Université de Pau et des Pays de l'Adour
U.F.R. de Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année 2008-2009

Mathématiques spécifiques : Nombres

L3 Concours Publics

TD 6

Exercice 1

On justifiera toutes les réponses.

1. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 207 ?
Si oui, lesquels ?

2. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 329 ?
Si oui, lesquels ?

3. Caractériser les entiers naturels qui sont la somme de trois entiers consécutifs.

4. Déterminer toutes les valeurs possibles de d (avec $0 \leq d \leq 9$) pour que le nombre dont l'écriture est $\overline{47d5}$, en base 10, soit la somme de trois entiers naturels consécutifs.

Exercice 2

Pour la fête de l'école, des parents d'élèves ont confectionné des flans pâtissiers et des tartes aux pommes.

1. Une part de flan pâtissier est vendue $1,50$ euros et une part de tartes aux pommes 2 euros. Dans l'après-midi, 72 parts de gâteaux ont été venues pour une recette totale de $122,00$ euros. Déterminer le nombre de parts de chaque sorte qui ont été vendues
a) par une méthode algébrique ;
b) par un raisonnement de type arithmétique.

2. A la fin de l'après-midi, il reste une tarte aux pommes entière. Quatre enfants se partagent ce gâteau de la façon suivante : Jean-Marc se sert en premier et en prend un tiers ; Sophie prend trois huitièmes de ce qu'a laissé Jean-Marc ; enfin, Antoine et Rémi se partagent le reste de façon équitable.
A quelle fraction de tarte correspond la portion de chaque enfant ?

Exercice 3

Toutes les réponses seront justifiées.

1. Donner le reste des divisione par 6 et par 3 de chacune des trois sommes suivantes

$$5 + 7 + 9, \qquad 15 + 17 + 19, \qquad 1527 + 1529 + 1531$$

2. Plus généralement :
a) Donner le reste de la division par 6 de la somme de tois nombres impairs consécutifs.
b) Donner le reste de la division par 3 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.

3. Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est 12027.

4. On cherche un nombre p tel que la somme de p nombres entiers impairs consécutifs soit toujours un multiple de 5.
Déterminer la plus petite valeur possible de p.

Exercice 4

Un nombre entier naturel N est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.
Par exemple, 28 est un nombre parfait.
En effet les diviseurs de 28 sont : $1, 2, 4, 7, 14, 28$ et $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

1. Montrer que 6 et 496 sont des nombres parfaits.

2. 120 est-il un nombre parfait ?
Justifier votre réponse.

3. On admet qu'un nombre entier pair N est parfait si et seulement si il est de la forme :

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1),$$

n étant un entier supérieur ou égal à 1 tel que $2^{n+1} - 1$ soit un nombre premier.

Appliquer la formule pour n compris entre 1 et 4.
Quels résultats retrouve-t-on ?

On donne ci-dessous la liste des nombres premiers compris entre 100 et 150.
En utilisant la proriété ci-dessus, déterminer le plus petit nombre parfait pair supérieur au nombre 496.

Nombres premiers compris entre 100 *et* 150 *:*
101 *;* 103 *;* 107 *;* 109 *;* 113 *;* 127 *;* 131 *;* 137 *;* 139 *;* 149.