Université de Pau et des Pays de l'Adour
Département de Mathématiques Année 2008-2009

Mathématiques Spécifiques - L3 Concours Publics

NOMBRES

Série 3

Exercice 1.

Philippe a 216 carreaux blancs et 270 carreaux verts. Il désire faire des paquets de telle sorte que :

Tous les paquets contiennent le même nombre de carreaux blancs,
tous les paquets contiennent le même nombre de carreaux verts,
tous les carreaux blancs et verts soient utilisés.

1. Quel est le nombre maximal de paquets que Philippe pourra réaliser ?

2. Combien y aura t-il alors de carreaux blancs et de carreaux verts dans chaque paquet ?

3. Ces carreaux sont destinés à couvrir le sol carré d'une salle.

Sachant que ces carreaux sont identiques, ont été mis bord à bord dans le même sens, ont pour dimensions $36cm \times 48cm$ et que la mesure du côté du sol est comprise entre 4 et 5 mètres, combien de carreaux ont été utilisés pour couvrir tout le sol ?

Exercice 2.

Le sol d'une salle est rectangle dont les dimensions sont proportionnelles aux nombres 6 et 7. Ce sol a été recouvert avec des carreaux de grès émaillé de forme carrée en respectant les conditions suivantes :

- (C1) On n'a utilisé qu'un seul type de carreaux (même matériau, même décor et même dimension),
- (C2) on a placé un nombre entier de carreaux dans chacune des dimensions (on n'a pas fractionné les carreaux).

Le carreleur a utilisé 2688 carreaux dont la mesure du côté est égale à 19 cm.

Quelles sont les dimensions de la salle ?

Exercice 3.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante : pour tout couple d'entiers naturels (n, p) on a :
$$pgcd(U_n, U_p) = pgcd(U_n, U_{n+p}).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un diviseur de U_0.

2. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (n, p), on a :

$$pgcd(U_n, U_p) = U_{pgcd(n,p)}.$$

Exercice 4.

Soient a et b deux entiers naturels. Soit $d = pgcd(a, b)$ et soit $m = ppcm(a, b)$.

a. Trouver tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

$$\begin{cases} 0 < a < b, \\ 2m + 3d = 78, \\ a \text{ ne divise pas } b. \end{cases} \tag{1}$$

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

$$m^2 - 5d^2 = 2000.$$

Exercice 5.

On admet que 1999 est un nombre premier.

1. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour $pgcd$ 1999.

On considère l'équation (E) d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, (E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que : (E) admet deux solutions dans $\mathbb{N}$.

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
Si oui, précisez la deuxième solution.

3. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E)?

4. Montrer que tout n solution de (E) est un diviseur de 11994. Déduisez-en toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admet deux solutions entières.

Exercice 6.

Soit $N = \overline{cdu}$ un nombre à trois chiffres. Les chiffres c, d et u sont tous différents.

A partir des chiffres de N, on construit tous les nombres à deux chiffres contenant des chiffres différents. La somme de ces nombres à deux chiffres est égale à N.

Déterminer tous les nombres N qui ont cette propriété.