

# Comparaison locale de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année



## Sommaire

- 1 Motivations
  - Problématique
  - Outil de comparaison
- 2 Négligeabilité d'une fonction devant une autre
  - Définition et caractérisation
  - Propriétés
- 3 Équivalence de fonctions
  - Définition et caractérisation
  - Propriétés
  - Équivalents usuels
  - Cas particulier de la somme
  - Composition d'équivalents

## 1. Motivation

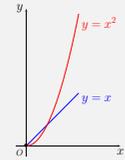
## a) Problématique

### Problématique

Comparaison d'« ordre de grandeur » de deux fonctions au voisinage d'un point.

1 **Exemple 1** : comparaison des fonctions identité et carré

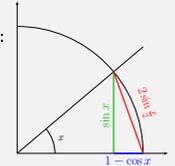
- $x^2$  est « beaucoup plus grand » que  $x$  lorsque  $x$  est « grand » ;
- $x^2$  est « beaucoup plus petit » que  $x$  lorsque  $x$  est « petit ».



2 **Exemple 2** : comparaison des fonctions cosinus et sinus

Dans le triangle ci-contre, lorsque l'angle  $x$  est « petit » :

- les trois côtés sont « petits »,
- le côté vertical ( $\sin x$ ) et l'hypoténuse ( $2 \sin \frac{x}{2}$ ) sont du « même ordre de grandeur »,
- alors que le côté horizontal ( $1 - \cos x$ ) est « beaucoup plus petit ».



## 1. Motivation

## b) Outil de comparaison

### Outil de comparaison

Un outil mathématique pour comparer les « ordres de grandeur » de deux fonctions  $f$  et  $g$  au voisinage d'un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  est la limite du rapport de  $f$  par  $g$ .

Trois cas de figure se présentent :

1 soit la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  est finie non nulle, c'est donc un réel non nul  $\ell$ .

Dans ce cas, la limite de  $\frac{f}{\ell g}$  en  $x_0$  vaut 1 ;

2 soit la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  est infinie ou nulle.

Lorsqu'elle est infinie, la limite de  $\frac{g}{f}$  en  $x_0$  est alors nulle ;

3 soit la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  n'existe pas. (Cette situation ne sera pas considérée ici.)

Les deux premiers cas conduisent à deux situations génériques : on va développer deux notions de comparaisons associées aux cas où la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  vaut 0 ou 1.

Formellement :

- lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$ , on introduira la notion de « négligeabilité locale (ou asymptotique) » ;
- lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1$ , on introduira la notion d'« équivalence locale (ou asymptotique) ».

## 2. Négligeabilité

## a) Définition et caractérisation

### Définition 2.1 (Négligeabilité)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

On dit que  $f$  est **négligeable devant  $g$  au voisinage de  $x_0$**  lorsqu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_0$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors  $f = o(g)$  ou encore  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} o(g(x))$  (notation de Landau).

**Remarque** : il s'agit d'une notation abusive, on devrait noter  $f \in o_{x_0}(g)$ .

### Proposition 2.2 (Formulation simple)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ ,  $g$  ne s'annulant pas au voisinage de  $x_0$ . Alors  $f = o(g) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$ .

En particulier :  $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$ .

### Exemple 2.3 (Croissances comparées)

1 Si  $\alpha > \beta$ , alors  $x^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} o(x^\beta)$  et  $x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(x^\alpha)$ .

2 Pour tous  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  :  $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(e^{\beta x})$  et  $e^{\beta x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$

$(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(x^\beta)$  et  $|\ln x|^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$

## 2. Négligeabilité

## b) Propriétés

### Proposition 2.4 (Opérations)

Soit  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

1 **Transitivité** :  $\left. \begin{array}{l} f = o(g) \\ g = o(h) \end{array} \right\} \implies f = o(h)$ .

2 **Opérations** :

• **Multiplication par un réel** :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f = o(g) \implies \alpha f = o(g)$ .

• **Addition** :  $\left. \begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array} \right\} \implies f + g = o(h)$ .

• **Multiplication** :  $\left. \begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(k) \end{array} \right\} \implies f \times g = o(hk)$ .

• **Puissances** :  $f = o(h) \implies \begin{cases} \forall \alpha > 0, |f|^\alpha = o(|h|^\alpha) \\ \forall \alpha < 0, |h|^\alpha = o(|f|^\alpha) \end{cases}$

## 3. Équivalence de fonctions

## a) Définition et caractérisation

### Définition 3.1 (Équivalence)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

On dit que  $f$  est **équivalente à  $g$  au voisinage de  $x_0$**  lorsqu'il existe une fonction  $\varphi$  définie sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_0$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1.$$

On note alors  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$  ou encore  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$  (notation de Landau).

### Proposition 3.2 (Formulation simple)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

1 Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $x_0$ , alors

$$f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

2 On a  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0 \iff f$  est nulle au voisinage de  $x_0$ .

### Remarque 3.3

$f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$  n'implique pas nécessairement l'existence d'une limite en  $x_0$  pour  $f$  et  $g$ .

Mais si ces limites existent, alors elles sont égales.

## 3. Équivalence de fonctions

## b) Propriétés

### Proposition 3.4 (Relation d'équivalence)

Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

1 **Réflexivité** :  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f$ .

2 **Symétrie** :  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \iff g \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f$ .

3 **Transitivité** :  $\left[ f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \text{ et } g \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h \right] \implies f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h$ .

### Proposition 3.5 (Limites et équivalence)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

1  $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$ .

2  $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$ ,  $\left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \right] \implies f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$ .

3  $\forall \ell \in \mathbb{R}$ ,  $\left[ f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \right] \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

### Remarque 3.6

Lorsque  $f$  admet une limite nulle ou infinie en  $x_0$ , la notion d'équivalence est non-triviale... Dans ce cas, un problème intéressant est de rechercher une fonction simple  $g$  tel que  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$ .

## 3. Équivalence de fonctions

## b) Propriétés

### Proposition 3.7 (Équivalence et négligeabilité)

1  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \iff (f - g) = o(g)$  (et aussi  $o(f)$ ). On écrit alors  $g = f + o(f)$ .

2 Si  $\left[ f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \text{ et } g = o(h) \right]$  ou si  $\left[ f = o(g) \text{ et } g \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h \right]$ , alors  $f = o(h)$ .

3 Si  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$  et si  $g$  est non nulle au voisinage de  $x_0$ , alors  $f$  et  $g$  sont de même signe au voisinage de  $x_0$ .

### Remarque 3.8 (Notion relative/absolue)

On fera attention de ne pas confondre  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0$ . En effet :

$$f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \iff f = g + o(g) \text{ alors que } \lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0 \iff f = g + o(1).$$

**Contre-exemple** :  $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  alors que  $(x^2 + x) - x^2 \not\rightarrow 0$ .

•  $(x^2 - x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$  alors que  $x^2 \not\sim x$ .

### Proposition 3.9 (Multiplication/division/puissances)

Soit  $f, g, h, k$  des fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si  $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h$  et  $g \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} k$ , alors :

$$\bullet f \times g \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h \times k \quad \bullet \frac{f}{g} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{h}{k} \quad \bullet |f|^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} |h|^\alpha$$

**Proposition 3.10 (Dérivabilité et comparaison)**

Supposons la fonction  $f$  dérivable en  $x_0$ .

- 1 Si  $f'(x_0) \neq 0$  alors :  $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$ .
- 2 Si  $f'(x_0) = 0$  alors :  $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(x - x_0)$ .

Ce résultat permet d'établir la plupart des équivalents usuels à connaître :

**Exemple 3.11 (Équivalents usuels)**

1 Fonctions exponentielle/logarithme/puissance :

$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$

2 Fonctions trigonométriques :

$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$   
 $\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

3 Fonctions hyperboliques :

$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$   
 $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$      $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$

**Exemple 3.14 (Une fonction hyperbolique)**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \operatorname{sh} x + \alpha \operatorname{th} x$ .

1 Analyse en 0 : on a  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

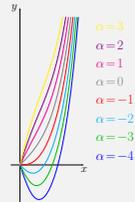
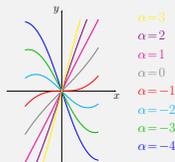
- Si  $\alpha \neq -1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (\alpha + 1)x$ .
- Si  $\alpha = -1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ .

Dans ce cas :

$f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{th} x = \operatorname{th} x (\operatorname{ch} x - 1)$ .

Or  $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ .

On obtient alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$ .



2 Analyse en  $+\infty$  : on a  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$  et  $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

Or  $1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{2}\right)$ .

On en déduit que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ .

**Proposition 3.16 (Composition « à droite »)**

Soit  $x_0$  et  $t_0$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\varphi$  une fonction telle que  $f \circ \varphi$  et  $g \circ \varphi$  existent au voisinage de  $t_0$ .

Si  $f \underset{x_0}{\sim} g$  et  $\lim_{t_0} \varphi = x_0$ , alors  $f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi$ .

**Remarque 3.17 (Composition « à gauche »)**

Il n'y a pas de règle générale pour la composition « à gauche » :

En général, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\psi$  une fonction telle que  $\psi \circ f$  et  $\psi \circ g$  existent au voisinage de  $x_0$ ,

$f \underset{x_0}{\sim} g \not\Rightarrow \psi \circ f \underset{x_0}{\sim} \psi \circ g$ .

**Contre-exemple :** • On a  $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  mais  $e^{x^2+x} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x^2}$ .

• On a  $1 + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$  mais  $\ln(1 + x^2) \not\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1 + x)$ .

**Proposition 3.18 (Cas de l'exponentielle et du logarithme (facultatif))**

1 Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0$ .

2 Soit  $f$  et  $g$  sont définies et strictement positives au voisinage de  $x_0$ .

Si  $f \underset{x_0}{\sim} g$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in [0, +\infty[ \setminus \{1\}$ , alors :  $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$ .

En règle générale, on n'ajoute pas d'équivalents, c'est-à-dire :

$(f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2)$  n'implique pas  $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2$ .

On a toutefois les résultats suivants :

**Proposition 3.12 (Somme et équivalence)**

1 Si  $f \underset{x_0}{\sim} g$  et  $h = o(g)$  alors  $f + h \underset{x_0}{\sim} g$ .

2 Si  $f = o(g)$  alors  $f + g \underset{x_0}{\sim} g$ .

3 Soit  $f_1, f_2$  et  $g$  trois fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  deux réels tels que

$f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha_1 g$  et  $f_2 \underset{x_0}{\sim} \alpha_2 g$ .

Il y a alors deux cas à distinguer pour la somme  $f_1 + f_2$  :

• Si  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$  alors  $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} (\alpha_1 + \alpha_2)g$ .

• Si  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  alors  $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$ .

**Exemple 3.15 (Un calcul de limite/asymptote)**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Analyse en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - cx$ .

1 On a  $x^2 + ax + b \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  puis  $\sqrt{x^2 + ax + b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

• Si  $c \neq 1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (1 - c)x$ .

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ .

• Si  $c = 1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ .

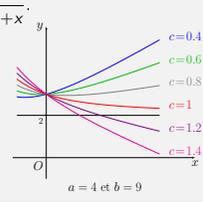
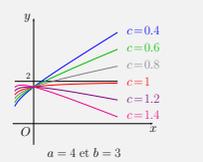
Dans ce cas,  $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - x = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x}$ .

Or  $\sqrt{x^2 + ax + b} + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$ .

On obtient alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$

(on a  $f(x) = 0$  lorsque  $a = b = 0$  et  $c = 1$ )

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{2}$ .



**Exemple 3.13 (Fonctions polynômes/fractions rationnelles)**

1 Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $m \leq n$ ,  $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$  des réels tels que  $a_m \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , et  $P$  la fonction polynôme définie pour tout réel  $x$  par  $P(x) = \sum_{k=m}^n a_k x^k$ . Alors :

$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_m x^m$  et  $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n$ .

**Exemple :** pour  $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$ , on a  $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$  et  $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} 3x^4$ .

2 Soit  $P$  une fonction polynôme non nulle et  $\alpha$  une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $\mu$ . Alors :

$P(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (x - \alpha)^\mu$ .

**Exemple :** pour  $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$ , on a  $P(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 2(x - 1)^2$ .

3 Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels,  $a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, \dots, a_0$  et  $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \dots, b_0$  des réels tels que  $a_p \neq 0$  et  $b_q \neq 0$ , et  $P$  et  $Q$  les fonctions polynômes définies pour tout réel  $x$  par  $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$  et  $Q(x) = \sum_{k=0}^q b_k x^k$ . Alors :

$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$ .

**Exemple 3.15 (Un calcul de limite/asymptote)**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Analyse en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - cx$ .

2 **Application :** considérons la fonction  $g$  définie par

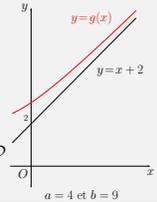
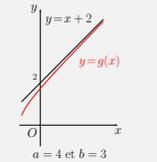
$g(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ .

• En choisissant  $c = 1$  dans  $f$ , on voit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + \frac{a}{2})] = 0$  donc  $\mathcal{C}_g$  admet une asymptote  $\mathcal{D}$  en  $+\infty$  d'équation  $y = x + \frac{a}{2}$ .

• Puis  $g(x) - (x + \frac{a}{2}) = \frac{b - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{x^2 + ax + b} + (x + \frac{a}{2})}$   
 $\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b - \frac{a^2}{4}}{2x}$  si  $b \neq \frac{a^2}{4}$

(on a  $g(x) = x + \frac{a}{2}$  lorsque  $b = \frac{a^2}{4}$ ).

On en déduit que  $\mathcal{C}_g$  est au-dessus (resp. au-dessous) de  $\mathcal{D}$  au voisinage de  $+\infty$  lorsque  $b > \frac{a^2}{4}$  (resp.  $b < \frac{a^2}{4}$ ).



**Notions à retenir**

- Notions de négligeabilité et d'équivalence asymptotiques
  - \* Comparaison locale de fonctions, ordre de grandeur local
  - \* Connaître les exemples usuels
  - \* Détermination d'équivalents par opérations diverses
  - \* Utilisation pour les calculs de limites
  - \* Étude de l'allure locale d'une courbe
  - \* Détermination de branches infinies, d'asymptotes