Université de Pau et des Pays de l'Adour
U.F.R. de Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année 2008-2009

Mathématiques spécifiques : Nombres

L3 Concours Publics

TD 5

Exercice 1

Dans cet exercice, on dira que deux parts sont "égales" lorsqu'elles ont la même aire.

1. On partage un gâteau rectangulaire par ses diagonales. Les parts sont-elles "égales" ? Justifier.

2. On partage un gâteau rectangulaire en traçant trois segments à partir d'un même sommet: un segment vers le sommet opposé et deux segments vers les milieux des côtés opposés (Figure 1). Les parts sont-elles "égales" ? Justifier.

3. ABC est un triangle rectangle en C. $[AC]$ est partagé en quatre segments de même longueur CJ, et $[CB]$ en six segments de même longueur CI (Figure 2).
Les polygones EFC, $DGFE$ et $ABGD$ ont-ils la même aire ? Justifier.
On pourra utiliser l'aire du rectangle $CIKJ$ comme unité d'aire.

Exercice 2

En empilant dix cubes comme sur la figure 3, on construit un escalier de hauteur : $h = 4$.

1. Indiquer le nombre de cubes nécessaires pour réaliser respectivement des escaliers de hauteur 5 et de hauteur 9.

2. Y-a-t-il proportionnalité entre la hauteur des escaliers et le nombre de cubes nécessaires pour les construire ? Justifier votre réponse.

3. Avec deux escaliers identiques on peut construire un "mur" (Figure 4).
A partir de l'observation de cette construction, déduire la formule qui donne le nombre de cubes nécessaires à la réalisation d'un escalier de hauteur h.

4. Calculer la hauteur de l'escalier le plus haut que l'on peut construire avec 3523 cubes.
Combien de cubes seront inutilisés ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

La figure 5 est un rectangle découpé en cinq carrés A, B, C, D et E.

1. On appelle a, b, c, d et e les longueurs respectives des côtés de ces carrés. Exprimer a, b, d et e en fonction de c.

2. On suppose que le rectangle représente une feuille de papier de 3610 cm^2. Calculer c puis trouver les dimensions de la feuille.

3. On suppose que le rectangle représente une plaque métallique homogène. La masse de la pièce B est 100 grammes. Calculer la masse de la pièce A à un décigramme près.

4. On suppose que le rectangle représente la vue de dessus d'un assemblage de cinq cubes. Le volume du cube A est 2 m^3. Calculer le volume du cube C. Donner la réponse en dm^3.

Exercice 4

Soient a, b, c trois chiffres distincts et différents de 0. A cet ensemble de trois chiffres, on associe la famille des six nombres à trois chiffres qui s'écrivent en utilisant une fois le chiffre a, une fois le chiffre b et une fois le chiffre c.
Par exemple, aux trois chiffres 2, 5 et 7, on associe la famille constituée des six nombres suivants 257; 275; 527; 572; 725 et 752.

On appelle M la moyenne de cette famille.

1. Calculer M correspondant à la famille donnée dans l'exemple ci-dessus.

2. Montrer que dans le cas général on a $M = 37 \times (a + b + c)$.

3. Trouver tous les ensembles de trois chiffres distincts et différents de 0 qui permettent de former une famille dont la moyenne M des six nombres vaut 370.

Exercice 5

1. Deux bateaux partent en même temps le premier juillet du quai de Nouméa. Ils effectuent tous deux des rotations régulières, mais le premier, des rotations de 21 jours et le deuxième des rotations de 24 jours.
A quelle date les deux bateaux repartiront-ils à nouveau en même temps de Nouméa ?

2. Trois bateaux partent en même temps le premier mars du quai de Nouméa. Ils effectuent des rotations régulières, mais le premier, des rotations de 45 jours, le deuxième de 30 jours et le troisième de 27 jours.
A quelle date les trois bateaux repartiront-ils à nouveau au même temps de Nouméa ?

Exercice 6

Soient $a_n = 4 \times 10^n - 1$, $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$, avec $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer par récurrence que $(10^n - 1)$ est un multiple de 3.
En déduire que a_n et c_n sont divisibles par 3.

2. a. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que :

$$pgcd(m, n) = pgcd(m, m - n).$$

b. Montrer que $pgcd(b_n, c_n) = pgcd(c_n, 2)$. Déduisez-en que b_n et c_n sont premiers entre eux.

3. On considère l'équation

$$b_3 x + c_3 y = 1, \qquad (1)$$

d'inconnues x, y qui sont des entiers relatifs.

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.
b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres b_3 et c_3. Déduisez-en une solution particulière de (1).
c. Résoudre l'équation (1).

Exercice 7

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. Déduisez-en que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer le reste de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier : $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
b. Démontrer que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.
c. Etudier le cas où $p = 3n + 2$.

4. On considère les nombres $a = 2^3 + 2^6 + 2^9$ et $b = 2^4 + 2^8 + 2^{12}$.
a. Vérifier que ces nombres sont des entiers de la forme A_p.
b. Sont-ils divisibles par 7 ?

Exercice 8

1. Déterminer toutes les décompositions additives du nombre 33, en utilisant seulement les nombres 3, 5 et 7, sans nécessairement les utiliser tous (à titre d'exemple, on peut écrire $33 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3$). On présentera clairement la méthode choisie pour déterminer ces décompositions.

2. Au rugby, les équipes marquent des points lors de quatre phases de jeu :
en réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points,
en réussissant un drop pour 3 points,
en réussissant un essai non transformé pour 5 points,
en réussissant un essai transformé pour 7 points.

a. Pierre affirme que son équipe a marqué 33 points grâce à deux essais et plusieurs pénalités.
Est-ce possible ? Justifier.
b. Paul affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais, et en réussissant autant de drops que de pénalités.
Est-ce possible ? Justifier.
c. Une équipe a marqué 20 points. Sachant qu'aucun drop n'a été réussi, trouver toutes les manières dont ces 20 points ont pu être obtenus.

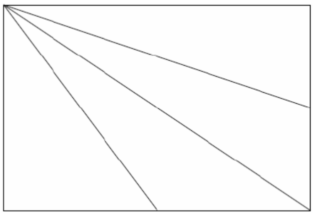

Figure 1

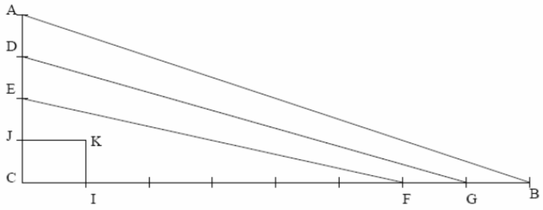

Figure 2

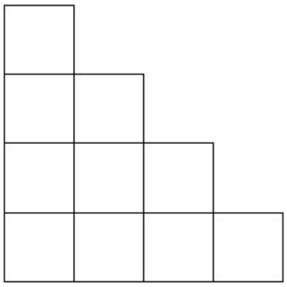

Figure 3

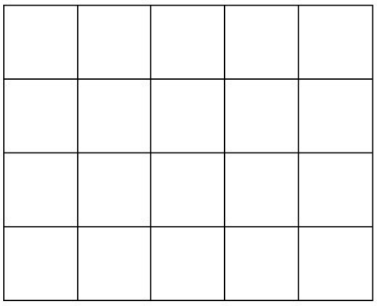

Figure 4

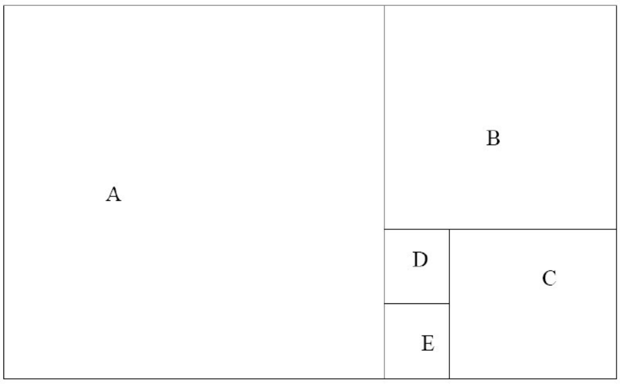

Figure 5