

Mathématiques Générales 3
Série n° 2

Exercice 1

La fonction réelle f définie par

$$f(x) = x - x^3 + x^5 \ln |x|$$

admet-elle un développement limité au voisinage de 0 d'ordre 3? D'ordre 4? D'ordre 5?

Exercice 2

Déterminer le Développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction f définie par:

$$\text{a. } f(x) = (1+x)^{\sin x}, \quad n = 4, \quad \text{b. } f(x) = e^{\cos x}, \quad n = 3.$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{[\ln(1+x)]^3}, \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{(\tan x)^2}$$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right)$$

Exercice 5

Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(\tan x)^2}{x(1 - \cos x)}$$

Exercice 6

Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie par $f(x) = e^x$. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{3x^5}{120}$$