TLM046V (équations différentielles) • Année 2008/2009 • Série d'exercices n°2

2.1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y^{'} - t\,y = te^{t^2/2}$$

1) en résolvant l'équation homogène puis en utilisant la méthode de variation de la constante ;

2) en multipliant (E) par une fonction bien choisie (cf cours).

2.2. 1) Montrer que sur tout intervalle ne contenant pas 0 les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y^{'} + xy = 1 + x^2$$

sont de la forme :

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln|x| + \lambda}{x} \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

2) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
On pourra s'inspirer de la méthode de l'exercice 1.5

3) Trouver les solutions maximales de (E).

2.3. Trouver puis représenter graphiquement les solutions maximales de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad |t|\,y^{'} + \left(y - t^2\right) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

On commencera par résoudre (E) dans $]-\infty, 0[$ et dans $]0, +\infty[$.

2.4. Déterminer les solutions maximales strictement positives de (E) dans $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad -3t^2y^{'} + ty - y^4 = 0.$$

On pourra effectuer un changement d'inconnue en remarquant que l'équation (E) est d'un type connu (cf cours).

2.5. *(quelques exemples de résolution d'équations différentielles à variables séparées)*

I. Résoudre :

$$(1) \qquad y^{'} = e^{x+y}.$$

II. 1) On considère une fonction dérivable f de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in\,]-1, 1[\,,\ f^2(t) + t^2 = 1.$$

i) Justifier que f ne peut pas s'annuler dans $]-1,1[$.
ii) Déterminer f (deux possibilités). Peut-on prolonger f en une fonctions dérivable en -1 ? en 1 ?

2) Chercher les solutions maximales de l'équation différentielle à variables séparées :

$$(2) \qquad yy' = -8t$$

(si y est une solution, on cherchera une relation reliant $y(t)$ et t et on cherchera à exprimer $y(t)$ en fonction de t en s'inspirant de la question 1).

III. On se propose de vérifier que l'équation différentielle

$$(3) \qquad y^{'}ye^{-y} = xe^{x}$$

admet **au moins une** solution sur $]0,+\infty[$.

1) On suppose qu'il existe une solution y de (3) sur $]0,+\infty[$.
i) Trouver une relation entre y et x de la forme $\psi(y(x)) = \varphi(x) + \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
ii) Tracer le tableau de variations de ψ sur $]-\infty,0[$. En déduire que ψ un C^1-difféomorphisme de $]-\infty,0[$ sur $]-1,+\infty[$.

2) Vérifier que la fonction $x \mapsto \psi^{-1}(\varphi(x))$ est bien une solution de (3) sur $]0,+\infty[$.

2.6. *(un exemple d'équation différentielle n'admettant pas de solution)*

On rappelle (théorème de Darboux) que si I est un intervalle non vide et φ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$, alors $\varphi^{'}$ possède la propriété des valeurs intermédiaires sur I et donc $\varphi^{'}(I)$ est un intervalle.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}.$$

On suppose qu'il existe une solution (y, I) de l'équation différentielle

$$y^{'} = f(y).$$

1) Justifier que $y(I)$ et $y^{'}(I)$ sont deux intervalles.

2) Montrer que : $\exists a \in \{-1,1\}$, $\forall t \in I$, $y^{'}(t) = a$.
En déduire que l'intervalle $y(I)$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

3) Justifier qu'on est conduit à une contradiction.