par 11 des nombres entiers en comparant la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs : 2 + 6 + 7 = 15 et 6 + 0 = 6. La différence 15 – 6 n'est pas un multiple de 11 (Remarque : 0 est un multiple de 11 : 0 = 0 × 11), 26 607 n'est donc pas un multiple de 11. C est donc fausse.
On sait qu'il y a trois réponses vraies : C et D sont nécessairement vraies. Vérifions-le.
D : 26 607 = 126 × 210 + 147 : d'une part 210 est évidemment un multiple de 21, donc 126 × 210 aussi ; d'autre part, 147 = 7 × 21 ; la somme de deux multiples de 21 étant un multiple de 21, 26 607 est donc un multiple de 21 : D est vraie.
E : Il suffit de vérifier que 126 × 210 est multiple de 147 : 126 × 210 = (6 × 21) × (7 × 30) = (6 × 30) × (7 × 21) = 180 × 147. 26 607 = 180 × 147 + 147. E est vraie.

35 - Les quatre côtés d'un losange ont même longueur. Le périmètre est donc ici de 4 × 5 = 20 cm.
A est donc vraie.
Le losange a deux angles de 60° et donc deux autres de 120°. Il est donc constitué de eux triangles équilatéraux. Chacun de ces triangles équilatéraux est formé de deux triangles rectangles dont l'hypoténuse mesure 5 cm et l'un des côtés de l'angle droit mesure 2,5 cm. D'après le théorème de Pythagore, on en déduit que la mesure h de l'autre côté de ce triangle rectangle est donnée par $h^2 = 5^2 - (5/2)^2 = 5^2 - 5^2/2^2 = 3\times5^2/2^2$, soit $h = (5/2)\sqrt{3}$.
L'aire de l'un de ces petits triangles est donc égale à $((5/2)\sqrt{3} \times 5/2)/2$ (base×hauteur/2) et l'aire du losange est donc $4 \times ((5/2)\sqrt{3} \times 5/2)/2 = (25/2)\sqrt{3}$.
E est donc vraie.

36 – On peut raisonner en pourcentages : La personne dépense le quart de la somme, il lui reste

donc 75 % de celle-ci. Elle en dépense les deux cinquièmes, soit 30 % de la somme de départ et il reste donc 45 % de la somme initiale. On retrouve celle-ci en divisant 144 par 9 (ce qui donne 5 % de la somme de départ) et en multipliant le résultat par 20, soit (144/9) × 20 = 16 × 20) 320 €.
Réponse : C.
On peut aussi travailler directement sur les fractions données : La personne dépense 1/4 de la somme de départ, il lui en reste donc ¾. Elle dépense alors 2/5 de ¾, soit (2/5) × (¾) = (2×3)/(5×4) = 6/20. Il reste don c maintenant ¾ – 6/20 = 15/20 – 6/20 = 9/20. Et ces neuf vingtièmes de la somme initiale représentent 144 €. La somme de départ était donc égale à 20/9 de 144 €, soit 20×144/9 = 320 €.

37 – On utilise le résultat selon lequel la médiane d'un triangle (droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé) le partage en deux triangles de même aire.
On a donc : Aire(BJC) = Aire(AJB) = Aire(ABC)/2
Aire(LBC) = Aire(LJC)=Aire(IJB) = Aire(AIJ) = Aire(AJB)/2
Aire(AIK) = Aire(KIJ) = Aire(AIJ)/2
On en déduit alors que :
A est vraie.
B est vraie : Aire (AIK) = Aire(AIJ)/2 = Aire(LBC)/2
C est vraie.
D est fausse : Aire(AIJ) = Aire(AJB)/2 = Aire(ABC)/4
E est vraie : Aire(AIK) = Aire(AIJ)/2 = Aire(ABC)/8

38 – Prenons un prix initial de 100 €. Au bout d'un an, ce prix est devenu 120 €. Au bout de deux ans, il est de 120 – 10 % de 120 = 120 – 12 = 108 €. La troisième année, on est à 108 – 10 % de 108 = 108 – 10,8 = 97,2 €. Et enfin, au bout de quatre ans, l'objet coûtant 120 € au départ coûte maintenant 97,2 + 2 % de 97,2 = 97,2 + (2×97,2)/100 = 97,2 + 194,4/100 = 97,2 + 1,944 = 999,144 €.
La seule réponse vraie est donc E.

39 -
A : faux, car elle a cinq faces, alors qu'un tétraèdre est un polyèdre à quatre faces.
B : vrai, car les côtés [AE] et [AH] sont des arêtes du cube et ont donc même longueur.
C : vrai, car la droite (GF) est orthogonale au plan (ABEF) et est donc perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par le point A.
D : faux, car AEH est formé de deux côtés et une diagonale d'une face carrée du cube, alors que AFG est formé, d'un côté et d'une diagonale d'une face carrée, et d'une diagonale intérieure du cube ([AG]).
E : vrai, ces deux triangles ont tous deux pour côtés une arête du cube, une diagonale d'une face carrée du cube et une diagonale intérieure du cube.

40 – Commençons par le plus simple :
D est vraie : la ribambelle est symétrique par rapport aux deux axes, horizontal et vertical, passant par le centre de la figure.
E est fausse : un troisième axe de symétrie serait oblique par rapport aux deux précédents, ce qui n'est manifestement pas le cas.
Procédons ensuite par élimination :
A est fausse : les deux découpes supérieures se rejoignant, les morceaux de la ribambelle ne seraient plus liés.
C est fausse : ce découpage comporte une découpe perpendiculaire à l'axe de symétrie horizontal de la ribambelle, que l'on ne retrouve pas sur la ribambelle dépliée.
La bonne réponse est donc la B.