INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Limites et continuité de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

Sommaire

Définition 1.1 (Valeur absolue)

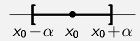
*On appelle **valeur absolue** d'un réel x, le nombre réel noté $|x|$ défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

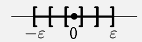
*Sur la droite représentant les nombres réels, $|x|$ est la **distance** entre le point d'abscisse x et l'origine.*

Proposition 1.2 (Propriétés)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x \times y| = |x| \times |y|,\ \ |x^n| = |x|^n$ et, si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} |x \pm y| \leqslant |x| + |y| & \text{(}1^{re}\text{ inégalité triangulaire)} \\ \big||x| - |y|\big| \leqslant |x \mp y| & \text{(}2^{e}\text{ inégalité triangulaire)} \end{cases}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,x_0) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} |x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ |x - x_0| \leqslant \alpha \iff x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha \end{cases}$



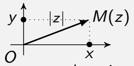
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| \leqslant \varepsilon) \iff x = 0\big]$
   Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$



Définition 1.3 (Module)

*On appelle **module** d'un complexe $z = x + iy$ avec $x = \Re e(z)$ et $y = \Im m(z)$, le nombre réel noté $|z|$ défini par :*

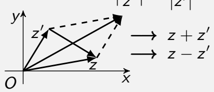
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



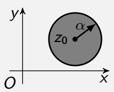
*Dans le plan représentant les nombres complexes, $|z|$ est la **distance** entre le point de coordonnées (x,y) (ou d'**affixe** z) et l'origine.*

Proposition 1.4 (Propriétés (facultatif))

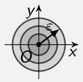
1. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \iff z = 0$
2. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |z \times z'| = |z| \times |z'|,\ |z^n| = |z|^n$ et, si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
3. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \begin{cases} |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'| \\ \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \mp z'| \end{cases}$ inégalités triangulaires



4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (z,z_0) \in \mathbb{C}^2,\ |z - z_0| \leqslant \alpha \iff M(z) \in \mathcal{D}_{M(z_0),\alpha}$

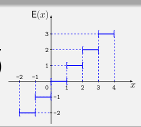


5. $\forall z \in \mathbb{C},\ \big[(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |z| \leqslant \varepsilon) \iff z = 0\big]$
   Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{O,\varepsilon} = \{O\}$



Théorème-définition 1.5 (Partie entière)

*Pour tout réel x, il existe un **unique entier** n tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est appelé **partie entière** du réel x, il est noté $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.*



Proposition 1.6 (Propriétés)

Soit x un nombre réel. On a :

1. $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$ et $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$;
2. $\mathrm{E}(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$;
3. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x) + n$.

Exemple 1.7 (Partie entière et décimales (facultatif))

Soit x un réel **positif** et $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ son **écriture décimale propre** (a_0 étant un naturel et $a_1, a_2, a_3, \dots$ des chiffres ne contenant pas de suite infinie de 9). Alors

- le nombre a_0 est la **partie entière** de x : $a_0 = \mathrm{E}(x)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n^e décimale de x s'obtient selon
  $$a_n = \mathrm{E}(10^n x) - 10\,\mathrm{E}(10^{n-1} x).$$

Définition 1.8 (Majorant/Minorant)

1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.*
   *On dit que α est un **majorant** de A ou que α **majore** A si $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$.*
   *On dit que α est un **minorant** de A ou que α **minore** A si $\forall x \in A,\ x \geqslant \alpha$.*
2. *Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui admet (au moins) un majorant (resp. un minorant), on dit qu'elle est **majorée** (resp. **minorée**).*
3. *Si A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**, ce qui équivaut à : $\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant M$.*
4. *On dit que A admet un **plus grand élément** (resp. un **plus petit élément**) α lorsque α est **à la fois** un majorant (resp. un minorant) de A **et** un élément de A. S'il existe, α s'appelle aussi le **maximum** (resp. le **minimum**) de A et se note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).*

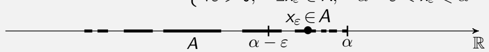
Remarque 1.9 (Cas des complexes)

On peut étendre la notion d'ensemble borné au cas des nombres complexes en remplaçant la **valeur absolue** par le **module** :
Soit A une partie non vide de $\mathbb{C}$. On dit que A est **bornée** lorsque

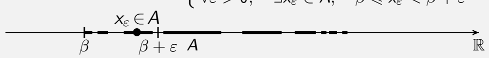
$$\exists M > 0,\ \forall z \in A,\ |z| \leqslant M.$$

Théorème-définition 1.10 (Borne supérieure/inférieure)

1. *Pour toute partie **non vide et majorée** A de $\mathbb{R}$, il existe un **unique** réel α qui est **le plus petit des majorants** de A ; ce réel s'appelle la **borne supérieure** de A et on le note $\sup(A)$. Autrement dit :*
   $$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & x \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x_\varepsilon \in A, \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant \alpha \end{cases}$$



2. *Pour toute partie **non vide et minorée** A de $\mathbb{R}$, il existe un **unique** réel β qui est **le plus grand des minorants** de A ; ce réel s'appelle la **borne inférieure** de A et on le note $\inf(A)$. Autrement dit :*
   $$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & \beta \leqslant x \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x_\varepsilon \in A, \quad \beta \leqslant x_\varepsilon < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

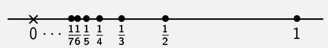


Par convention,

- *si A est une partie **non vide non majorée**, on pose $\sup(A) = +\infty$;*
- *si A est une partie **non vide non minorée**, on pose $\inf(A) = -\infty$;*
- *on pose également $\sup(\varnothing) = -\infty$ et $\inf(\varnothing) = +\infty$.*

Exemple 1.11

1. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont **ni majorés ni minorés**, ils admettent $-\infty$ et $+\infty$ pour borne inférieure et borne supérieure.
2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
   - Les intervalles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ sont **bornés** et admettent tous a pour borne inférieure et b pour borne supérieure.
   - L'intervalle $[a,b]$ admet a pour plus petit élément et b pour plus grand élément, alors que l'intervalle $]a,b[$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
   - Les intervalles $[a,+\infty[$ et $]a,+\infty[$ sont **minorés** mais **pas majorés**, ils admettent a pour borne inférieure et $+\infty$ pour borne supérieure.
3. Soit $A = \left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.



   - L'ensemble A est non vide, majoré par 1 et minorée par 0.
   - On a $1 \in A$ donc $\sup(A) = \max(A) = 1$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} > 0$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ (choisir un naturel $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$).
     Donc $\inf(A) = 0$. Or $0 \notin A$, donc A n'a pas de plus petit élément.

Définition 1.12 (Cas des fonctions et des suites)

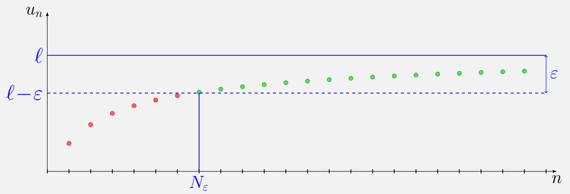
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f est **majorée** (resp. **minorée**) sur D si*
  $$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \leqslant \alpha \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant \alpha).$$
- *Si f est **majorée** sur D alors $\sup\{f(x), x \in D\}$ est un nombre **fini** et se note $\sup_{x \in D} f(x)$.*
- *Si f est **minorée** sur D alors $\inf\{f(x), x \in D\}$ est un nombre **fini** et se note $\inf_{x \in D} f(x)$.*
- *Si f est une fonction **non majorée**, on pose par convention $\sup_{x \in D} f(x) = +\infty$.*
- *Si f est une fonction **non minorée**, on pose par convention $\inf_{x \in D} f(x) = -\infty$.*
- *De manière analogue, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on note*
  $$\sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \quad \text{et} \quad \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

① Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



Le nombre ℓ est caractérisé par

$$[\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ell] \quad \text{et} \quad [\forall \varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad u_{N_\varepsilon} > \ell-\varepsilon].$$

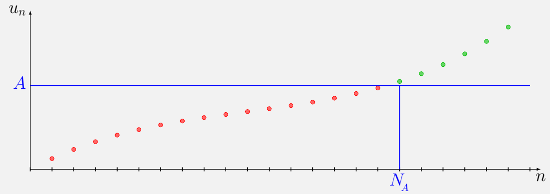
Par croissance, on a $\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad [n>N_\varepsilon \Longrightarrow \ell-\varepsilon<u_n\leqslant\ell]$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** et admet ℓ pour limite.

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

② Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell=+\infty$ (par convention).



On a

$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists N_A\in\mathbb{N},\quad u_{N_A}>A.$$

Par croissance, on a $\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists N_A\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad [n>N_A \Longrightarrow u_n>A]$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** et admet $+\infty$ pour limite.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 1.14 (Théorème de la limite monotone)

① *Toute suite **croissante** et **majorée** est **convergente**.*
*Toute suite **croissante** et **non majorée** est **divergente** de limite $+\infty$.*

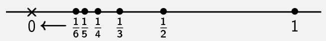
② *Toute suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**.*
*Toute suite **décroissante** et **non minorée** est **divergente** de limite $-\infty$.*

De manière unifiée :

- *si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle **croissante**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$;*
- *si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle **décroissante**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

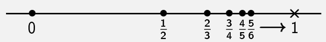
Exemple 1.15 (Suite des inverses)

① Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}$.



La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante et minorée** e.g. par 0.
Elle est donc **convergente** et l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = 0$.

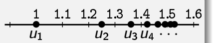
② Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = 1-\dfrac{1}{n}$.



La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante et majorée** e.g. par 1.
Elle est donc **convergente** et l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = 1$.

Exemple 1.16 (Deux séries de Riemann)

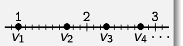
① Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} = 1+\dfrac14+\dfrac19+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$.



- On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**.
- On a $\forall k\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$,
  donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = 1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2} < 1+\sum\limits_{k=2}^{n}(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}) = 2-\dfrac{1}{n}<2$.
  Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**.

En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.

② Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} = 1+\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt3}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.



- On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>0$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**.
- On a $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$,
  donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n>\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+1}-1$.
  Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas **majorée**.

En conclusion, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = +\infty$.

Un peu de vocabulaire qui sera utilisé dans la suite :

Définition 1.17 (Notion de voisinage)

① *On dit qu'une propriété dépendant d'un réel x est vraie **au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I=]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x\in I\backslash\{x_0\}$ (ce qui ne l'empêche pas d'être éventuellement vraie pour x_0 également).*

② *On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage de $+\infty$** (resp. $-\infty$) lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I=]A,+\infty[$ (resp. $]-\infty,A[$) avec $A\in\mathbb{R}$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x\in I$.*

Définition 1.18 (Droite réelle achevée)

*On appelle **droite réelle achevée** l'ensemble des réels auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$. Cet ensemble est noté $\overline{\mathbb{R}}$. Formellement :*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} = [-\infty,+\infty].$$

Dans toute la suite, sauf mention contraire, f désignera une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Définition 2.1 (Limite finie en l'infini)

① *Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.*
*On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $+\infty$** lorsque*

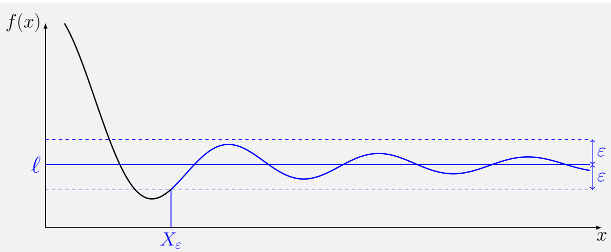
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists X_\varepsilon\in\mathbb{R},\quad \forall x\in D_f,\quad x>X_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

*Si une telle limite existe, alors elle est **unique**.*
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=\ell$, ou encore $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$ ou $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}\ell$.

② *Soit une fonction f définie au voisinage de $-\infty$.*
*On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $-\infty$** lorsque*

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists X_\varepsilon\in\mathbb{R},\quad \forall x\in D_f,\quad x<X_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=\ell$, ou encore $f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}\ell$ ou $f\underset{-\infty}{\longrightarrow}\ell$.



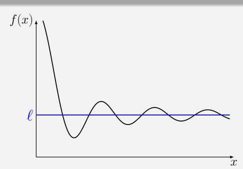
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists X_\varepsilon\in\mathbb{R},\quad \forall x\in D_f,\quad [x>X_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon]$$

Définition 2.2 (Asymptote horizontale)

*Lorsque $\lim\limits_{+\infty} f=\ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=\ell$, on dit que la droite d'équation $y=\ell$ est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de f.*

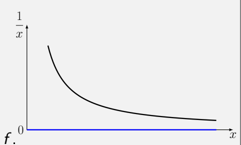


Exemple 2.3 (Fonction « inverse »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

On a $\lim\limits_{+\infty} f=0$, donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.



Définition 2.4 (Limite infinie en l'infini)

Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.

① *On dit que f **admet pour limite $+\infty$** en $+\infty$ lorsque*

$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists X_A\in\mathbb{R},\quad \forall x\in D_f,\quad x>X_A \Rightarrow f(x)>A.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, ou encore $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ ou $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

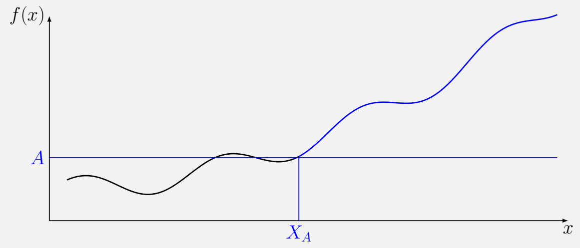
② *On dit que f **admet pour limite $-\infty$** en $+\infty$ lorsque*

$$\forall B\in\mathbb{R},\quad \exists X_B\in\mathbb{R},\quad \forall x\in D_f,\quad x>X_B \Rightarrow f(x)<B.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$, ou encore $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ ou $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

Remarque 2.5

Les définitions précédentes s'adaptent aisément au cas d'une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et qui peut donc avoir pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists X_A\in\mathbb{R},\quad \forall x\in D_f,\quad [x > X_A \Longrightarrow f(x) > A]$$

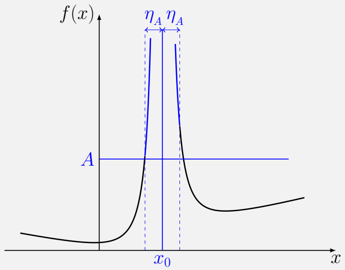
Définition 2.6 (Limite d'une suite)

1. *On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un nombre ℓ (ou **tend vers** ℓ) lorsque*
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n-\ell| < \varepsilon.$$
*On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.*
*Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.*
2. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **a pour limite** $+\infty$ (ou **tend vers** $+\infty$) si*
$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists N_A\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad n > N_A \Longrightarrow u_n > A.$$
3. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **a pour limite** $-\infty$ (ou **tend vers** $-\infty$) si*
$$\forall B\in\mathbb{R},\quad \exists N_B\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad n > N_B \Longrightarrow u_n < B.$$

Définition 2.7 (Limite infinie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0\in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f.

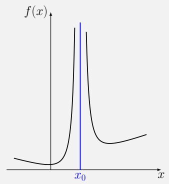
1. *On dit que f **admet pour limite** $+\infty$ **en** x_0 lorsque :*
$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists\eta_A>0,\quad \forall x\in D_f,\quad |x-x_0|<\eta_A \Longrightarrow f(x) > A$$
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ ou $f \underset{x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
2. *On dit que f **admet pour limite** $-\infty$ **en** x_0 lorsque :*
$$\forall B\in\mathbb{R},\quad \exists\eta_B>0,\quad \forall x\in D_f,\quad |x-x_0|<\eta_B \Longrightarrow f(x) < B$$
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$, ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$ ou $f \underset{x_0}{\longrightarrow} -\infty$.



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists\eta_A>0,\quad \forall x\in D_f,\quad [|x-x_0|<\eta_A \Longrightarrow f(x) > A]$$

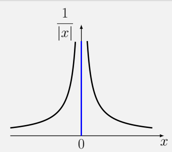
Définition 2.8 (Asymptote verticale)

*Lorsque $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote (verticale)** à la courbe représentative de f.*



Exemple 2.9 (Fonction « inverse absolue »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par
$$f(x) = \frac{1}{|x|}.$$
On a $\lim\limits_{0} f = +\infty$, donc l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

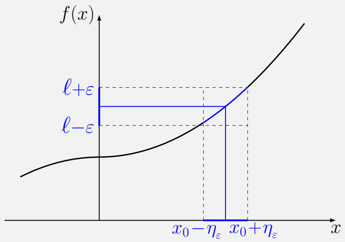


Définition 2.10 (Limite finie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0\in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f.
*On dit que f **admet le réel** ℓ **pour limite en** x_0 lorsque*

- *première formulation :*
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta_\varepsilon>0,\quad \forall x\in D_f,\quad |x-x_0|<\eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon;$$
- *deuxième formulation :*
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta_\varepsilon>0,\quad \forall x\in D_f,\quad x\in]x_0-\eta_\varepsilon, x_0+\eta_\varepsilon[\Longrightarrow f(x)\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[;$$
- *troisième formulation :*
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta_\varepsilon>0,\quad f(]x_0-\eta_\varepsilon, x_0+\eta_\varepsilon[\cap D_f)\subset]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[.$$

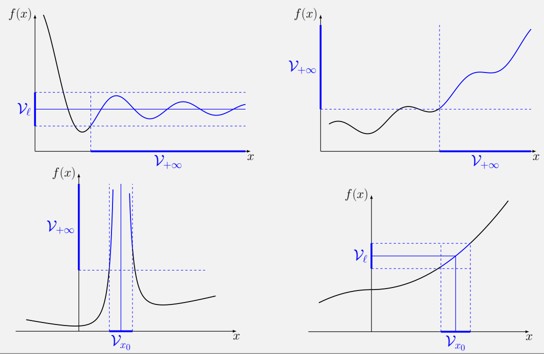
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$, ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{x_0}{\longrightarrow} \ell$.



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta_\varepsilon>0,\quad \forall x\in D_f,\quad [|x-x_0|<\eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon]$$
$$\text{ou encore } x\in]x_0-\eta_\varepsilon, x_0+\eta_\varepsilon[\Longrightarrow f(x)\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$$
$$\text{ou encore } f(]x_0-\eta_\varepsilon, x_0+\eta_\varepsilon[\cap D_f)\subset]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$$

Définition 2.11 (Unification des quatre cas)

Soit $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $x_0\in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f, et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.
*La fonction f **admet** ℓ **pour limite en** x_0 lorsque :*
pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 tel que $f(\mathcal{V}_{x_0}\cap\mathcal{D}_f)\subset\mathcal{V}_\ell$.



Proposition 2.12 (Unicité/continuité)

1. *Si f admet une limite en x_0 alors cette limite est **unique**.*
2. *Si f admet une limite **finie** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0.*
3. *Si $x_0\in D_f$ et si f admet pour limite ℓ en x_0 alors $\ell = f(x_0)$.*
*On dit alors que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).*

Remarque 2.13

1. Lorsque $x_0\in D_f$ on définit parfois $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$ par
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta_\varepsilon>0,\quad \forall x\in D_f,\quad \mathbf{0} < |x-x_0|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$
On peut définir de même $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = +\infty$.
2. Les définitions 2.1 et 2.10 peuvent s'étendre au cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (et même de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ pour la 2.10...) en remplaçant les **valeurs absolues** par des **modules.** On a alors le résultat ci-dessous.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(x) = f_1(x)+if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\ell_1+i\ell_2\in\mathbb{C}$ et $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. On a
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1+i\ell_2 \iff \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \ell_1 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \ell_2\right).$$

Définition 2.14

❶ *On dit que f **admet le réel ℓ pour limite à gauche en x_0** si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

❷ *On dit que f **admet $+\infty$** (resp. $-\infty$) **pour limite à gauche en x_0** si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta_A > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \eta_A < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < A).$$

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

On définit de la même manière la notion de **limite à droite** : il suffit, dans les définitions ci-dessus, de remplacer $x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0$ par $x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon$.

Proposition 2.15

❶ *Si $x_0 \notin D_f$, f admet une limite en x_0 ssi f admet une limite **à droite** et une limite **à gauche** en x_0 et si ces limites sont **égales**.*

❷ *Si $x_0 \in D_f$, il faut de plus que :* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$*, ce qui revient à dire que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).*

Proposition 2.16 (Lien fonctions–suites)

*Soit $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux énoncés suivants sont **équivalents** :*

❶ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

❷ *Pour toute suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$, *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

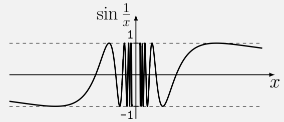
Corollaire 2.17 (Un critère de divergence)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. S'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x_0$ *et les suites-images par f : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**, alors f **n'admet pas** de limite en x_0.*

Exemple 2.18 (Fonction « sinus inverse »)

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Examinons si elle admet une limite en $x_0 = 0$.

- Posons $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$.
- Les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**.



Ainsi f n'admet pas de limite en 0.

Proposition 2.19 (Addition/multiplication)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$
$\lim_{x_0}(f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	?

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$\pm\infty$
$\lim_{x_0}(f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	?

*Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de ces opérations sont de la forme*

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$

Exemple 2.20 (Polynômes en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré : si $a_p \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_p x^p = \pm\infty$ si $p \geqslant 1$ (signe à préciser).

Proposition 2.21 (Division)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ *ou* $+\infty$	$\ell < 0$ *ou* $-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$ $(\ell' < 0)$	$\ell' > 0$ $(\ell' < 0)$	$\pm\infty$	0^+ (0^-)	0^+ (0^-)	0
$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	?	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	?

*Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme*

- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$

Exemple 2.22 (Fractions rationnelles en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\text{si } a_p \neq 0 \text{ et } b_q \neq 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{q} b_k x^k} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p > q \text{ (signe à préciser)} \\ 0 & \text{si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$$

Proposition 2.23 (Composition)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{y\to\ell} g(y) = \ell'$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.
- *Application à* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)$ *lorsque $f > 0$ au voisinage de x_0 :*

$\lim_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell > 1$ *ou* $+\infty$	$\ell \in [0,1[$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	1
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$\ell' > 0$ $(\ell' < 0)$	0	$\ell' > 0$ *ou* $+\infty$ $\ell' < 0$ *ou* $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} f^g$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ (0^+)	0^+ $(+\infty)$	$+\infty$ (0^+)	?	0^+ $(+\infty)$	?	?

*Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme*

- ∞^0
- 0^0
- 1^∞

Exemple 2.24 (Exponentielle)

À l'aide de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cf. exemple 2.34), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Définition 2.25 (Asymptote oblique/Branche parabolique)

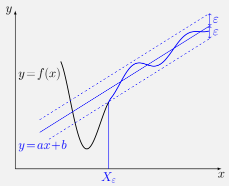
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

❶ *S'il existe des réels a et b tels que*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0,$$

*on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote (oblique)** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.*
Dans ce cas, les nombres a et b sont donnés par

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax).$$

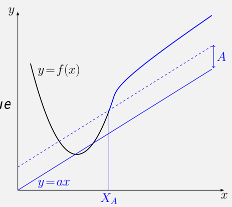


❷ *S'il existe un réel a tel que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty,$$

*on dit que la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.*

❸ *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$*, on dit que la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction asymptotique l'axe des ordonnées en $+\infty$.*



Exemple 2.26 (Asymptote oblique)

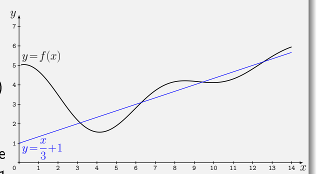
❶ Soit f la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par

$$f(x) = \frac{x}{3} + 1 + 4\frac{\sin x}{x}.$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ (cf. exemple 2.33)

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \dfrac{x}{3} - 1\right) = 0$.

La courbe représentative de f admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{x}{3} + 1$.



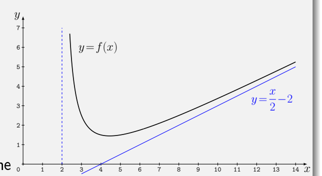
❷ Soit g la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par

$$g(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}.$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) - \dfrac{x}{2}\right) = -2$.

La courbe représentative de g admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 2$.



Théorème 2.27 (Théorème de la limite monotone)

Soit a et b deux réels ou $\pm\infty$ tels que $a < b$ et $I =]a, b[$.

❶ *Soit f une fonction **croissante** sur I.*

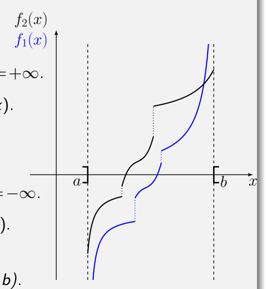
- *Si f est **majorée** sur I, alors f admet une **limite à gauche finie** en b.*
- *Si f n'est **pas majorée** sur I alors* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, on a $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

- *Si f est **minorée** sur I, alors f admet une **limite à droite finie** en a.*
- *Si f n'est **pas minorée** sur I alors* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Dans les deux cas, on a $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

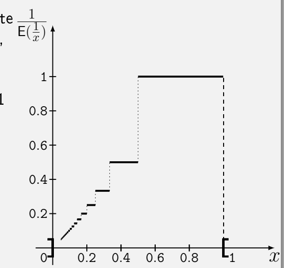
❷ *On a des résultats similaires pour les fonctions **décroissantes** (en échangeant les rôles de a et b).*



Exemple 2.28 (Partie entière et inverse)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

- La fonction « partie entière » étant croissante et la fonction « inverse » étant décroissante, par composition, f est **croissante.**
- Pour tout $x \in]0, 1[$, $\dfrac{1}{x} > 1$ donc $E\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 1$ puis $f(x) \in]0, 1]$.
  Ainsi la fonction f est **bornée** sur $]0, 1[$.
- En conséquence, f admet des **limites finies** en 0 à droite et en 1 à gauche.
  En fait, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1$.



Partant de la limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, à l'aide de changements de variable on déduit les limites $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ que l'on peut généraliser :

Proposition 2.29 (Croissances comparées)

1. *Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,*

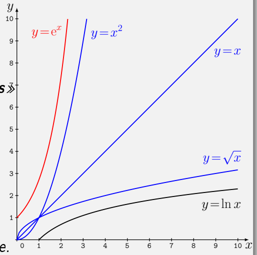
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$$

*Les puissances du logarithme sont «**négligeables**» devant les fonctions puissances **positives**.*

2. *Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

*Les fonctions puissances sont «**négligeables**» devant les puissances **positives** de l'exponentielle.*



Proposition 2.30 (Ordre et limites)

1. *Soit f et g des fonctions telles que $f \leqslant g$ au voisinage de x_0*
   - *Si f et g admettent des limites finies ℓ et ℓ' en x_0 alors $\ell \leqslant \ell'$.*
   - *Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.*
   - *Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.*
2. *Si f et g admettent resp. ℓ et ℓ' comme limites en x_0 et si $\ell < \ell'$, alors $f < g$ au voisinage de x_0.*
3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et si $\ell > \alpha$ alors $f > \alpha$ au voisinage de x_0.*
   En particulier, si $\ell > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de x_0.

Remarque 2.31 (Inégalités strictes/larges)

On prendra garde aux inégalités **strictes** et **larges** : si f et g sont des fonctions telles que $f < g$ au voisinage de x_0 et admettent des limites ℓ et ℓ' en x_0, on **n'a pas nécessairement** $\ell < \ell'$ et l'on peut avoir $\ell = \ell'$.

Ex. : $f(x)=0$ et $g(x)=\frac{1}{x}$ en $+\infty$. On a $f<g$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Théorème 2.32 (Théorème de l'encadrement)

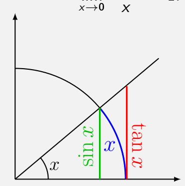
Soit f, g et h des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si les fonctions f, g et h vérifient $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de x_0, et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple 2.33 (Fonction « sinus cardinal »)

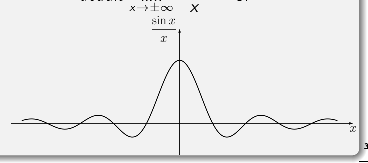
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. **Étude en 0**
   - De l'encadrement géométrique
     $$\forall x \in]0, \pi/2[, \ \sin x < x < \tan x$$
     (l'angle x étant mesuré en **radians**), on obtient $\forall x \in]0, \pi/2[$, $\cos x < f(x) < 1$ duquel on déduit $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$.

     Par parité, on a $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



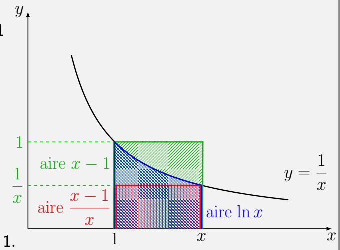
   - Avec $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on tire $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$.
   - Avec $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, on tire $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
2. **Étude en $\pm\infty$**
   - De l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant 1$, on tire $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{|x|}$ duquel on déduit $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.



Exemple 2.34 (Fonctions logarithme/exponentielle)

- De l'encadrement géométrique
  $$\forall x \in]1, +\infty[, \ \frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$$
  on obtient $\lim_{x\to1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

  Par symétrie, on tire
  $$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$
- Par changements de variables, on a
  $$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



Exemple 2.35 (Fonctions hyperboliques)

- $\lim_{x\to0} \frac{\text{sh}x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{\text{th}x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{\text{ch}x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Définition 3.1 (Continuité)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

1. *On dit que f est **continue en x_0** lorsque f admet une limite en x_0, et cette limite est alors nécessairement $f(x_0)$ (d'après proposition 2.12). Autrement dit :*
   $$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
   $$\iff (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$
2. *On dit que f est continue **à gauche** (resp. **à droite**) **en x_0** lorsque*
   $$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) = f(x_0) \quad (\text{resp. } \lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x) = f(x_0)).$$

Proposition 3.2

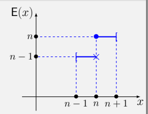
*f est continue en x_0 ssi f est continue **à gauche et à droite** en x_0.*

Exemple 3.3 (Fonction « partie entière »)

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Au voisinage de n, on a

$$\text{E}(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1[\\ n-1 & \text{si } x \in [n-1, n[\end{cases}$$

donc $\lim_{\substack{x\to n\\x>n}} \text{E}(x) = n = \text{E}(n)$ et $\lim_{\substack{x\to n\\x<n}} \text{E}(x) = n - 1 \neq \text{E}(n)$.



La fonction partie entière est **continue à droite** en n mais **pas à gauche**.

Remarque 3.4 (Discontinuité)

1. Pour une fonction f, il existe deux types de discontinuité en $x_0 \in \mathcal{D}_f$:
   - **discontinuité de première espèce** : f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0, mais l'une au moins de ces deux limites n'est pas égale à $f(x_0)$.
   - **discontinuité de deuxième espèce** : f n'admet pas de limite à droite et/ou à gauche en x_0.
2. Si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ et si f admet pour limite le réel ℓ en x_0, on peut prolonger f en posant :
   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$
   La fonction $\tilde{f}$ ainsi obtenue est continue en x_0 : on dit qu'on a **prolongé f par continuité en x_0**.

Exemple 3.5 (Prolongement par continuité)

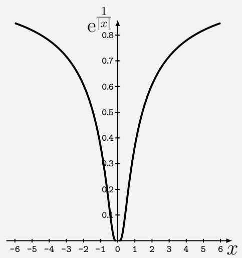
Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

- On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x + 1$.
- Donc $\lim_{x\to2} f(x) = 3$ et l'on peut prolonger la fonction f par continuité en 2 en posant $\tilde{f}(2) = 3$.
- Le prolongement par continuité ainsi construit s'écrit simplement :
  $$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x + 1$$

Exemple 3.6 (Exponentielle-inverse)

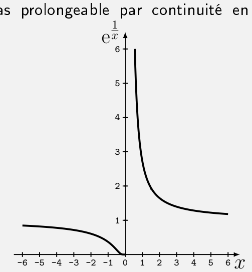
1. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-1/|x|}$

   La fonction f admet une limite **finie** en 0 qui vaut 0. Elle est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.



2. Soit $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{1/x}$

   La fonction g admet une limite à gauche **finie** en 0 qui vaut 0 et une limite à droite **infinie** en 0. Elle présente donc une **discontinuité de deuxième espèce** et n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Proposition 3.7 (Opérations)

1. ***Opérations***
   *Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **continues** en x_0 et si λ est un réel, alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont **continues** en x_0.*

   *Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est **continue** en x_0.*
2. ***Composition***
   *Si f est **continue** en x_0 et si g est **continue** en $f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est continue en x_0.*
3. ***Inégalités***
   *Si f est **continue** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0.*
   *Si f est **continue** en x_0 et si $f(x_0) > 0$ alors $f(x) > 0$ au voisinage de x_0.*

Remarque 3.8 (Extension aux fonctions à valeurs complexes)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors
*la fonction f est **continue** en $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi les fonctions f_1 et f_2 sont **continues** en x_0.*

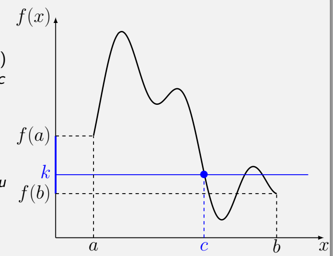
Définition 3.9 (Continuité sur un intervalle)

*La fonction f est dite **continue sur l'intervalle I** lorsque f est continue en tout x_0 de I.*

Théorème 3.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)

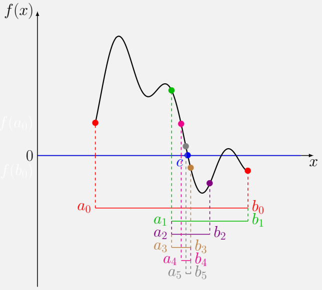
*Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$.*

- *Pour tout réel k **compris** entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.*
- *En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes opposés**, alors il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

Soit f est une fonction **continue** sur $[a,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b)<0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a $f(a_0)f(b_0) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. On a $f(a_1)f(b_1) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. On a $f(a_2)f(b_2) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$. On a $f(a_3)f(b_3) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$. On a $f(a_4)f(b_4) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.
- Posons $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$ et $b_5 = b_4$. On a $f(a_5)f(b_5) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_5, b_5]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

On construit ainsi de proche en proche deux suites de points $a_0, a_1, a_2, \dots$ et $b_0, b_1, b_2, \dots$ dans $[a,b]$ telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux "moitiés" de $[a_n, b_n]$ et $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$.

On a donc une suite d'intervalles **fermés emboîtés** $[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots$ de longueurs $\ell_0 = b_0 - a_0$, $\ell_1 = \ell_0/2$, $\ell_2 = \ell_0/2^2 \dots$

En conséquence, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On a donc affaire à deux suites **adjacentes** (cf. cours du 2nd semestre). Elles sont **convergentes** et admettent la **même** limite $c \in [a,b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c \quad \text{(ou encore } \bigcap_{n=0}^{+\infty}[a_n,b_n] = \{c\}\text{)}.$$

Par continuité, on en tire

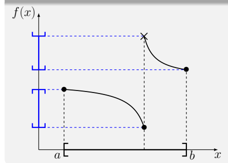
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c).$$

Enfin, la propriété $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ entraîne $f(c)^2 \leqslant 0$ soit $f(c) = 0$. L'algorithme de dichotomie conduit donc à un zéro de la fonction f.

Corollaire 3.12 (Image d'un intervalle)

*L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un **intervalle**.*

Remarque 3.13



Si la fonction présente au moins une discontinuité, son image peut **ne pas** être un intervalle.

Exemple 3.14 (Fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ (facultatif))

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

La fonction f prend les deux seules valeurs 0 et 1. On a $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ et plus généralement, pour tous réels a, b tels que $a < b$, il existe un **rationnel** et un **irrationnel** entre a et b (on dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$), donc $f([a,b]) = \{0,1\}$.

La fonction f **n'est** donc **continue sur aucun intervalle** (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.15 (Image d'un fermé borné : théorème des valeurs extrêmes)

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle **fermé borné** $[a,b]$.*

*Alors f est **bornée** sur $[a,b]$ et **atteint** ses bornes inférieure et supérieure m et M :*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

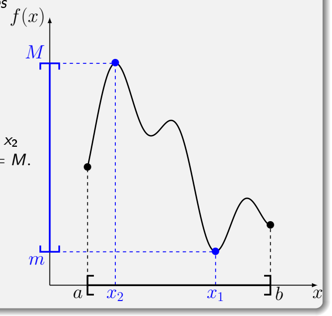
$$\text{et} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Autrement dit : il existe deux réels x_1 et x_2 dans $[a,b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

De plus,

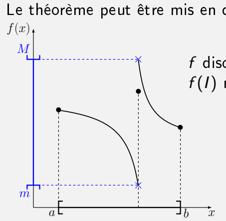
$$f([a,b]) = [m,M].$$

*L'image d'un intervalle **fermé borné** par une fonction **continue** est encore un intervalle **fermé borné**.*

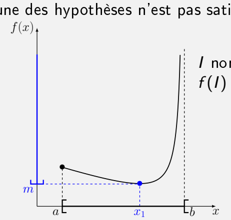


Remarque 3.16 (Contre-exemples)

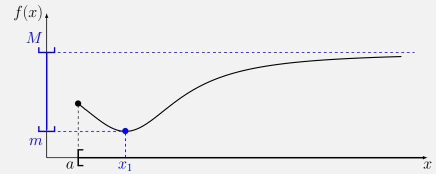
Le théorème peut être mis en défaut si l'une des hypothèses n'est pas satisfaite.



f discontinue
$f(I)$ non fermé



I non fermé
$f(I)$ non borné



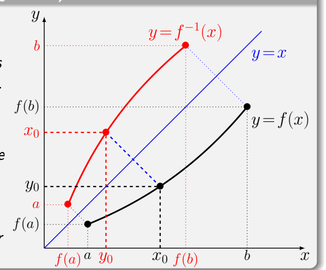
I non borné
$f(I)$ non fermé

Théorème 3.17 (Théorème de la bijection)

*Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un **intervalle** I.*

1. *$f(I)$ est un **intervalle** dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.*
2. *f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$.*
3. *f^{-1} est **continue** et **strictement monotone** sur $f(I)$, de même sens de variation que f.*

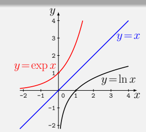
***Rappel :** les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.*



Exemple 3.18 (Logarithme/exponentielle)

La fonction $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue, strictement croissante** de limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0^+ et $+\infty$ respectivement.

Elle est donc **bijective**. Sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$.

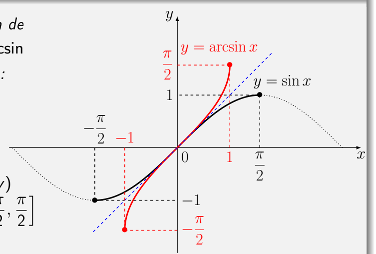


Proposition 4.1

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ et l'on note arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longmapsto \arcsin(x)$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



Proposition 4.2

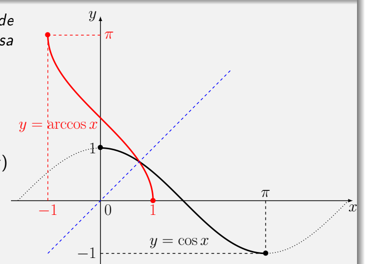
1. *arcsin est **continue, strictement croissante** et **impaire** sur $[-1,1]$.*
2. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arcsin(\sin(x)) = x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in]-1,1[, & \tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

Proposition 4.3

La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et l'on note arccos sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$
$$x \longmapsto \arccos(x)$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$



Proposition 4.4

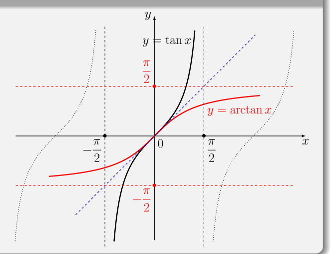
1. *arccos est **continue, strictement décroissante** sur $[-1,1]$.*
2. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall x \in [0,\pi], & \arccos(\cos(x)) = x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1,1]\backslash\{0\}, & \tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$
4. $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Proposition 4.5

La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et l'on note arctan sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \longmapsto \arctan(x)$$

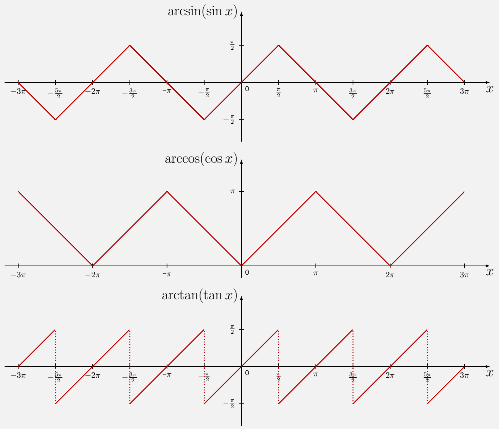
$$\text{et} \quad \begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$



Proposition 4.6

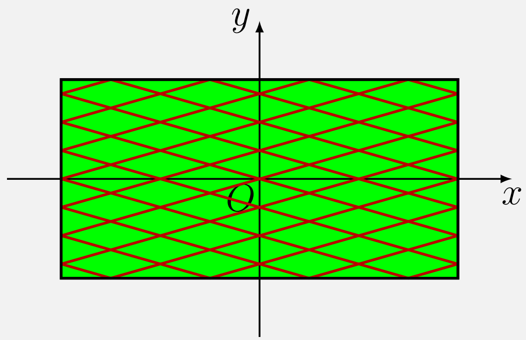
1. *arctan est **continue, strictement croissante** et **impaire** sur $\mathbb{R}$.*
2. $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \arctan(\tan(x)) = x \end{cases}$
3. $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

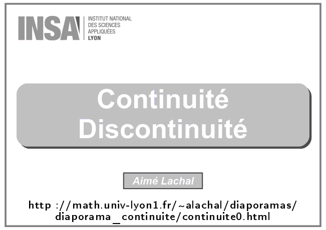
Exemple 4.7 (Courbes en « dents de scie »)

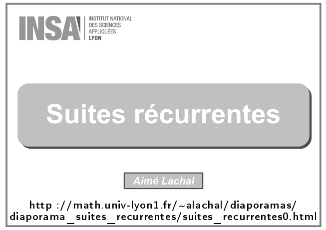


Exemple 4.8 (Billard rectangulaire)

Courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2\arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$







Notions à retenir

- Maîtrise de la valeur absolue
- Borne supérieure/inférieure
  - ⋆ Identification et caractérisation
- Limites
  - ⋆ Maîtrise des techniques de calculs
  - ⋆ Théorème de la limite monotone
  - ⋆ Recherche d'asymptote
  - ⋆ Limites usuelles à connaître...
- Continuité
  - ⋆ Prolongement par continuité
  - ⋆ Opérations
  - ⋆ Théorèmes fondamentaux (TVI/TVE/théorème de la bijection)
- Fonctions trigonométriques réciproques
  - ⋆ Graphes et quelques propriétés à connaître
  - ⋆ Maîtrise de la réciprocité