INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Compléments sur les polynômes Formule de Taylor

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

On rappelle que l'on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (cf. chapitre 1). $\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé de la fonction nulle.

Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme, et la notation X^k pour désigner la fonction $x\mapsto x^k$ ($k\in\mathbb{N}$) qui permettra de noter toute fonction polynôme de degré n ($n\in\mathbb{N}$) selon $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

Théorème-définition 1.1 (Division euclidienne)

Pour tout $A\in\mathbb{K}[X]$ et tout $B\in\mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $A=BQ+R$ avec $\deg(R)<\deg(B)$.

*Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de A par B.*

Définition 1.2 (Divisibilité)

Soit $A\in\mathbb{K}[X]$ et $B\in\mathbb{K}[X]^*$.
*On dit que **A est divisible par B** (ou que **B divise A**) lorsque le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme **nul**.*
Autrement dit, A est divisible par B ssi il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A=BQ$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A=6X^2+7X+9$ et $B=2X+1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2+7X+9 & 2X+1 \\ \hline -(6X^2+3X) & 3X+2 \\ \hline 4X+9 & \\ -(4X+2) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A=BQ+R$ avec $Q=3X+2$ et $R=7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 1.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R, R étant de degré <1, tels que $A=BQ+R$.
- R est en fait un polynôme constant : $R=r$ avec $r\in\mathbb{K}$. On a donc $\forall x\in\mathbb{K}$, $A(x)=B(x)Q(x)+r$.
- En particulier pour $x=-\frac{1}{2}$, on a $B(-\frac{1}{2})=0$ donc $r=A(-\frac{1}{2})=7$. Ainsi $R=7$.

De manière générale, si $B=X-\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{K}$ (B est donc de degré 1), alors A se décompose selon $A=BQ+r$ avec $r=A(\alpha)$:

$$A=(X-\alpha)Q+A(\alpha).$$

Définition 1.3 (Racine)

*Soit $\alpha\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha)=0$.*

Proposition 1.4

Soit $\alpha\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$.
*α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X-\alpha$.*

Corollaire 1.5 (Racines et divisibilité)

1. *Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.*
   *$\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_p)$.*
2. *Tout polynôme (non nul) de degré $n\in\mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.*

Exemple 1.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P=X^3-2X^2-X+2$.

- On remarque que $P(1)=0$, i.e. 1 est racine de P. Donc P est divisible par $X-1$.
- La division euclidienne de P par $X-1$ fournit $P=(X-1)Q$ avec $Q=X^2-X-2$ qui admet pour racines -1 et 2. Ainsi P admet au moins 3 racines.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P=(X-1)(X+1)(X-2)$.

Définition 2.1 (Dérivées successives)

*Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le **polynôme dérivé** P' d'un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ par $P'=\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}$*
*et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k\geqslant 2$.*
Par exemple : $P^{(2)}=P''=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2}$, $P^{(3)}=P'''=\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k-2)a_kX^{k-3}$.
On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Proposition 2.2 (Degré des dérivées successives)

Soit $k\in\mathbb{N}$. Si $k\leqslant\deg(P)$, alors $\deg\big(P^{(k)}\big)=\deg(P)-k$. Si $k>\deg(P)$, alors $P^{(k)}=0$.

Proposition 2.3 (Formule de Maclaurin)

Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. On a pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, $P^{(k)}(0)=k!a_k$.

Ainsi :
$$P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k.$$

Corollaire 2.4

*Une fonction polynôme est la fonction **nulle** ssi **tous** ses coefficients sont **nuls**.*

Théorème 2.5 (Formule de Taylor pour les polynômes)

*Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P)=n$ ($n\in\mathbb{N}$). On a la formule de **Taylor** :*

$$\forall\alpha\in\mathbb{K},\quad P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

*En particulier, pour $\deg(P)\leqslant 3$, la formule de **Taylor** s'écrit :*

- *si $\deg(P)=1$: $P=P(\alpha)+P'(\alpha)(X-\alpha)$;*
- *si $\deg(P)=2$: $P=P(\alpha)+P'(\alpha)(X-\alpha)+\dfrac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2$;*
- *si $\deg(P)=3$: $P=P(\alpha)+P'(\alpha)(X-\alpha)+\dfrac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2+\dfrac{P'''(\alpha)}{6}(X-\alpha)^3$.*

Remarque 2.6 (Formule de Taylor et formule du binôme)

Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. Pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, on a $(X^n)^{(k)}(\alpha)=\dfrac{n!}{(n-k)!}\alpha^{n-k}$
et la formule de **Taylor** donne $X^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}(X-\alpha)^k$.
On retrouve la formule du **binôme de Newton** (avec $X=(X-\alpha)+\alpha$).

Exemple 2.7

Soit $P=X^3+5X^2+10X+10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :
  $$P(-1)=4\qquad P'(-1)=3\qquad P''(-1)=4\qquad P'''(-1)=6$$
- La formule de **Taylor** fournit alors
  $$P=1(X+1)^3+2(X+1)^2+3(X+1)+4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)
Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{llll} X^3+5X^2+10X+10 & \underline{|\ X+1} & & \\ \quad 4 & |\ X^2+4X+6 & \underline{|\ X+1} & \\ & \quad 3 & |\ X+3 & \underline{|\ X+1} \\ & & \quad 2 & |\ 1 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3+5X^2+10X+10 &= (X^2+4X+6)(X+1)+4\\ &= \big((X+3)(X+1)+3\big)(X+1)+4\\ &= (X+3)(X+1)^2+3(X+1)+4\\ &= \big(1(X+1)+2\big)(X+1)^2+3(X+1)+4\\ &= 1(X+1)^3+2(X+1)^2+3(X+1)+4. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un **développement arithmétique en base** $X+1$.

Définition 3.1 (Racines et multiplicité)

*Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-\alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$.*
*Si $\mu=1$ (resp. $\mu=2$, $\mu=3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P.*
*Lorsque $\mu\geqslant 2$ c'est une **racine multiple**.*

Proposition 3.2 (Racines et divisibilité)

1. *Si $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont des racines **distinctes** de P de multiplicités respectives $\mu_1,\dots,\mu_p$ alors P est divisible par le produit $(X-\alpha_1)^{\mu_1}\cdots(X-\alpha_p)^{\mu_p}$.*
2. *Tout polynôme de degré n admet **au plus** n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité.*

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de multiplicité.

Proposition 3.3 (Un critère de multiplicité)

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

*α est racine de P de multiplicité μ **ssi*** $\begin{cases} P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(\mu-1)}(\alpha)=0\\ \text{et}\\ P^{(\mu)}(\alpha)\neq 0\end{cases}$

Théorème 4.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet **au moins** *une racine dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 4.2

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet **exactement** *n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Théorème 4.3 (Factorisation sur $\mathbb{C}$)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **complexes** *distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ et A le coefficient de son monôme de plus haut degré. Le polynôme P se* **factorise** *sur $\mathbb{C}$ selon*

$$P = A(X-\alpha_1)^{\mu_1}(X-\alpha_2)^{\mu_2}\dots(X-\alpha_p)^{\mu_p} = A\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{\mu_k}.$$

Remarque 4.4 (Somme des multiplicités)

La somme des multiplicités des racines sur $\mathbb{C}$ d'un polynôme coïncide avec son degré :

$$\sum_{k=1}^{p}\mu_k = \deg(P).$$

Corollaire 4.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** *et le* **produit** *des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon*

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n}\alpha_k = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 4.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$
- Cas $deg(P) = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$
Complément (facultatif) : $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$.
- Cas $deg(P) = 4$: $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{e}{a}.$$
Complément (facultatif) : $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{c}{a}$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{d}{a}$

Proposition 4.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** *de multiplicité ν de P, alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité ν de P. Dans ce cas, P est divisible par $(X-\zeta)^\nu(X-\bar{\zeta})^\nu = (X^2 + aX + b)^\nu$ où $a = -2\Re(\zeta) \in \mathbb{R}$ et $b = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}$.*

Théorème 4.8 (Factorisation sur $\mathbb{R}$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note :

- *$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines* **réelles** *distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$;*
- *$\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_q, \bar{\zeta}_q$ ses racines* **complexes non réelles deux à deux conjuguées** *distinctes de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$;*
- *A le coefficient de son monôme de plus haut degré.*

Le polynôme P se **factorise** *sur $\mathbb{R}$ selon*

$$\begin{aligned} P &= A(X-\alpha_1)^{\mu_1}(X-\alpha_2)^{\mu_2}\dots(X-\alpha_p)^{\mu_p} \\ &\quad \times (X^2 + a_1X + b_1)^{\nu_1}(X^2 + a_2X + b_2)^{\nu_2}\dots(X^2 + a_qX + b_q)^{\nu_q} \\ &= A\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{\mu_k}\prod_{k=1}^{q}(X^2 + a_kX + b_k)^{\nu_k} \end{aligned}$$

où $a_k = -2\Re(\zeta_k)$ et $b_k = |\zeta_k|^2$.

Exemple 4.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.
Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.
- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi$ [mod 2π], soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
Les **racines de** P **dans** $\mathbb{C}$ sont donc
$$\zeta_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \qquad \zeta_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i$$
$$\zeta_3 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i = \bar{\zeta}_1 \qquad \zeta_4 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1 - i = \bar{\zeta}_2$$
Remarque : la somme et le produit des racines valent $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$ et $\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4 = 4$.
- D'où la **factorisation sur** $\mathbb{C}$:
$$P = (X-\zeta_1)(X-\zeta_2)(X-\zeta_3)(X-\zeta_4).$$
- Puis la **factorisation sur** $\mathbb{R}$:
$$P = (X-\zeta_1)(X-\bar{\zeta}_1)(X-\zeta_2)(X-\bar{\zeta}_2) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

Théorème 4.10 (Théorème de Rolle pour les polynômes)

Soit P une fonction polynôme **réelle** *admettant au moins* **deux racines réelles distinctes** *α et β. Alors la fonction polynôme P' admet au moins une* **racine réelle** *comprise entre α et β.*

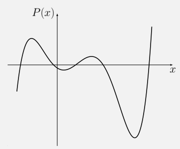
Corollaire 4.11 (Racines des dérivées)

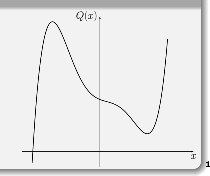
Si P est une fonction polynôme **réelle** *de degré n admettant* **exactement** *n racines* **réelles distinctes**, *alors la fonction polynôme P' admet* **exactement** *$(n-1)$ racines* **réelles distinctes** *séparant les racines de P.*

Plus généralement, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, la fonction polynôme $P^{(k)}$ admet **exactement** *$(n-k)$ racines* **réelles distinctes** *séparant les racines de $P^{(k-1)}$.*

Exemple 4.12 (Courbe et degré)

Que peut-on dire du **degré** des polynômes dont les **courbes représentatives** sont tracées ci-contre ?





Théorème 5.1 (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
$$= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

On dit qu'on a écrit la **formule de Taylor-Lagrange** *pour f sur $[a, b]$ à l'ordre n.*

Remarque 5.2

1. L'hypothèse plus forte (et plus simple) « Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle **fermé** $[a, b]$ » est suffisante.
2. Pour $n = 0$, on retrouve le **théorème des accroissements finis**.
3. Pour un polynôme P de degré n, on retrouve la formule de Taylor vue pour les polynômes (théorème 2.5). La formule de Taylor est **exacte** à l'ordre n pour tout polynôme P de degré n car le **reste** $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}P^{(n+1)}(c)$ est alors nul.
4. Le théorème reste valable si $b < a$, avec $c \in]b, a[$.

Proposition 5.3 (Autre formulation)

1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $t \in]0, 1[$ tel que*
$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(a + t(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
2. *En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(n+1)$ fois dérivable entre 0 et x ($x \in \mathbb{R}$), alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que*
$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(tx)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Proposition 5.4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Si $\left|f^{(n+1)}\right|$ admet un majorant $M > 0$ sur $]a, b[$, alors

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

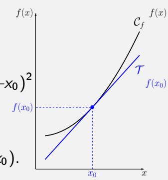
Exemple 5.5 (Sur l'exponentielle...)

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant e^{\max(x,0)}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$
En particulier pour $x = 1$ et $n = 7$, partant de $e \leqslant 3$, on a $\frac{e}{8!} \leqslant \frac{3}{8!} \leqslant 10^{-4}$ et alors $\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!} = \frac{685}{252}$ est une approximation de e à 10^{-4} près. On trouve ainsi $e \approx 2,7182\dots$
- On a $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ et alors $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ où l'on a noté $\sum_{k=0}^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}$.
- De manière similaire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
- Formellement, en remplaçant x par ix, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
et l'on retrouve la définition de l'exponentielle complexe : $e^{ix} = \cos x + i\sin x\dots$

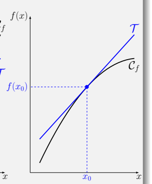
Exemple 5.6 (Position relative courbe/tangente)

Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un intervalle I, $x_0 \in I$, $M_0(x_0, f(x_0))$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet en M_0 une tangente $\mathcal{T}$ d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

1. Si f est **deux fois dérivable** sur I et $f'' \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) sur I, alors f est **convexe** (resp. **concave**) sur I.
La formule de Taylor-Lagrange donne $\forall x \in I, \exists t \in]0, 1[,$
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^2$$
et l'on en déduit
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant (\text{resp.} \leqslant) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
En d'autres termes, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de $\mathcal{T}$.

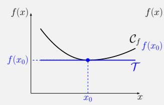


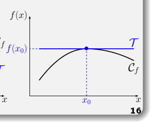
Cas $f'' \geqslant 0$



Cas $f'' \leqslant 0$

En particulier, si $f'(x_0) = 0$ (i.e. x_0 est un **point critique** de f), alors f admet un **minimum** (resp. **maximum**) **global** en x_0.





Exemple 5.6 (Position relative courbe/tangente)

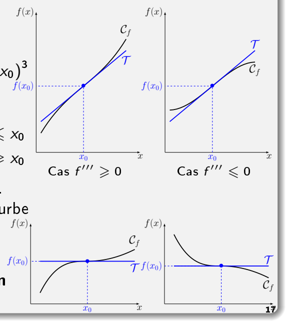
Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un intervalle I, $x_0 \in I$, $M_0(x_0, f(x_0))$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet en M_0 une tangente $\mathcal{T}$ d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

❷ Si f est **trois fois dérivable** sur I, si $f''(x_0) = 0$ et $f''' \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$) sur I, alors f'' est monotone et change de signe en x_0.
La formule de Taylor-Lagrange donne
$\forall x \in I$, $\exists t \in]0,1[$,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{6}f'''(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^3$$

et l'on en déduit, e.g. lorsque $f''' \geqslant 0$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \begin{cases} \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & \text{si } x \leqslant x_0 \\ \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & \text{si } x \geqslant x_0 \end{cases}$$



Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente $\mathcal{T}$.
La fonction f **change de concavité** en x_0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en M_0 un **point d'inflexion**.

En particulier, si $f'(x_0) = 0$ (i.e. x_0 est un **point critique** de f), dans ce cas f n'admet ni **minimum** ni **maximum** en x_0.

Exemple 6.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$.
Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

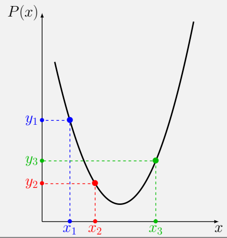
$$L_1 = \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)}, \quad L_3 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1)=1$, $L_1(x_2)=L_1(x_3)=0$, $L_2(x_2)=1$, $L_2(x_1)=L_2(x_3)=0$ et $L_3(x_2)=0$, $L_3(x_1)=L_3(x_3)=1$.

Posons alors $P = y_1P_1 + y_2P_2 + y_3P_3$. On constate aisément que P vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leqslant 2$ et $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$.

Remarque : en fait, P est le **seul** polynôme vérifiant ces conditions. En effet, s'il existait un autre tel polynôme Q, le polynôme $Q-P$ serait de degré $\leqslant 2$ et admettrait x_1, x_2, x_3 comme racines, ce qui entraîne nécessairement $Q-P=0$, soit $Q=P$.

Interprétation géométrique : par 3 points distincts non alignés, il passe une unique parabole d'axe vertical. On dit que l'on a « interpolé » les trois points par une parabole.



Exemple 6.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** $x_1, \ldots, x_n$ et n réels $y_1, \ldots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1)=y_1, \ldots, P(x_n)=y_n$.

Application : interpolation d'une fonction
Déterminons la fonction polynôme de degré $\leqslant 4$ qui interpole la fonction sinus aux points $x_1 = -\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$, $x_5 = \pi$.
Les polynômes de Lagrange élémentaires associés à ces points s'écrivent

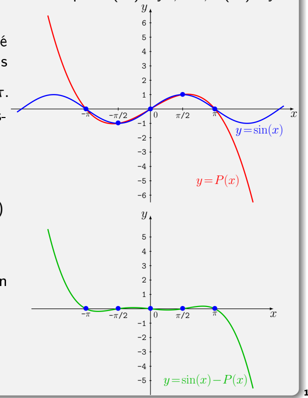
$$L_1 = \tfrac{2}{3\pi^4}(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)$$
$$L_2 = -\tfrac{8}{3\pi^4}(X+\pi)X(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)$$
$$L_3 = \tfrac{4}{\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)$$
$$L_4 = -\tfrac{8}{3\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\pi)$$
$$L_5 = \tfrac{2}{3\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\tfrac{\pi}{2})$$

et le **polynôme d'interpolation** s'obtient selon

$$P = \sum_{k=1}^{5} f(x_k)L_k$$

soit

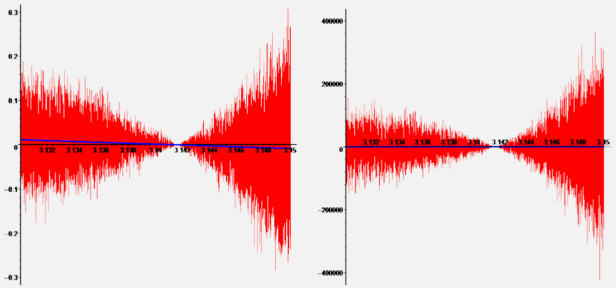
$$P = -\frac{8}{3\pi^3}X^3 + \frac{8}{3\pi}X.$$



Exemple 6.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

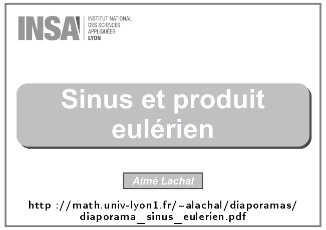
Remarque : l'**interpolation** ne fournit pas nécessairement une bonne **approximation** globale...

Exemple : pour la fonction sinus avec des points équirépartis sur $[-\pi,\pi]$, il y a un « effet de bord » **(phénomène de Runge)**...



$n=60$ points $\qquad$ $n=80$ points

Au voisinage de π



Notions à retenir

- Division euclidienne
- Racines (multiplicité, caractérisation, factorisation sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)
- Formule de Taylor-Lagrange (énoncé et applications)
  - Cas des polynômes
  - Inégalité de Taylor-Lagrange et calcul numérique
  - Détermination de la position courbe/tangente
  - Étude de la convexité, détermination de points d'inflexion