INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2^{nd} ordre à coefficients constants

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

Sommaire

Sommaire

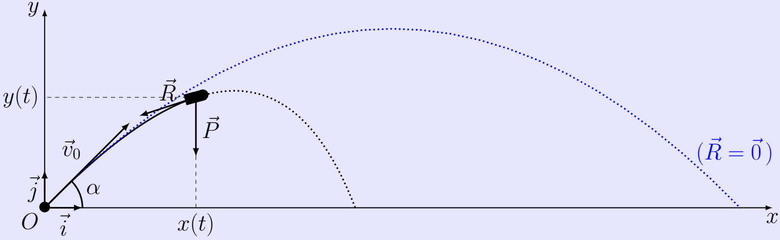
Prologue

De nombreux phénomènes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, économiques, etc. sont régis par des équations différentielles ou des systèmes différentiels.
On va décrire trois problèmes conduisant à de telles équations :

1. un problème de cinématique : trajectoire balistique ;
2. un problème de rhéologie : système visco-élastique ;
3. un problème d'électrocinétique : circuit RLC.

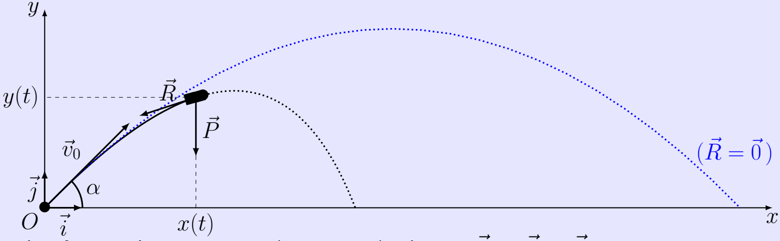
Trajectoire d'un projectile

Mise en équation du mouvement d'un projectile de masse m, celui-ci étant propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.



Trajectoire d'un projectile

Mise en équation du mouvement d'un projectile de masse m, celui-ci étant propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.

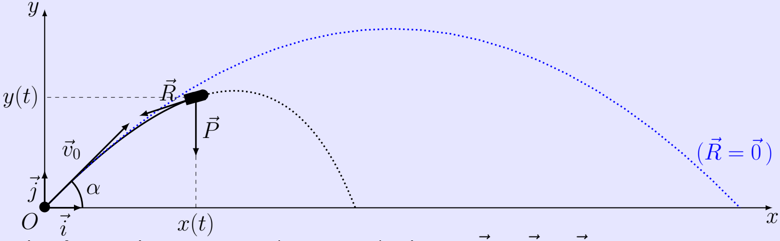


Le bilan des forces s'exerçant sur le projectile donne $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$, où :

- $\vec{P}$ est le poids du projectile d'intensité mg : $\vec{P} = m\vec{g}$,
  avec m : masse du projectile, g : accélération de la pesanteur terrestre ($g = 9,81\ m/s^2$) ;

Trajectoire d'un projectile

Mise en équation du mouvement d'un projectile de masse m, celui-ci étant propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.

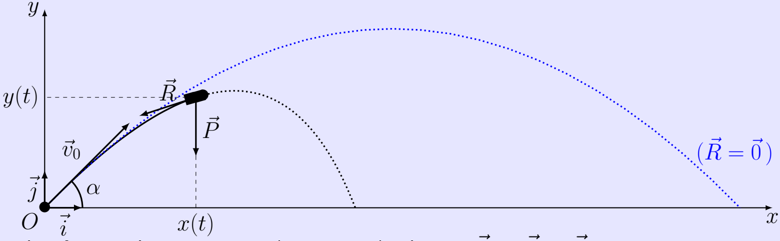


Le bilan des forces s'exerçant sur le projectile donne $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$, où :

- $\vec{P}$ est le poids du projectile d'intensité mg : $\vec{P} = m\vec{g}$,
  avec m : masse du projectile, g : accélération de la pesanteur terrestre ($g = 9,81\ m/s^2$) ;
- $\vec{R}$ la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse : $\vec{R} = -k\vec{v}$,
  k étant le coefficient de frottement de l'air, $\vec{v}$ le vecteur-vitesse du projectile ($\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$).

Trajectoire d'un projectile

Mise en équation du mouvement d'un projectile de masse m, celui-ci étant propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.



Le bilan des forces s'exerçant sur le projectile donne $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$, où :

- $\vec{P}$ est le poids du projectile d'intensité mg : $\vec{P} = m\vec{g}$, avec m : masse du projectile, g : accélération de la pesanteur terrestre ($g = 9,81\ m/s^2$) ;
- $\vec{R}$ la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse : $\vec{R} = -k\vec{v}$, k étant le coefficient de frottement de l'air, $\vec{v}$ le vecteur-vitesse du projectile ($\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$).

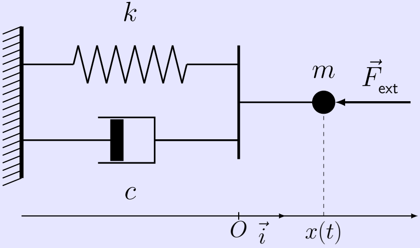
Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$ fournit le système ci-dessous ($\vec{a}$ étant le vecteur-accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$) , en posant $\kappa = k/m$:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\kappa\,\dot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\kappa\,\dot{y}(t) - g \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha,\ \ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système d'**équations différentielles linéaire du 2nd ordre** avec conditions initiales.

Système visco-élastique

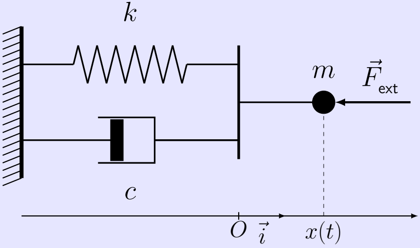
Mise en équation du mouvement d'un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k couplé avec un piston de coefficient c montés en parallèle, sollicité par une force externe.



- $\vec{F}_k$: force de rappel exercée par le ressort
- $\vec{F}_c$: force de friction du piston
- $\vec{F}_{ext}$: force externe
- x : déplacement rectiligne du mobile par rapport à sa position d'équilibre O

Système visco-élastique

Mise en équation du mouvement d'un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k couplé avec un piston de coefficient c montés en parallèle, sollicité par une force externe.



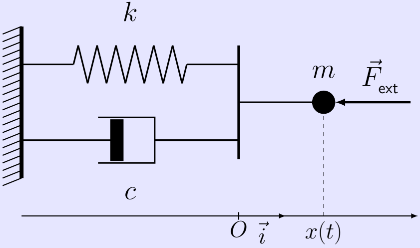
- $\vec{F}_k$: force de rappel exercée par le ressort
- $\vec{F}_c$: force de friction du piston
- $\vec{F}_{ext}$: force externe
- x : déplacement rectiligne du mobile par rapport à sa position d'équilibre O

Les lois de Hooke et de Reynolds s'écrivent

- $F_k(t) = -k\ddot{x}(t), \quad F_c(t) = -c\dot{x}(t).$

Système visco-élastique

Mise en équation du mouvement d'un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k couplé avec un piston de coefficient c montés en parallèle, sollicité par une force externe.



- $\vec{F}_k$: force de rappel exercée par le ressort
- $\vec{F}_c$: force de friction du piston
- $\vec{F}_{ext}$: force externe
- x : déplacement rectiligne du mobile par rapport à sa position d'équilibre O

Les lois de Hooke et de Reynolds s'écrivent

- $F_k(t) = -k\ddot{x}(t), \quad F_c(t) = -c\dot{x}(t).$

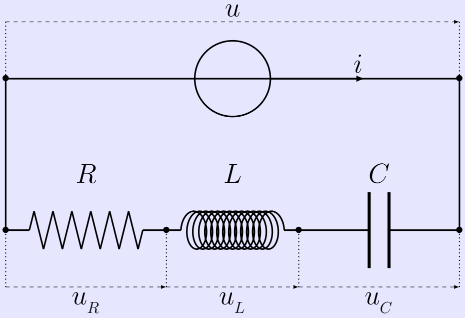
Le bilan des forces s'exerçant sur le solide donne $\vec{F} = \vec{F}_k + \vec{F}_c + \vec{F}_{ext}$ et le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$ (avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$) fournit l'**équation différentielle linéaire du 2$^{\text{nd}}$ ordre**

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = F_{ext}(t)$$

avec conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ pour un mobile initialement au repos.

Circuit *RLC* série

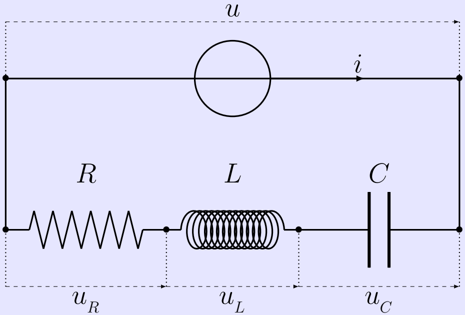
On dispose d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.



- u_R : tension aux bornes du résistor
- u_L : tension aux bornes de la bobine
- u_C : tension aux bornes du condensateur
- u : tension délivrée par le générateur
- i : courant traversant le circuit
  q : quantité d'électricité correspondante
  $(\frac{dq}{dt}(t) = i(t))$

Circuit *RLC* série

On dispose d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.



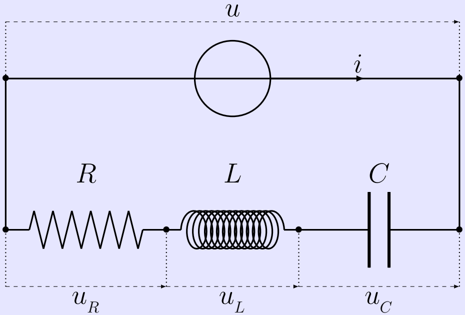
- u_R : tension aux bornes du résistor
- u_L : tension aux bornes de la bobine
- u_C : tension aux bornes du condensateur
- u : tension délivrée par le générateur
- i : courant traversant le circuit
  q : quantité d'électricité correspondante
  $(\frac{dq}{dt}(t) = i(t))$

Les lois d'Ohm, de Faraday et de Kirchhoff s'écrivent

- $u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$;
- $u_R(t) = R\,i(t), \quad u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t), \quad q(t) = Cu_C(t).$

Circuit *RLC* série

On dispose d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.



- u_R : tension aux bornes du résistor
- u_L : tension aux bornes de la bobine
- u_C : tension aux bornes du condensateur
- u : tension délivrée par le générateur
- i : courant traversant le circuit
  q : quantité d'électricité correspondante ($\frac{dq}{dt}(t) = i(t)$)

Les lois d'Ohm, de Faraday et de Kirchhoff s'écrivent

- $u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$;
- $u_R(t) = R\,i(t), \quad u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t), \quad q(t) = Cu_C(t).$

Elles conduisent à l'**équation différentielle linéaire du 2nd ordre**

$$L\ddot{u}_C(t) + R\dot{u}_C + \frac{1}{C}\,u_C(t) = \frac{1}{C}\,u(t)$$

avec conditions initiales $u_C(0) = \dot{u}_C(0) = 0$ pour un condensateur initialement déchargé.

Sommaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 (Équation différentielle du 1er ordre)

Une ***équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre à coefficients constants*** *est une équation de la forme :*

$$u'(t) + au(t) = \varphi(t) \tag{E}$$

où

- a *est une* ***constante*** *fixée (un élément de* $\mathbb{K}$*),*
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *est une application fixée continue sur un intervalle* I*, appelée* ***second membre*** *de l'équation,*
- u *est une* ***fonction inconnue*** *dérivable sur* I*.*

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $u'(t) = \dfrac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t)$*.*
(Notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 (Équation différentielle du 1er ordre)

*Une **équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :*

$$u'(t) + au(t) = \varphi(t) \tag{E}$$

où

- *a est une **constante** fixée (un élément de $\mathbb{K}$),*
- *$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application fixée continue sur un intervalle I, appelée **second membre** de l'équation,*
- *u est une **fonction inconnue** dérivable sur I.*

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $u'(t) = \dfrac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t)$.
(Notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

Définition 2.2

***Résoudre** l'équation (E), c'est trouver **toutes** les fonctions $u : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur I qui vérifient (E).*
*Une telle fonction est alors appelée une **solution** de (E) sur l'intervalle I.*

Définition 2.3 (Équation homogène associée)

On appelle ***équation homogène*** *(ou* ***équation sans second membre****)* ***associée à*** **(E)** *l'équation suivante :*

$$u'(t) + au(t) = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Définition 2.3 (Équation homogène associée)

*On appelle **équation homogène** (ou **équation sans second membre**) **associée à** (E) l'équation suivante :*

$$u'(t) + au(t) = 0. \tag{E$_0$}$$

Théorème 2.4 (Solution générale de (E_0))

*L'ensemble des solutions de l'équation **homogène** (E_0) est constitué des fonctions $u_H : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de la forme*

$$u_H : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-at} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ (constante arbitraire).}$$

*On dit que u_H (dépendant du paramètre λ) est la **solution générale** de (E_0).*

Définition 2.3 (Équation homogène associée)

*On appelle **équation homogène** (ou **équation sans second membre**) **associée à** (E) l'équation suivante :*

$$u'(t) + au(t) = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Théorème 2.4 (Solution générale de (E_0))

*L'ensemble des solutions de l'équation **homogène** (E_0) est constitué des fonctions $u_H : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de la forme*

$$u_H : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-at} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ (constante arbitraire).}$$

*On dit que u_H (dépendant du paramètre λ) est la **solution générale** de (E_0).*

Proposition 2.5 (Un premier principe de superposition)

*Soit $u_P : I \longrightarrow \mathbb{K}$ **une** solution **particulière** de l'équation (E) sur I.*
Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable. Alors :

$$u \text{ est une } \textbf{solution de } (\mathrm{E}) \text{ ssi } (u - u_P) \text{ est une } \textbf{solution de } (\mathrm{E}_0).$$

Définition 2.3 (Équation homogène associée)

*On appelle **équation homogène** (ou **équation sans second membre**) **associée à** (E) l'équation suivante :*

$$u'(t) + au(t) = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Théorème 2.4 (Solution générale de (E_0))

*L'ensemble des solutions de l'équation **homogène** (E_0) est constitué des fonctions $u_H : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de la forme*

$$u_H : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-at} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ (constante arbitraire).}$$

*On dit que u_H (dépendant du paramètre λ) est la **solution générale** de (E_0).*

Proposition 2.5 (Un premier principe de superposition)

*Soit $u_P : I \longrightarrow \mathbb{K}$ **une** solution **particulière** de l'équation (E) sur I.*
Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable. Alors :

$$u \text{ est une } \textbf{solution de } (\mathrm{E}) \text{ ssi } (u - u_P) \text{ est une } \textbf{solution de } (\mathrm{E}_0).$$

*Par suite, l'ensemble des solutions de (E) sur I est constitué des applications de la forme $u = u_H + u_P$ où u_H est une solution **quelconque** de l'équation homogène associée (E_0).*

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

*Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la **condition initiale** $u(t_0) = u_0$ est appelée un **problème de Cauchy**.*

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

*Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la **condition initiale** $u(t_0) = u_0$ est appelée un **problème de Cauchy**.*

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

*L'équation (E) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$.*

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

*Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la **condition initiale** $u(t_0) = u_0$ est appelée un **problème de Cauchy**.*

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

*L'équation (E) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$. En particulier, l'équation **homogène** (E_0) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$: elle est donnée par $u : t \longmapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$.*

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la ***condition initiale*** *$u(t_0) = u_0$ est appelée un* ***problème de Cauchy****.*

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

L'équation (E) admet ***une unique solution*** *u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$.*
En particulier, l'équation ***homogène*** *(E_0) admet* ***une unique solution*** *u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$: elle est donnée par $u : t \longmapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$.*
Autrement dit, rajouter une condition initiale permet de ***fixer*** *la valeur de la constante λ dans le théorème 2.4.*

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la ***condition initiale*** *$u(t_0) = u_0$ est appelée un* ***problème de Cauchy****.*

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

L'équation (E) admet ***une unique solution*** *u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$. En particulier, l'équation* ***homogène*** *(E_0) admet* ***une unique solution*** *u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$: elle est donnée par $u : t \longmapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$. Autrement dit, rajouter une condition initiale permet de* ***fixer*** *la valeur de la constante λ dans le théorème 2.4.*

Exemple 2.8 (Loi de désintégration radioactive)

La réduction du nombre de noyaux radioactifs (instables) dans un échantillon est proportionnelle au nombre de noyaux restants.

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

*Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la **condition initiale** $u(t_0)=u_0$ est appelée un **problème de Cauchy**.*

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

*L'équation (E) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0)=u_0$.*
*En particulier, l'équation **homogène** (E_0) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0)=u_0$: elle est donnée par $u : t \longmapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$.*
*Autrement dit, rajouter une condition initiale permet de **fixer** la valeur de la constante λ dans le théorème 2.4.*

Exemple 2.8 (Loi de désintégration radioactive)

La réduction du nombre de noyaux radioactifs (instables) dans un échantillon est proportionnelle au nombre de noyaux restants. Ce phénomène peut se modéliser, en notant $N(t)$ le nombre moyen de noyaux restants à l'instant t, N_0 le nombre de noyaux initialement présents et λ le taux moyen de désintégration, par l'équation $\dot{N}(t)=-\lambda N(t)$ avec $N(0)=N_0$.

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la ***condition initiale*** *$u(t_0) = u_0$ est appelée un* ***problème de Cauchy****.*

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

L'équation (E) admet ***une unique solution*** *u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$.*
En particulier, l'équation ***homogène*** *(E_0) admet* ***une unique solution*** *u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$: elle est donnée par $u : t \longmapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$.*
Autrement dit, rajouter une condition initiale permet de ***fixer*** *la valeur de la constante λ dans le théorème 2.4.*

Exemple 2.8 (Loi de désintégration radioactive)

La réduction du nombre de noyaux radioactifs (instables) dans un échantillon est proportionnelle au nombre de noyaux restants. Ce phénomène peut se modéliser, en notant $N(t)$ le nombre moyen de noyaux restants à l'instant t, N_0 le nombre de noyaux initialement présents et λ le taux moyen de désintégration, par l'équation $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$ avec $N(0) = N_0$. La solution est donnée par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 2.9 (Second membre polynômial)

Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction polynôme* P *non nulle de degré* d *:*

- *si* $a \neq 0$, *alors il existe une solution polynômiale de degré* d *;*

Proposition 2.9 (Second membre polynômial)

Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme P non nulle de degré d :

- *si $a \neq 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré d ;*
- *si $a = 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 1$.*

Proposition 2.9 (Second membre polynômial)

Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction polynôme* P *non nulle de degré* d *:*

- *si* $a \neq 0$, *alors il existe une solution polynômiale de degré* d *;*
- *si* $a = 0$, *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d+1$.

Proposition 2.10 (Second membre exponentiel)

Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction de la forme* $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *avec* $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$ *:*

- *si* $\alpha \neq -a$, *alors la fonction* $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha + a}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) *;*

Proposition 2.9 (Second membre polynômial)

Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction polynôme* P *non nulle de degré* d *:*

- *si* $a \neq 0$*, alors il existe une solution polynômiale de degré* d *;*
- *si* $a = 0$*, alors il existe une solution polynômiale de degré* $d+1$*.*

Proposition 2.10 (Second membre exponentiel)

Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction de la forme* $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *avec* $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$ *:*

- *si* $\alpha \neq -a$*, alors la fonction* $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha + a}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) *;*
- *si* $\alpha = -a$*, alors la fonction* $u_P : t \mapsto At\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E)*.*

Proposition 2.9 (Second membre polynômial)

Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme P non nulle de degré d :

- *si $a \neq 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré d ;*
- *si $a = 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré $d+1$.*

Proposition 2.10 (Second membre exponentiel)

Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- *si $\alpha \neq -a$, alors la fonction $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha + a}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;*
- *si $\alpha = -a$, alors la fonction $u_P : t \mapsto At\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E).*

Remarque 2.11 (Méthode pratique)

En pratique, dans le cas où $\alpha \neq -a$, on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$ que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B.

On suppose ici que dans l'équation différentielle (E), la constante a est **réelle**.

Proposition 2.12 (Second membre trigonométrique)

Si le second membre φ *de* (E) *est défini par* $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ *ou* $A\sin(\omega t)$ *avec* $\omega > 0$ *et* $A \in \mathbb{R}^*$*, voici deux méthodes pour déterminer une solution particulière de* (E) *reposant sur le fait que* $A\cos(\omega t) = \Re\mathrm{e}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ *et* $A\sin(\omega t) = \Im\mathrm{m}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$.

On suppose ici que dans l'équation différentielle (E), la constante a est **réelle**.

Proposition 2.12 (Second membre trigonométrique)

Si le second membre φ de (E) est défini par $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}^*$, voici deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) reposant sur le fait que $A\cos(\omega t) = \Re\mathrm{e}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et $A\sin(\omega t) = \Im\mathrm{m}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$.

1. ***Méthode 1** (utilisée en physique)*
   - *On cherche une solution particulière **complexe** de l'équation « complexifiée »*

$$z'(t) + az(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

de la forme $z_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$ (en physique, on recherche souvent B sous la forme $R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ avec $R>0$ et $\psi\in\mathbb{R}$, donc z_P est de la forme $t\mapsto R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\psi)}$).

On suppose ici que dans l'équation différentielle (E), la constante a est **réelle**.

Proposition 2.12 (Second membre trigonométrique)

Si le second membre φ de (E) est défini par $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}^*$, voici deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) reposant sur le fait que $A\cos(\omega t) = \Re\mathrm{e}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et $A\sin(\omega t) = \Im\mathrm{m}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$.

1. ***Méthode 1*** *(utilisée en physique)*
   - *On cherche une solution particulière* ***complexe*** *de l'équation « complexifiée »*

     $$z'(t) + az(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

     de la forme $z_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$ (en physique, on recherche souvent B sous la forme $R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ avec $R>0$ et $\psi\in\mathbb{R}$, donc z_P est de la forme $t\mapsto R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\psi)}$).
   - *Si $\varphi(t)=\cos(\omega t)$ (resp. $\sin(\omega t)$) on prend la partie réelle (resp. imaginaire) de z_P, et l'on obtient une solution particulière* ***réelle*** *$u_P : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E).*

On suppose ici que dans l'équation différentielle (E), la constante a est **réelle**.

Proposition 2.12 (Second membre trigonométrique)

Si le second membre φ de (E) est défini par $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}^*$, voici deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) reposant sur le fait que $A\cos(\omega t) = \Re\mathrm{e}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et $A\sin(\omega t) = \Im\mathrm{m}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$.

1. ***Méthode 1** (utilisée en physique)*
   - *On cherche une solution particulière **complexe** de l'équation « complexifiée »*

     $$z'(t) + az(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

     de la forme $z_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$ (en physique, on recherche souvent B sous la forme $R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ avec $R>0$ et $\psi\in\mathbb{R}$, donc z_P est de la forme $t\mapsto R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\psi)}$).
   - *Si $\varphi(t)=\cos(\omega t)$ (resp. $\sin(\omega t)$) on prend la partie réelle (resp. imaginaire) de z_P, et l'on obtient une solution particulière **réelle** $u_P : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E).*
2. ***Méthode 2***

   *On recherche directement une solution particulière **réelle** de (E) sous la forme $t \longmapsto \mu\cos(\omega t) + \nu\sin(\omega t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ (ou sous la forme $t \longmapsto R\cos(\omega t + \psi)$ avec $R > 0$ et $\psi \in \mathbb{R}$).*

Proposition 2.13 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $a \in \mathbb{K}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$.
Supposons avoir trouvé deux fonctions particulières u_1 et u_2 telles que :

- *u_1 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_1(t)$ sur I ;*
- *u_2 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_2(t)$ sur I.*

Proposition 2.13 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $a \in \mathbb{K}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Supposons avoir trouvé deux fonctions particulières u_1 et u_2 telles que :

- *u_1 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_1(t)$ sur I ;*
- *u_2 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_2(t)$ sur I.*

Alors la fonction $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est une solution de l'équation

$$u'(t) + au(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t).$$

Proposition 2.13 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $a \in \mathbb{K}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Supposons avoir trouvé deux fonctions particulières u_1 et u_2 telles que :

- *u_1 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_1(t)$ sur I ;*
- *u_2 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_2(t)$ sur I.*

Alors la fonction $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est une solution de l'équation

$$u'(t) + au(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t).$$

Ce principe de superposition est très utile pour trouver des solutions particulières dans le cas où le second membre de l'équation (E) s'écrit comme somme de fonctions élémentaires.
Cela permet de décomposer un problème compliqué en plusieurs problèmes plus simples. Il faut toutefois faire attention à appliquer ce principe uniquement aux équations différentielles **linéaires**.

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4\mathrm{e}^{-t} - 5\mathrm{e}^{-3t} + 13\sin(2t). \tag{E}$$

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \tag{E}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale

$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \tag{E}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
2. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \tag{E}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 4u_1 - 5u_2 + 13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

   (E_1) : $u_1'(t) + 3u_1(t) = e^{-t}$, (E_2) : $u_2'(t) + 3u_2(t) = e^{-3t}$, (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$.

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle
$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 4u_1 - 5u_2 + 13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

   (E_1) : $u_1'(t) + 3u_1(t) = e^{-t}$, (E_2) : $u_2'(t) + 3u_2(t) = e^{-3t}$, (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$.

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle
$$u'(t)+3u(t)=4\mathrm{e}^{-t}-5\mathrm{e}^{-3t}+13\sin(2t). \qquad \text{(E)}$$

❶ L'équation homogène associée $u_H'(t)+3u_H(t)=0$ admet pour solution générale
$$u_H(t)=\lambda\mathrm{e}^{-3t}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

❷ Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1-5\varphi_2+13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t)=\mathrm{e}^{-t}$, $\varphi_2(t)=\mathrm{e}^{-3t}$ et $\varphi_3(t)=\sin(2t)$.

Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P=4u_1-5u_2+13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

(E_1) : $u_1'(t)+3u_1(t)=\mathrm{e}^{-t}$, (E_2) : $u_2'(t)+3u_2(t)=\mathrm{e}^{-3t}$, (E_3) : $u_3'(t)+3u_3(t)=\sin(2t)$.

- (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t)=B_1\mathrm{e}^{-t}$. On trouve $B_1=\frac{1}{2}$.
- (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t)=B_2t\mathrm{e}^{-3t}$. On trouve $B_2=1$.

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale

$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 4u_1 - 5u_2 + 13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

   (E_1) : $u_1'(t) + 3u_1(t) = e^{-t}$, (E_2) : $u_2'(t) + 3u_2(t) = e^{-3t}$, (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$.

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = B_2 t e^{-3t}$. On trouve $B_2 = 1$.
   - (E_3) admet une solution de la forme $u_3(t) = \mu\cos(2t) + \nu\sin(2t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. En reportant dans (E_3), on trouve le système $3\mu + 2\nu = 0$ et $-2\mu + 3\nu = 1$ de solution $\mu = -\frac{2}{13}$, $\nu = \frac{3}{13}$.

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 4u_1 - 5u_2 + 13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

   $(E_1) : u_1'(t) + 3u_1(t) = e^{-t}$, $(E_2) : u_2'(t) + 3u_2(t) = e^{-3t}$, $(E_3) : u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$.

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = B_2 t e^{-3t}$. On trouve $B_2 = 1$.
   - (E_3) admet une solution de la forme $u_3(t) = \mu\cos(2t) + \nu\sin(2t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. En reportant dans (E_3), on trouve le système $3\mu + 2\nu = 0$ et $-2\mu + 3\nu = 1$ de solution $\mu = -\frac{2}{13}$, $\nu = \frac{3}{13}$.

   D'où $$u_P(t) = 2e^{-t} - 5te^{-3t} - 2\cos(2t) + 3\sin(2t).$$

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation homogène associée $u_H'(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 4u_1 - 5u_2 + 13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

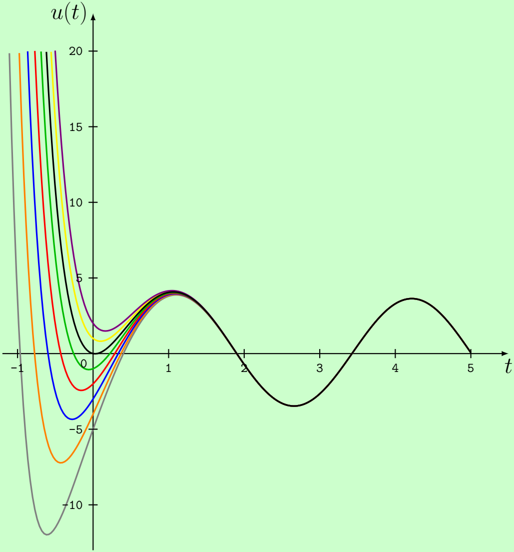
   (E_1) : $u_1'(t) + 3u_1(t) = e^{-t}$, (E_2) : $u_2'(t) + 3u_2(t) = e^{-3t}$, (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$.

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = B_2 t e^{-3t}$. On trouve $B_2 = 1$.
   - (E_3) admet une solution de la forme $u_3(t) = \mu\cos(2t) + \nu\sin(2t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. En reportant dans (E_3), on trouve le système $3\mu + 2\nu = 0$ et $-2\mu + 3\nu = 1$ de solution $\mu = -\frac{2}{13}$, $\nu = \frac{3}{13}$.

   D'où $$u_P(t) = 2e^{-t} - 5te^{-3t} - 2\cos(2t) + 3\sin(2t).$$

3. La solution générale de (E) s'écrit finalement
$$u(t) = (\lambda - 5t)e^{-3t} + 2e^{-t} - 2\cos(2t) + 3\sin(2t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.14



Quelques courbes pour $\lambda \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}. \tag{E_3'}$$

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}. \qquad (\mathrm{E}_3')$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.
En reportant dans (E_3'), on trouve $B_3 = \dfrac{1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{13}(3-2\mathrm{i})$.

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}. \tag{E_3'}$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.

En reportant dans (E_3'), on trouve $B_3 = \dfrac{1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{13}(3-2\mathrm{i})$.

1. ***Première approche :***

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \frac{1}{13}(3-2\mathrm{i})\big(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\big) \\ &= \frac{1}{13}\Big[\big(3\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) + \mathrm{i}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = e^{2it}. \qquad (E_3')$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3 e^{2it}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.

En reportant dans (E_3'), on trouve $B_3 = \dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{1}{13}(3-2i)$.

1. ***Première approche :***

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \frac{1}{13}(3-2i)\big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big) \\ &= \frac{1}{13}\Big[\big(3\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) + i\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Enfin $u_3(t) = \Im\mathrm{m}\big(z_3(t)\big) = \dfrac{1}{13}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)$.

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = e^{2it}. \tag{E_3'}$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3 e^{2it}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.

En reportant dans (E_3'), on trouve $B_3 = \dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{1}{13}(3-2i)$.

1. ***Première approche :***

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \frac{1}{13}(3-2i)\big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big) \\ &= \frac{1}{13}\Big[\big(3\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) + i\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Enfin $u_3(t) = \Im\mathrm{m}\big(z_3(t)\big) = \dfrac{1}{13}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)$.

2. ***Deuxième approche :***

On écrit $B_3 = Re^{i\psi}$ avec $R = |B_3| = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ et $\psi = \arg(B_3) = -\arctan\frac{2}{3}$

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}. \qquad (\mathrm{E}_3')$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.

En reportant dans (E_3'), on trouve $B_3 = \dfrac{1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{13}(3-2\mathrm{i})$.

1. ***Première approche :***

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \frac{1}{13}(3-2\mathrm{i})\big(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\big) \\ &= \frac{1}{13}\Big[\big(3\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) + \mathrm{i}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Enfin $u_3(t) = \Im\mathrm{m}\big(z_3(t)\big) = \dfrac{1}{13}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)$.

2. ***Deuxième approche :***

On écrit $B_3 = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ avec $R = |B_3| = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ et $\psi = \arg(B_3) = -\arctan\frac{2}{3}$

puis $z_3(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t+\psi)} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\big(\cos(2t+\psi) + \mathrm{i}\sin(2t+\psi)\big)$.

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E_3) : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}. \qquad (\mathrm{E}_3')$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.

En reportant dans (E_3'), on trouve $B_3 = \dfrac{1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{13}(3-2\mathrm{i})$.

1. ***Première approche :***

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \frac{1}{13}(3-2\mathrm{i})\big(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\big) \\ &= \frac{1}{13}\Big[\big(3\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) + \mathrm{i}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)\Big]. \end{aligned}$$

   Enfin $u_3(t) = \Im\mathrm{m}\big(z_3(t)\big) = \dfrac{1}{13}\big(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\big)$.

2. ***Deuxième approche :***

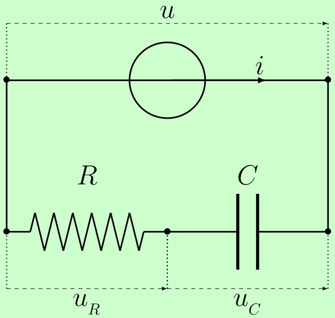
   On écrit $B_3 = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ avec $R = |B_3| = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ et $\psi = \arg(B_3) = -\arctan\frac{2}{3}$

   puis $z_3(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t+\psi)} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\big(\cos(2t+\psi) + \mathrm{i}\sin(2t+\psi)\big)$.

   Enfin $u_3(t) = \Im\mathrm{m}\big(z_3(t)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\sin\left(2t - \arctan\frac{2}{3}\right)$.

Exemple 2.16 (Circuit électrique de type RC)

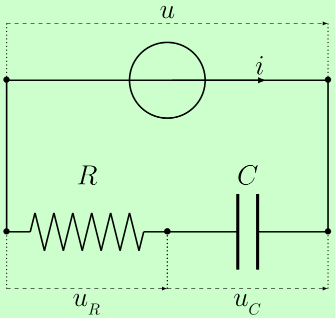
On dispose d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.



- i : courant traversant le circuit
  q : quantité d'électricité correspondante
  $(\frac{dq}{dt}(t) = i(t))$
- u_R : tension aux bornes du résistor
  $u_R(t) = R\,i(t) = R\dot{q}(t)$
- u_C : tension aux bornes du condensateur
  $u_C = \frac{1}{C}\,q(t)$
- u : tension délivrée par le générateur

Exemple 2.16 (Circuit électrique de type RC)

On dispose d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.



- i : courant traversant le circuit
  q : quantité d'électricité correspondante
  $(\frac{dq}{dt}(t) = i(t))$
- u_R : tension aux bornes du résistor
  $u_R(t) = R\,i(t) = R\dot{q}(t)$
- u_C : tension aux bornes du condensateur
  $u_C = \frac{1}{C}\,q(t)$
- u : tension délivrée par le générateur

La loi des mailles s'écrit $u_R + u_C = u$. Elle conduit à l'équation différentielle

$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = u(t)$$

avec condition initiale $q(0) = 0$ pour un condensateur initialement déchargé.

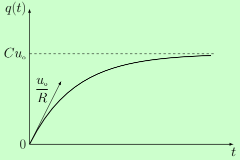
Exemple 2.16 (Circuit électrique de type RC)

Résolution

1. ***Premier cas :*** générateur de courant **continu**, i.e. u est une constante $u_0 > 0$.
   Solution :

$$q(t) = Cu_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

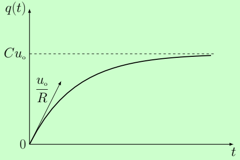
$$\text{puis} \quad i(t) = \frac{u_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$



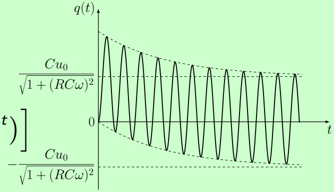
Exemple 2.16 (Circuit électrique de type RC)

Résolution

1. ***Premier cas :*** générateur de courant **continu**,
   i.e. u est une constante $u_0 > 0$.
   Solution :
   $$q(t) = Cu_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$
   $$\text{puis} \quad i(t) = \frac{u_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$



2. ***Deuxième cas :*** générateur de courant **alternatif**,
   i.e. $u(t) = u_0\sin(\omega t)$ avec $u_0 > 0$.
   Solution :
   $$q(t) = \frac{Cu_0}{1+(RC\omega)^2}\left[\sin(\omega t) - RC\omega\left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right]$$



Exemple 2.16 (Circuit électrique de type RC)

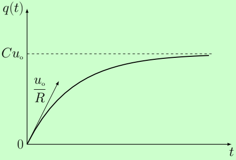
Résolution

❶ ***Premier cas :*** générateur de courant **continu**, i.e. u est une constante $u_0 > 0$.

Solution :

$$q(t) = Cu_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

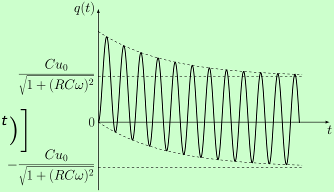
$$\text{puis} \quad i(t) = \frac{u_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$



❷ ***Deuxième cas :*** générateur de courant **alternatif**, i.e. $u(t) = u_0\sin(\omega t)$ avec $u_0 > 0$.

Solution :

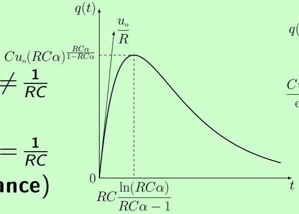
$$q(t) = \frac{Cu_0}{1+(RC\omega)^2}\left[\sin(\omega t) - RC\omega\left(\cos(\omega t) - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right]$$

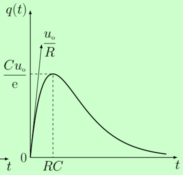


❸ ***Troisième cas :*** générateur de courant **amorti**, i.e. $u(t) = u_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec $u_0, \alpha > 0$.

Solution :

$$q(t) = \begin{cases} \dfrac{Cu_0}{1-RC\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right) & \text{si } \alpha \neq \dfrac{1}{RC} \\ \dfrac{u_0}{R}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} & \text{si } \alpha = \dfrac{1}{RC} \\ & \text{(cas de } \textbf{résonance}\text{)} \end{cases}$$





Sommaire

Définition 3.1 (Équation différentielle du 2nd ordre)

1. *Une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t) \tag{E}$$

*où a et b sont des **constantes réelles** fixées, appelées **coefficients** de l'équation, et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application **continue** fixée, appelée **second membre** de l'équation.*

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t) \\ u''(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) = \ddot{u}(t) \end{cases}$

(notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

Définition 3.1 (Équation différentielle du 2nd ordre)

1. *Une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t) \tag{E}$$

*où a et b sont des **constantes réelles** fixées, appelées **coefficients** de l'équation, et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application **continue** fixée, appelée **second membre** de l'équation.*

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t) \\ u''(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) = \ddot{u}(t) \end{cases}$

(notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

2. *On appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0. \tag{E_0}$$

Définition 3.1 (Équation différentielle du 2nd ordre)

1. *Une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t) \tag{E}$$

*où a et b sont des **constantes réelles** fixées, appelées **coefficients** de l'équation, et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application **continue** fixée, appelée **second membre** de l'équation.*

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations (notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t) \\ u''(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) = \ddot{u}(t) \end{cases}$$

2. *On appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0. \tag{E_0}$$

3. *On appelle **équation caractéristique associée à (E)** l'équation*

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{C}$$

Remarque 3.2 (Solutions exponentielles)

Une fonction exponentielle $t \longmapsto e^{rt}$ est **solution de (E_0)** ssi r est **racine de (C)**.

Théorème 3.3 (Solution générale de (E_0))

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C).
On note $\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs ***complexes*** *et $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs* ***réelles*** *de l'équation homogène* (E_0). *Bien sûr $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} \subset \mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$.*

Théorème 3.3 (Solution générale de (E_0))

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C).
On note $\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs ***complexes*** *et $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs* ***réelles*** *de l'équation homogène* (E_0). *Bien sûr $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} \subset \mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$.*

1. *Si $\Delta > 0$: l'équation* (C) *a deux racines* ***réelles distinctes*** *r_1 et r_2, et :*

$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Théorème 3.3 (Solution générale de (E_0))

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C)*.*
On note $\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs ***complexes*** *et $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs* ***réelles*** *de l'équation homogène* (E_0)*. Bien sûr $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} \subset \mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$.*

1. *Si $\Delta > 0$: l'équation* (C) *a deux racines* ***réelles distinctes*** *r_1 et r_2, et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
2. *Si $\Delta = 0$: l'équation* (C) *a une racine* ***réelle double*** *r, et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Théorème 3.3 (Solution générale de (E_0))

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C).
On note $\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs ***complexes*** *et $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs* ***réelles*** *de l'équation homogène* (E_0). *Bien sûr $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} \subset \mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$.*

1. *Si $\Delta > 0$: l'équation (C) a deux racines* ***réelles distinctes*** *r_1 et r_2, et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. *Si $\Delta = 0$: l'équation (C) a une racine* ***réelle double*** *r, et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. *Si $\Delta < 0$: l'équation (C) a deux racines* ***complexes non réelles conjuguées*** *$r_1 = \delta + i\omega$ et $r_2 = \delta - i\omega$ ($\delta \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^*$), et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto e^{\delta t}\big(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\big),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Théorème 3.3 (Solution générale de (E_0))

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C).
On note $\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs ***complexes*** *et $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs* ***réelles*** *de l'équation homogène* (E_0). *Bien sûr $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} \subset \mathscr{S}_{H,\mathbb{C}}$.*

1. *Si $\Delta > 0$: l'équation (C) a deux racines* ***réelles distinctes*** *r_1 et r_2, et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
2. *Si $\Delta = 0$: l'équation (C) a une racine* ***réelle double*** *r, et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
3. *Si $\Delta < 0$: l'équation (C) a deux racines* ***complexes non réelles conjuguées*** *$r_1 = \delta + i\omega$ et $r_2 = \delta - i\omega$ ($\delta \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^*$), et :*
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\};$$
$$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{t \longmapsto e^{\delta t}\big(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\big),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemple 3.4 (Oscillateur harmonique libre)

L'équation $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$ ($\omega > 0$ fixé) admet pour solution générale réelle
$$t \longmapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On revient à l'équation avec second membre (E) : $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t)$.

Proposition 3.5 (Un premier principe de superposition)

Soit u_P une solution particulière de (E) *sur I.*
L'ensemble des solutions de (E) *sur I est constitué des applications de la forme $u = u_P + u_H$ où u_H est une solution de l'équation homogène associée* (E_0).

On revient à l'équation avec second membre (E) : $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t)$.

Proposition 3.5 (Un premier principe de superposition)

Soit u_P une solution particulière de (E) *sur I.*
L'ensemble des solutions de (E) *sur I est constitué des applications de la forme $u = u_P + u_H$ où u_H est une solution de l'équation homogène associée* (E_0).

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, on admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I.
En fait (E) admet **une infinité de solutions** (car les constantes λ_1 et λ_2 du théorème 3.3 peuvent prendre une infinité de valeurs). En général, comme les solutions dépendent de 2 paramètres, il faut deux conditions pour obtenir une solution unique.

On revient à l'équation avec second membre (E) : $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t)$.

Proposition 3.5 (Un premier principe de superposition)

Soit u_P une solution particulière de (E) *sur I.*
L'ensemble des solutions de (E) *sur I est constitué des applications de la forme $u = u_P + u_H$ où u_H est une solution de l'équation homogène associée* (E_0).

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, on admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I.
En fait (E) admet **une infinité de solutions** (car les constantes λ_1 et λ_2 du théorème 3.3 peuvent prendre une infinité de valeurs). En général, comme les solutions dépendent de 2 paramètres, il faut deux conditions pour obtenir une solution unique.

Théorème 3.6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

*Soit $t_0 \in I$ et $u_0, v_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Alors il existe **une unique solution** de l'équation* (E) *sur I vérifiant les **conditions initiales** $u(t_0) = u_0$ et $u'(t_0) = v_0$.*
*Il s'agit d'un **problème de Cauchy** pour le second ordre.*

On revient à l'équation avec second membre (E) : $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t)$.

Proposition 3.5 (Un premier principe de superposition)

Soit u_P une solution particulière de (E) *sur I.*
L'ensemble des solutions de (E) *sur I est constitué des applications de la forme $u = u_P + u_H$ où u_H est une solution de l'équation homogène associée* (E_0).

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, on admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I.
En fait (E) admet **une infinité de solutions** (car les constantes λ_1 et λ_2 du théorème 3.3 peuvent prendre une infinité de valeurs). En général, comme les solutions dépendent de 2 paramètres, il faut deux conditions pour obtenir une solution unique.

Théorème 3.6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

*Soit $t_0 \in I$ et $u_0, v_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Alors il existe **une unique solution** de l'équation* (E) *sur I vérifiant les **conditions initiales** $u(t_0) = u_0$ et $u'(t_0) = v_0$.*
*Il s'agit d'un **problème de Cauchy** pour le second ordre.*

Exemple 3.7 (Oscillateur harmonique libre)

L'équation $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$ ($\omega > 0$ fixé) avec conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = v_0$ admet pour unique solution réelle $u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 3.8 (2nd membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

1. *Si le second membre* φ *de* (E) *est une fonction polynôme de degré* d *:*
   - *si* $b \neq 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* d *;*
   - *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d + 1$ *;*
   - *si* $b = 0$ *et* $a = 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d + 2$.

Proposition 3.8 (2nd membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

1. *Si le second membre φ de* (E) *est une fonction polynôme de degré d :*
   - *si $b \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré d ;*
   - *si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 1$;*
   - *si $b = 0$ et $a = 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 2$.*
2. *Si le second membre φ de* (E) *est une fonction de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I, avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:*

Proposition 3.8 (2nd membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

1. *Si le second membre* φ *de* (E) *est une fonction polynôme de degré* d *:*
   - *si* $b \neq 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* d *;*
   - *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d + 1$ *;*
   - *si* $b = 0$ *et* $a = 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d + 2$.

2. *Si le second membre* φ *de* (E) *est une fonction de la forme* $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *sur* I, *avec* $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$ *:*
   - *si* α ***n'est pas une racine*** *de l'équation caractéristique* (C), *alors la fonction* $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) *;*

Proposition 3.8 (2nd membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

1. *Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme de degré d :*
   - *si $b \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré d ;*
   - *si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d+1$;*
   - *si $b = 0$ et $a = 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d+2$.*

2. *Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I, avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:*
   - *si α **n'est pas une racine** de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;*
   - *si α est une **racine simple** de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{2\alpha + a}\,t\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;*

Proposition 3.8 (2^{nd} membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

1. *Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme de degré d :*
   - *si $b \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré d ;*
   - *si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d+1$;*
   - *si $b = 0$ et $a = 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d+2$.*
2. *Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I, avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:*
   - *si α **n'est pas une racine** de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;*
   - *si α est une **racine simple** de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{2\alpha + a}\,t\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;*
   - *si α est une **racine double** de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E).*

Proposition 3.8 (2nd membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

1. *Si le second membre* φ *de* (E) *est une fonction polynôme de degré* d *:*
   - *si* $b \neq 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* d *;*
   - *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d+1$ *;*
   - *si* $b = 0$ *et* $a = 0$ *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d+2$.

2. *Si le second membre* φ *de* (E) *est une fonction de la forme* $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *sur* I, *avec* $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$ *:*
   - *si* α ***n'est pas une racine*** *de l'équation caractéristique* (C), *alors la fonction* $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) *;*
   - *si* α *est une* ***racine simple*** *de l'équation caractéristique* (C), *alors la fonction* $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{2\alpha + a}\,t\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) *;*
   - *si* α *est une* ***racine double*** *de l'équation caractéristique* (C), *alors la fonction* $u_P : t \mapsto \dfrac{A}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E).

3. *Si* $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ *ou* $A\sin(\omega t)$ *avec* $A \in \mathbb{R}$ *et* $\omega > 0$ *:*

   la méthode est similaire à celle utilisée pour les équations d'ordre 1 en passant par le second membre intermédiaire $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

Méthode pratique

En pratique, pour un second membre de (E) de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

Méthode pratique

En pratique, pour un second membre de (E) de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- lorsque α **n'est pas une racine** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,

Méthode pratique

En pratique, pour un second membre de (E) de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- lorsque α **n'est pas une racine** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine simple** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto Bt\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,

Méthode pratique

En pratique, pour un second membre de (E) de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- lorsque α **n'est pas une racine** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine simple** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto Bt\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine double** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto Bt^2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$

que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B.

Méthode pratique

En pratique, pour un second membre de (E) de la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- lorsque α **n'est pas une racine** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine simple** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto Bt\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine double** de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto Bt^2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$

que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B.

Remarque 3.9 (Second membre polynôme×exponentiel (facultatif))

Cette méthode est généralisable au cas de seconds membres de la forme $t \longmapsto P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré p.

Plus précisément :
dans le cas où α **n'est pas une racine** (resp. **est une racine simple**, **est une racine double**) de (C), il existe une solution particulière de la forme $u_P : t \longmapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ (resp. $t \longmapsto tQ(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $t \longmapsto t^2 Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$) où Q est un polynôme de degré p.

Proposition 3.10 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}$ *et* φ_1, φ_2 *deux applications continues de* I *dans* $\mathbb{K}$.

Supposons avoir trouvé deux fonctions u_1 *et* u_2 *telles que :*

- u_1 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_1(t)$ *sur* I ;
- u_2 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_2(t)$ *sur* I.

Proposition 3.10 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}$ *et* φ_1, φ_2 *deux applications continues de* I *dans* $\mathbb{K}$.

Supposons avoir trouvé deux fonctions u_1 *et* u_2 *telles que :*

- u_1 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_1(t)$ *sur* I ;
- u_2 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_2(t)$ *sur* I.

Alors $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ *est une solution de l'équation*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t).$$

Proposition 3.10 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}$ *et* φ_1, φ_2 *deux applications continues de* I *dans* $\mathbb{K}$.

Supposons avoir trouvé deux fonctions u_1 *et* u_2 *telles que :*

- u_1 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_1(t)$ *sur* I *;*
- u_2 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_2(t)$ *sur* I*.*

Alors $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ *est une solution de l'équation*

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t).$$

Remarque 3.11 (Ordre supérieur)

Toutes les méthodes présentées dans ce chapitre sont généralisables au cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque :

$$u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} u'(t) + a_n u(t) = \varphi(t) \ldots$$

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6e^{-t} - 10e^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-4t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda\mathrm{e}^{-t} + \mu\mathrm{e}^{-4t}, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda\mathrm{e}^{-t} + \mu\mathrm{e}^{-4t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 10u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
$$(\mathrm{E}_1) : u_1''(t) + 5u_1'(t) + 4u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (\mathrm{E}_2) : u_2''(t) + 5u_2'(t) + 4u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$$

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda\mathrm{e}^{-t} + \mu\mathrm{e}^{-4t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 10u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
   $$(\mathrm{E}_1) : u_1''(t) + 5u_1'(t) + 4u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (\mathrm{E}_2) : u_2''(t) + 5u_2'(t) + 4u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$$
   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t\,\mathrm{e}^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6e^{-t} - 10e^{-2t}\cos t. \tag{E}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-4t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-2t}\cos t = \Re e\left(e^{(-2+i)t}\right)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 10u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant

   $$(E_1) : u_1''(t) + 5u_1'(t) + 4u_1(t) = e^{-t}, \quad (E_2) : u_2''(t) + 5u_2'(t) + 4u_2(t) = e^{-2t}\cos t.$$

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t\, e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re e\left(B_2 e^{(-2+i)t}\right)$. On trouve $B_2 = -\frac{3+i}{10}$.

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t} + \mu \mathrm{e}^{-4t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 10u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant

   $$(E_1) : u_1''(t) + 5u_1'(t) + 4u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (E_2) : u_2''(t) + 5u_2'(t) + 4u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$$

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t\,\mathrm{e}^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re\mathrm{e}\big(B_2\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{3+\mathrm{i}}{10}$.

   D'où
   $$u_P(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t} + (3\cos t - \sin t)\mathrm{e}^{-2t}.$$

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \tag{E}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4.

2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \lambda\mathrm{e}^{-t} + \mu\mathrm{e}^{-4t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 10u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
   $$(\mathrm{E}_1) : u_1''(t) + 5u_1'(t) + 4u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (\mathrm{E}_2) : u_2''(t) + 5u_2'(t) + 4u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$$
   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t\,\mathrm{e}^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re\mathrm{e}\big(B_2\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{3+\mathrm{i}}{10}$.

   D'où $$u_P(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t} + (3\cos t - \sin t)\mathrm{e}^{-2t}.$$

4. La solution générale de (E) s'écrit finalement
$$u(t) = (2t + \lambda)\mathrm{e}^{-t} + \mu\mathrm{e}^{-4t} + (3\cos t - \sin t)\mathrm{e}^{-2t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + i$ et $-2 - i$.

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = e^{-2t}(\lambda \cos t + \mu \sin t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 8\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(\lambda\cos t + \mu\sin t\big), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 8\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \tag{E}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.
2. L'équation homogène associée $u''_H(t) + 4u'_H(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\lambda\cos t + \mu\sin t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
$$(E_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 5u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (E_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 5u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$$

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + i$ et $-2 - i$.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = e^{-2t}(\lambda\cos t + \mu\sin t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-2t}\cos t = \Re e\big(e^{(-2+i)t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant

   (E_1) : $u_1''(t) + 4u_1'(t) + 5u_1(t) = e^{-t}$, (E_2) : $u_2''(t) + 4u_2'(t) + 5u_2(t) = e^{-2t}\cos t$.

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 8\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \tag{E}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\lambda \cos t + \mu \sin t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant

   $(\mathrm{E}_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 5u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (\mathrm{E}_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 5u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1\mathrm{e}^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re\mathrm{e}\big(B_2 t\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$.

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6\mathrm{e}^{-t} - 8\mathrm{e}^{-2t}\cos t. \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\lambda\cos t + \mu\sin t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t = \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant

   $$(\mathrm{E}_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 5u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad (\mathrm{E}_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 5u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t.$$

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1\mathrm{e}^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re\mathrm{e}\big(B_2 t\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$.

   D'où $$u_P(t) = 3\,\mathrm{e}^{-t} - 4t\,\mathrm{e}^{-2t}\sin t.$$

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t}\cos t. \tag{E}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + i$ et $-2 - i$.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale
$$u_H(t) = e^{-2t}(\lambda \cos t + \mu \sin t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-2t}\cos t = \Re e\big(e^{(-2+i)t}\big)$.

   Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 6u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant

   $(E_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 5u_1(t) = e^{-t}$, $\quad (E_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 5u_2(t) = e^{-2t}\cos t$.

   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re e\big(B_2 t e^{(-2+i)t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{i}{2}$.

   D'où $$u_P(t) = 3e^{-t} - 4te^{-2t}\sin t.$$
4. La solution générale de (E) s'écrit finalement
$$u(t) = (\lambda \cos t + \mu \sin t - 4t \sin t)e^{-2t} + 3e^{-t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} - 8\mathrm{e}^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right). \tag{E}$$

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2e^{-2t} - 8e^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} - 8\mathrm{e}^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\lambda t + \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} - 8\mathrm{e}^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\lambda t + \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big) = \Im\mathrm{m}\big(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\big)$.

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} - 8\mathrm{e}^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right). \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\lambda t + \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) = \Im\mathrm{m}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\right)$.
Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 2u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
$$(\mathrm{E}_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 4u_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}, \quad (\mathrm{E}_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 4u_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right).$$

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2e^{-2t} - 8e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t). \tag{E}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t) = e^{-2t}(\lambda t + \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t) = \Im\mathrm{m}\left(e^{(-1+i\sqrt{3})t}\right)$.
Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 2u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
$$(E_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 4u_1(t) = e^{-2t}, \quad (E_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 4u_2(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t).$$
   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t^2 e^{-2t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t)+4u'(t)+4u(t)=2\mathrm{e}^{-2t}-8\mathrm{e}^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big). \qquad \text{(E)}$$

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2+4r+4=0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t)+4u_H'(t)+4u_H(t)=0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t)=\mathrm{e}^{-2t}(\lambda t+\mu), \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1-8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big)=\Im\mathrm{m}\big(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\big)$.
Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P=2u_1-8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
(E_1) : $u_1''(t)+4u_1'(t)+4u_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}$, (E_2) : $u_2''(t)+4u_2'(t)+4u_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t\big)$.
   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t)=B_1t^2\,\mathrm{e}^{-2t}$. On trouve $B_1=\frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t)=\Im\mathrm{m}\big(B_2\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\big)$. On trouve $B_2=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{4}$.

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2e^{-2t} - 8e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t). \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t) = e^{-2t}(\lambda t + \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t) = \Im\mathrm{m}\big(e^{(-1+i\sqrt{3})t}\big)$.
Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 2u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
$(E_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 4u_1(t) = e^{-2t}$, $\quad (E_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 4u_2(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t)$.
   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t^2 e^{-2t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Im\mathrm{m}\big(B_2 e^{(-1+i\sqrt{3})t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$.

D'où
$$u_P(t) = t^2 e^{-2t} + 2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2e^{-2t} - 8e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t). \qquad \text{(E)}$$

---

1. L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2.
2. L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale
$$u_H(t) = e^{-2t}(\lambda t + \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t) = \Im\mathrm{m}\big(e^{(-1+i\sqrt{3})t}\big)$.
Une solution particulière de (E) est de la forme $u_P = 2u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
$(E_1) : u_1''(t) + 4u_1'(t) + 4u_1(t) = e^{-2t}$, $\quad (E_2) : u_2''(t) + 4u_2'(t) + 4u_2(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t)$.
   - (E_1) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t^2 e^{-2t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
   - (E_2) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Im\mathrm{m}\big(B_2 e^{(-1+i\sqrt{3})t}\big)$. On trouve $B_2 = -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$.

   D'où
$$u_P(t) = t^2 e^{-2t} + 2e^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t + \tfrac{\pi}{3}\big).$$
4. La solution générale de (E) s'écrit finalement
$$u(t) = (t^2 + \lambda t + \mu)e^{-2t} + 2e^{-t}\sin\big(\sqrt{3}\,t + \tfrac{\pi}{3}\big), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.

Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.
Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

---

1. ***Équation caractéristique***
   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation **caractéristique** $r^2 + \kappa r = 0$, de racines 0 et $-\kappa$.

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.
Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

1. ***Équation caractéristique***
   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation **caractéristique** $r^2+\kappa r=0$, de racines 0 et $-\kappa$.

2. ***Résolution de* (E_x)–(CI_x)**
   La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu e^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.
Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

1. ***Équation caractéristique***
   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation **caractéristique** $r^2+\kappa r=0$, de racines 0 et $-\kappa$.

2. ***Résolution de* (E_x)–(CI_x)**
   La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   En reportant cette expression dans (CI_x), on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}$. D'où

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right).$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.
Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

1. ***Équation caractéristique***
   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation **caractéristique** $r^2+\kappa r=0$, de racines 0 et $-\kappa$.

2. ***Résolution de* (E_x)–(CI_x)**
   La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   En reportant cette expression dans (CI_x), on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}$. D'où
   $$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right).$$

3. ***Résolution de* (E_y)–(CI_y)**
   La solution générale de l'équation homogène associée à (E_y) est donnée par $y_H(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.
Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

---

1. ***Équation caractéristique***
   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation **caractéristique** $r^2 + \kappa r = 0$, de racines 0 et $-\kappa$.

2. ***Résolution de* (E_x)–(CI_x)**
   La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   En reportant cette expression dans (CI_x), on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}$. D'où
   $$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right).$$

3. ***Résolution de* (E_y)–(CI_y)**
   La solution générale de l'équation homogène associée à (E_y) est donnée par $y_H(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de (E_y) est $y_P(t) = -\frac{g}{\kappa} t$.
   La solution générale de (E_y) est alors $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sous un angle de tir α.
Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \kappa\,\dot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + \kappa\,\dot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

1. ***Équation caractéristique***

   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation **caractéristique** $r^2+\kappa r=0$, de racines 0 et $-\kappa$.

2. ***Résolution de* (E_x)–(CI_x)**

   La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   En reportant cette expression dans (CI_x), on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}$. D'où

   $$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right).$$

3. ***Résolution de* (E_y)–(CI_y)**

   La solution générale de l'équation homogène associée à (E_y) est donnée par $y_H(t) = \lambda + \mu \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de (E_y) est $y_P(t) = -\frac{g}{\kappa} t$.
   La solution générale de (E_y) est alors $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.
   En reportant cette expression dans (CI_y), on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \sin\alpha}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2}$. D'où

   $$y(t) = \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) - \frac{g}{\kappa} t.$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

❹ ***Trajectoire du projectile***

La trajectoire du projectile est donc portée par la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) \\ y(t) = \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{\kappa} + \dfrac{g}{\kappa^2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) - \dfrac{g}{\kappa}t \end{cases}$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

4. ***Trajectoire du projectile***

La trajectoire du projectile est donc portée par la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) \\ y(t) = \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{\kappa} + \dfrac{g}{\kappa^2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) - \dfrac{g}{\kappa} t \end{cases}$$

Une représentation cartésienne peut être obtenue en éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$. La première équation fournit $t = -\dfrac{1}{\kappa} \ln\left(1 - \dfrac{\kappa}{v_0 \cos\alpha} x(t)\right)$ que l'on reporte dans la deuxième.

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

4. ***Trajectoire du projectile***

La trajectoire du projectile est donc portée par la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}) \\ y(t) = \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{\kappa} + \dfrac{g}{\kappa^2}\right)(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}) - \dfrac{g}{\kappa} t \end{cases}$$

Une représentation cartésienne peut être obtenue en éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$. La première équation fournit $t = -\dfrac{1}{\kappa}\ln\left(1 - \dfrac{\kappa}{v_0\cos\alpha}x(t)\right)$ que l'on reporte dans la deuxième. Cela donne

$$y = \left(\tan\alpha + \frac{g}{\kappa v_0 \cos\alpha}\right)x + \frac{g}{\kappa^2}\ln\left(1 - \frac{\kappa}{v_0\cos\alpha}x\right).$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

4. ***Trajectoire du projectile***

La trajectoire du projectile est donc portée par la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) \\ y(t) = \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{\kappa} + \dfrac{g}{\kappa^2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) - \dfrac{g}{\kappa} t \end{cases}$$

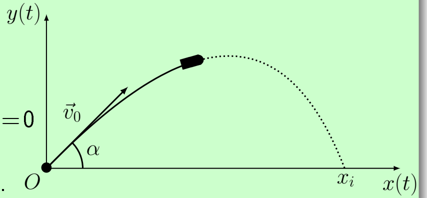
Une représentation cartésienne peut être obtenue en éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$. La première équation fournit $t = -\dfrac{1}{\kappa}\ln\left(1 - \dfrac{\kappa}{v_0\cos\alpha}x(t)\right)$ que l'on reporte dans la deuxième. Cela donne

$$y = \left(\tan\alpha + \frac{g}{\kappa v_0 \cos\alpha}\right)x + \frac{g}{\kappa^2}\ln\left(1 - \frac{\kappa}{v_0\cos\alpha}x\right).$$

Remarque : la portée du tir est le point d'impact $(x_i, 0)$ du projectile au sol.
Ce point vérifie l'équation $y_i = 0$, soit :

$$\left(\tan\alpha + \frac{g}{\kappa v_0\cos\alpha}\right)x_i + \frac{g}{\kappa^2}\ln\left(1 - \frac{\kappa x_i}{v_0\cos\alpha}\right) = 0$$

que l'on ne peut pas résoudre explicitement...



Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

5. ***Cas d'un tir dans le vide***

Dans cette situation, il n'y a plus de résistance et l'on a $\kappa = 0$. Les coordonnées du projectile vérifient les systèmes simplifiés

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

5. ***Cas d'un tir dans le vide***

Dans cette situation, il n'y a plus de résistance et l'on a $\kappa = 0$. Les coordonnées du projectile vérifient les systèmes simplifiés

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

Les équations (E_x) et (E_y) se résolvent directement et l'on trouve

$$\begin{cases} x(t) = v_0(\cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t \end{cases}$$

Exemple 3.15 (Tir d'un projectile)

5. ***Cas d'un tir dans le vide***

Dans cette situation, il n'y a plus de résistance et l'on a $\kappa = 0$. Les coordonnées du projectile vérifient les systèmes simplifiés

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & (\mathrm{E}_x) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha & (\mathrm{CI}_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = -g & (\mathrm{E}_y) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha & (\mathrm{CI}_y) \end{cases}$$

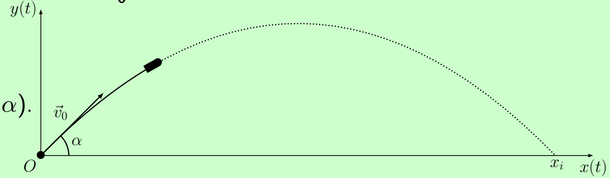
Les équations (E_x) et (E_y) se résolvent directement et l'on trouve

$$\begin{cases} x(t) = v_0(\cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t \end{cases}$$

En éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve immédiatement que la trajectoire est portée par la courbe d'équation

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x.$$

Il s'agit d'une parabole de portée $x_i = \dfrac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$.



Exemple 3.16 (Circuit RLC)

Reprenons le circuit RLC décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \geqslant 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} L\ddot{u}_c(t) + R\dot{u}_c + \dfrac{1}{C}\, u_c(t) = \dfrac{1}{C} u_0 \cos(\omega t) & \text{(E)} \\ u_c(0) = \dot{u}_c(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

Reprenons le circuit RLC décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \geqslant 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} L\ddot{u}_C(t) + R\dot{u}_C + \dfrac{1}{C}\, u_C(t) = \dfrac{1}{C} u_0 \cos(\omega t) & \text{(E)} \\ u_C(0) = \dot{u}_C(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

❶ ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

$$L\ddot{u}_H(t) + R\dot{u}_H + \frac{1}{C}\, u_H(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

d'équation **caractéristique** (C) : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$.

Notons r_1 et r_2 les racines de (C), $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ son discriminant et posons $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.

Exemple 3.16 (Circuit *RLC*)

Reprenons le circuit *RLC* décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \geqslant 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} L\ddot{u}_C(t) + R\dot{u}_C + \dfrac{1}{C}\, u_C(t) = \dfrac{1}{C} u_0 \cos(\omega t) & \text{(E)} \\ u_C(0) = \dot{u}_C(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

1. ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

   L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

   $$L\ddot{u}_H(t) + R\dot{u}_H + \frac{1}{C}\, u_H(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

   d'équation **caractéristique** (C) : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$.

   Notons r_1 et r_2 les racines de (C), $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ son discriminant et posons $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.

   La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit, selon le signe de Δ selon :

   - si $4\frac{L}{C} < R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-\delta}{2L}$, $r_2 = \frac{-R+\delta}{2L}$ et $u_H(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\big[\lambda \operatorname{ch}\big(\frac{\delta}{2L}t\big) + \mu \operatorname{sh}\big(\frac{\delta}{2L}t\big)\big]$;

Exemple 3.16 (Circuit *RLC*)

Reprenons le circuit *RLC* décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \geqslant 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} L\ddot{u}_C(t) + R\dot{u}_C + \dfrac{1}{C}\,u_C(t) = \dfrac{1}{C}u_0\cos(\omega t) & \text{(E)} \\ u_C(0) = \dot{u}_C(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

1. ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

$$L\ddot{u}_H(t) + R\dot{u}_H + \frac{1}{C}\,u_H(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

d'équation **caractéristique** (C) : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$.

Notons r_1 et r_2 les racines de (C), $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ son discriminant et posons $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.

La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit, selon le signe de Δ selon :

- si $4\frac{L}{C} < R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-\delta}{2L}$, $r_2 = \frac{-R+\delta}{2L}$ et $u_H(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\lambda\,\mathrm{ch}\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \mu\,\mathrm{sh}\left(\frac{\delta}{2L}t\right)\right]$;
- si $4\frac{L}{C} > R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-\mathrm{i}\delta}{2L}$, $r_2 = \frac{-R+\mathrm{i}\delta}{2L}$ et $u_H(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\lambda\cos\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\delta}{2L}t\right)\right]$;

Exemple 3.16 (Circuit *RLC*)

Reprenons le circuit *RLC* décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \geqslant 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} L\ddot{u}_c(t) + R\dot{u}_c + \dfrac{1}{C}\,u_c(t) = \dfrac{1}{C}u_0\cos(\omega t) & \text{(E)} \\ u_c(0) = \dot{u}_c(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

1. ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

$$L\ddot{u}_H(t) + R\dot{u}_H + \frac{1}{C}\,u_H(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

d'équation **caractéristique** (C) : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$.

Notons r_1 et r_2 les racines de (C), $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ son discriminant et posons $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.

La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit, selon le signe de Δ selon :

- si $4\frac{L}{C} < R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-\delta}{2L}$, $r_2 = \frac{-R+\delta}{2L}$ et $u_H(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\lambda\,\mathrm{ch}\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \mu\,\mathrm{sh}\left(\frac{\delta}{2L}t\right)\right]$;
- si $4\frac{L}{C} > R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-\mathrm{i}\delta}{2L}$, $r_2 = \frac{-R+\mathrm{i}\delta}{2L}$ et $u_H(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\lambda\cos\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\delta}{2L}t\right)\right]$;
- si $4\frac{L}{C} = R^2$, alors $r_1 = r_2 = -\frac{R}{2L}$ et $u_H(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$

où, dans chaque cas, λ et μ sont des réels quelconques.

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**
   Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0\cos(\omega t) = u_0\,\Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0\,\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

- Cas $R \neq 0$. On recherche une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)$.

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

❷ ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0 \,\Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

- Cas $R \neq 0$. On recherche une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$. On trouve $A = \frac{u_0}{2[(1-LC\omega^2)+\mathrm{i}RC\omega]}$ puis en posant $D = (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:

$$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1 - LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right].$$

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

❷ ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0 \,\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

- Cas $R \neq 0$. On recherche une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$. On trouve $A = \frac{u_0}{2[(1-LC\omega^2)+\mathrm{i}RC\omega]}$ puis en posant $D = (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:

$$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1 - LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t)\right].$$

- Cas $R = 0$. On a $\delta = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et les racines de (C) sont $r_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$ et $r_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$.

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

❷ ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0 \, \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

- Cas $R \neq 0$. On recherche une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$.
  On trouve $A = \frac{u_0}{2[(1-LC\omega^2)+\mathrm{i}RC\omega]}$ puis en posant $D = (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:
  $$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1 - LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t)\right].$$
- Cas $R = 0$. On a $\delta = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et les racines de (C) sont $r_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$ et $r_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$.
  Deux cas sont à distinguer :
  * si $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la solution u_P du cas précédent se simplifie selon
  $$u_P(t) = \frac{u_0}{1 - LC\omega^2}\cos(\omega t);$$

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

❷ ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0 \,\Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

- Cas $R \neq 0$. On recherche une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.
  On trouve $A = \frac{u_0}{2[(1-LC\omega^2)+\mathrm{i}RC\omega]}$ puis en posant $D = (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:
  $$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1 - LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t)\right].$$
- Cas $R = 0$. On a $\delta = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et les racines de (C) sont $r_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$ et $r_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$.
  Deux cas sont à distinguer :
  - ∗ si $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la solution u_P du cas précédent se simplifie selon
    $$u_P(t) = \frac{u_0}{1 - LC\omega^2}\cos(\omega t);$$
  - ∗ si $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, condition qui s'écrit encore $LC\omega^2 = 1$, on recherche ici une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(Bt\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0 \, \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de (C)).

- Cas $R \neq 0$. On recherche une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$. On trouve $A = \frac{u_0}{2[(1-LC\omega^2)+\mathrm{i}RC\omega]}$ puis en posant $D = (1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:

$$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1-LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right].$$

- Cas $R = 0$. On a $\delta = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et les racines de (C) sont $r_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$ et $r_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{LC}}$. Deux cas sont à distinguer :
  * si $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la solution u_P du cas précédent se simplifie selon

$$u_P(t) = \frac{u_0}{1-LC\omega^2}\cos(\omega t);$$

  * si $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, condition qui s'écrit encore $LC\omega^2 = 1$, on recherche ici une solution **particulière** de la forme $u_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(Bt\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$. On obtient $B = -\frac{\mathrm{i}\omega u_0}{2}$ puis

$$u_P(t) = \frac{u_0}{2}\omega t\sin(\omega t).$$

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

❸ ***Résolution du système* (E)–(CI)**
La **solution générale** de (E) s'obtient selon $u_C = u_H + u_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

③ ***Résolution du système* (E)–(CI)**

La **solution générale** de (E) s'obtient selon $u_C = u_H + u_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

- Cas $R \neq 0$.

$$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1 - LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right]$$

Exemple 3.16 (Circuit *RLC*)

③ ***Résolution du système*** **(E)–(CI)**

La **solution générale** de (E) s'obtient selon $u_C = u_H + u_P$.

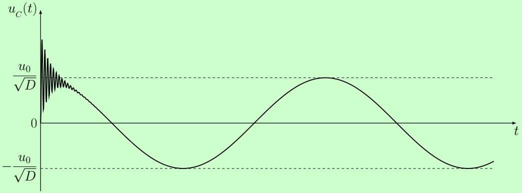
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

- Cas $R \neq 0$.

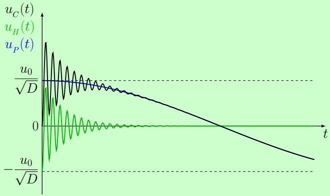
$$u_P(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1 - LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t)\right]$$

et

$$u_H(t) = \begin{cases} -\frac{u_0}{D}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[(1-LC\omega^2)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \frac{R}{\delta}(1+LC\omega^2)\,\mathrm{sh}\left(\frac{\delta}{2L}t\right)\right] & \text{si } 4\frac{L}{C} < R^2 \\ -\frac{u_0}{D}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[(1-LC\omega^2)\cos\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \frac{R}{\delta}(1+LC\omega^2)\sin\left(\frac{\delta}{2L}t\right)\right] & \text{si } 4\frac{L}{C} > R^2 \\ -\frac{u_0}{D}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[(1-LC\omega^2) + \frac{R}{2L}(1+LC\omega^2)t\right] & \text{si } 4\frac{L}{C} = R^2 \end{cases}$$



En temps long :
régime **permanent** (« quasi-périodique »)



Zoom en temps petit :
régime **transitoire**

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

3. ***Résolution du système* (E)–(CI)**

La **solution générale** de (E) s'obtient selon $u_C = u_H + u_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

- Cas $R = 0$. Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (c'est la pulsation **propre** du circuit).
  L'équation (E) se réécrit alors $\ddot{u}_C(t) + \omega_0^2\, u_C(t) = \omega_0^2\, u_0 \cos(\omega t)$.

Exemple 3.16 (Circuit RLC)

3. ***Résolution du système* (E)–(CI)**

La **solution générale** de (E) s'obtient selon $u_C = u_H + u_P$.

Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

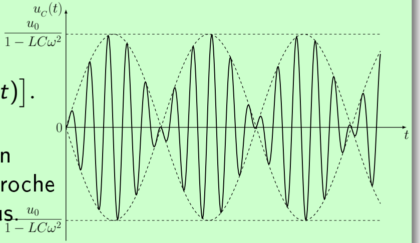
- Cas $R = 0$. Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (c'est la pulsation **propre** du circuit).

  L'équation (E) se réécrit alors $\ddot{u}_C(t) + \omega_0^2\, u_C(t) = \omega_0^2\, u_0 \cos(\omega t)$.

  * Si $\omega \neq \omega_0$:

$$u_C(t) = \frac{\omega_0^2\, u_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$

Lorsque ω se rapproche de ω_0, il y a un phénomène de **battements** qui se rapproche de celui de **résonance** signalé ci-dessous.



Exemple 3.16 (Circuit RLC)

❸ ***Résolution du système* (E)–(CI)**

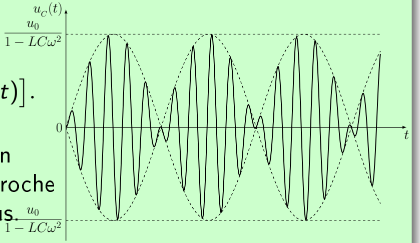
La **solution générale** de (E) s'obtient selon $u_C = u_H + u_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

- Cas $R = 0$. Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (c'est la pulsation **propre** du circuit).
  L'équation (E) se réécrit alors $\ddot{u}_C(t) + \omega_0^2\, u_C(t) = \omega_0^2\, u_0 \cos(\omega t)$.

  ∗ Si $\omega \neq \omega_0$:

  $$u_C(t) = \frac{\omega_0^2\, u_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\big[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\big].$$

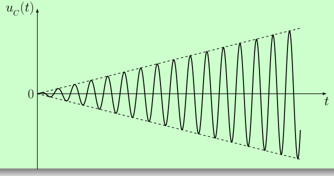
  Lorsque ω se rapproche de ω_0, il y a un phénomène de **battements** qui se rapproche de celui de **résonance** signalé ci-dessous.



  ∗ Si $\omega = \omega_0$:

  $$u_C(t) = \frac{u_0}{2}\omega_0 t \sin(\omega_0 t).$$

  La tension est amplifiée : il y a **résonance**.



Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

Reprenons le problème du solide décrit en introduction de masse m accroché à un ressort de raideur k sollicité par une force externe sinusoïdale $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ dans le cas non amorti (i.e. $c = 0$).
Le déplacement vérifie le système

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F_0 \cos(\omega t) & \text{(E)} \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

Reprenons le problème du solide décrit en introduction de masse m accroché à un ressort de raideur k sollicité par une force externe sinusoïdale $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ dans le cas non amorti (i.e. $c = 0$).
Le déplacement vérifie le système

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F_0 \cos(\omega t) & \text{(E)} \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

1. ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

   L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

   $$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

   d'équation **caractéristique** (C) : $mr^2 + k = 0$.

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

Reprenons le problème du solide décrit en introduction de masse m accroché à un ressort de raideur k sollicité par une force externe sinusoïdale $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ dans le cas non amorti (i.e. $c = 0$).
Le déplacement vérifie le système

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F_0 \cos(\omega t) & \text{(E)} \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

1. ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

   L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

   $$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

   d'équation **caractéristique** (C) : $mr^2 + k = 0$.

   Posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (c'est la pulsation **propre** du système).
   L'équation (E_0) se réécrit plus simplement : $\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$.
   Les racines de (C) sont $r_1 = \mathrm{i}\omega_0$ et $r_2 = -\mathrm{i}\omega_0$.

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

Reprenons le problème du solide décrit en introduction de masse m accroché à un ressort de raideur k sollicité par une force externe sinusoïdale $F_{ext}(t) = F_0\cos(\omega t)$ dans le cas non amorti (i.e. $c = 0$).
Le déplacement vérifie le système

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F_0\cos(\omega t) & \text{(E)} \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

---

1. ***Résolution de l'équation homogène associée à* (E)**

   L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit

   $$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

   d'équation **caractéristique** (C) : $mr^2 + k = 0$.

   Posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (c'est la pulsation **propre** du système).

   L'équation (E_0) se réécrit plus simplement : $\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$.

   Les racines de (C) sont $r_1 = \mathrm{i}\omega_0$ et $r_2 = -\mathrm{i}\omega_0$.

   La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit selon

   $$x_H(t) = \lambda\cos(\omega_0 t) + \mu\sin(\omega_0 t), \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Réécrivons (E) sous la forme **normalisée**

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \qquad \text{(E)}$$

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $F_0 \cos(\omega t) = F_0\, \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Réécrivons (E) sous la forme **normalisée**

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \qquad \text{(E)}$$

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $F_0 \cos(\omega t) = F_0\, \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Deux cas sont à distinguer :

- si $\omega \neq \omega_0$, on recherche une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Réécrivons (E) sous la forme **normalisée**

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad \text{(E)}$$

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $F_0\cos(\omega t) = F_0\,\Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Deux cas sont à distinguer :

- si $\omega \neq \omega_0$, on recherche une solution **particulière** de la forme $x_P(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.
  On trouve $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ puis :

$$x_P(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t).$$

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Réécrivons (E) sous la forme **normalisée**

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad \text{(E)}$$

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $F_0 \cos(\omega t) = F_0\, \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Deux cas sont à distinguer :

- si $\omega \neq \omega_0$, on recherche une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.
  On trouve $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ puis :

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t).$$

- si $\omega = \omega_0$, condition qui s'écrit encore $m\omega^2 = k$, on recherche à présent une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \Re\mathrm{e}\big(Bt\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\big)$.

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

2. ***Recherche d'une solution particulière de* (E)**

Réécrivons (E) sous la forme **normalisée**

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad \text{(E)}$$

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $F_0 \cos(\omega t) = F_0\, \Re\mathrm{e}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.

Deux cas sont à distinguer :

- si $\omega \neq \omega_0$, on recherche une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \Re\mathrm{e}\big(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$.
  On trouve $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ puis :
  $$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t).$$
- si $\omega = \omega_0$, condition qui s'écrit encore $m\omega^2 = k$, on recherche à présent une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \Re\mathrm{e}\big(Bt\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\big)$.
  On obtient $B = -\frac{\mathrm{i}F_0}{2m\omega_0}$ puis :
  $$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\, t\sin(\omega_0 t).$$

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

③ ***Résolution du système*** **(E)–(CI)**
La **solution générale** de (E) s'obtient selon $x = x_H + x_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

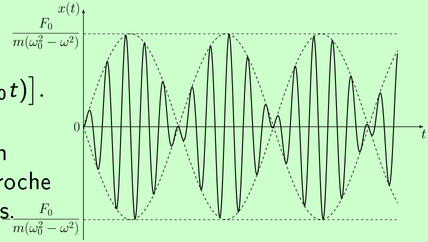
❸ ***Résolution du système* (E)–(CI)**

La **solution générale** de (E) s'obtient selon $x = x_H + x_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

- Si $\omega \neq \omega_0$:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$

Lorsque ω se rapproche de ω_0, il y a un phénomène de **battements** qui se rapproche de celui de **résonance** signalé ci-dessous.



Exemple 3.17 (Oscillateur harmonique forcé)

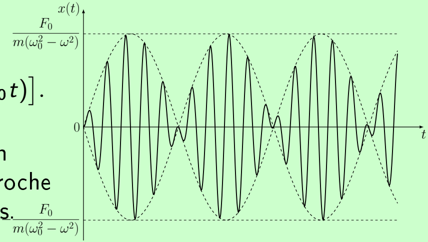
❸ ***Résolution du système* (E)–(CI)**

La **solution générale** de (E) s'obtient selon $x = x_H + x_P$.
Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.

- Si $\omega \neq \omega_0$:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$

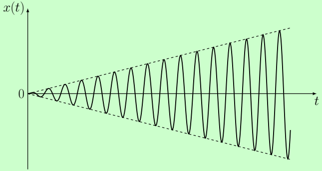
Lorsque ω se rapproche de ω_0, il y a un phénomène de **battements** qui se rapproche de celui de **résonance** signalé ci-dessous.



- Si $\omega = \omega_0$:

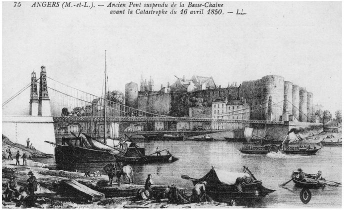
$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Les vibrations sont amplifiées : il y a **résonance**.
Ce phénomène pourrait être à l'origine de plusieurs effondrements de ponts suspendus...

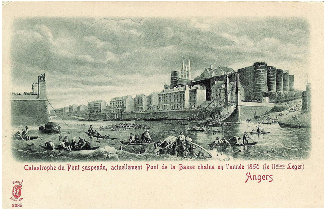


f) Effets de la résonance...

Pont de la Basse Chaîne, Angers – Catastrophe du 16 avril 1850

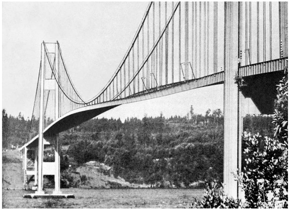


Avant la catastrophe



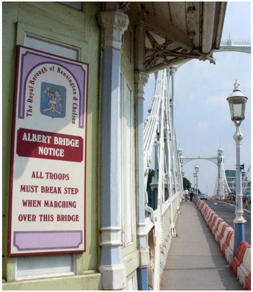
Après la catastrophe

Tacoma Narrows Bridge, État de Washington – Catastrophe du 7 novembre 1940



Au début de la catastrophe

Pendant la catastrophe



Albert Bridge, Londres

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_equations_differentielles/equations_differentielles0.html

Notions à retenir

- Techniques de résolution
  - ⋆ Équation homogène associée
  - ⋆ Recherche de solutions particulières pour un second membre exponentiel/trigonométrique (approches réelles et complexes)
  - ⋆ Principes de superposition
  - ⋆ Résolution de problème de Cauchy