

Développements limités

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année



Sommaire

- Formule de Taylor-Young
 - Rappels
 - Énoncé
 - Comparaison Taylor-Lagrange/Taylor-Young
 - Cas des fonctions usuelles
- Développements limités
 - DL en un point
 - DL en l'infini
 - Cas particulier des DL₀ et DL₁
 - Quelques propriétés
 - Opérations

1. Formule de Taylor-Young

a) Rappels

Rappels

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 .

- Le fait d'être **dérivable en x_0** pour f entraîne la **continuité** de f en x_0 .
- Le fait d'être **n fois dérivable en x_0** pour f entraîne l'existence de $f^{(n-1)}$ sur un **voisinage de x_0** et a fortiori la **continuité** de f sur un **voisinage de x_0** .
Plus précisément, on a même
 f est **n fois dérivable en x_0**
 $\implies f$ est de classe $\mathcal{C}^{(n-2)}$ sur un voisinage de x_0 et de classe $\mathcal{C}^{(n-1)}$ en x_0 .
- L'écriture $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0 , on ait $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)h(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0$.
En particulier, l'écriture $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o((x - x_0)^n)$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0 , on ait $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^n$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0$.

1

1. Formule de Taylor-Young

b) Énoncé

Théorème 1.1 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 .

Si f est **n fois dérivable en x_0** , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Autre formulation : en posant $h = x - x_0$,

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n).$$

Exemple 1.2 (Formule de Taylor-Young aux ordres 1 et 2)

- Ordre 1** : si f est dérivable en x_0 , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

- Ordre 2** : si f est deux fois dérivable en x_0 , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

2

1. Formule de Taylor-Young

c) Taylor-Lagrange versus Taylor-Young

Remarque 1.3 (Comparaison Taylor-Lagrange/Taylor-Young)

Comparons les deux énoncés des formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young :

- Taylor-Lagrange** : si f est de classe \mathcal{C}^n sur $[x_0, x]$ et **$(n + 1)$ fois dérivable sur $]x_0, x[$** (ou plus simplement si f est **$(n + 1)$ fois dérivable sur $]x_0, x[$**), alors

$$\exists t \in]0, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

- Taylor-Young** : si f est **n fois dérivable en x_0** , alors il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \varepsilon(x)(x - x_0)^n \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0.$$

Les hypothèses portant sur f sont **plus fortes** avec la formule de Taylor-Lagrange (**$(n + 1)$ fois dérivable sur un intervalle fermé**) qu'avec celle de Taylor-Young (**f n fois dérivable en un point**). Mais la nature du résultat n'est pas la même :

- la formule de Taylor-Lagrange a un caractère **global** (les réels x et x_0 peuvent être « très » éloignés) ;
- la formule de Taylor-Young donne un résultat **local** (elle n'a de sens qu'au voisinage d'un point).

3

2. Développements limités

a) DL en un point

Définition 2.1 (Développement limité en x_0)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (pas nécessairement en x_0).

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en x_0** (noté $DL_n(x_0)$) lorsqu'il existe des coefficients a_0, \dots, a_n tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ est appelé **partie régulière** du $DL_n(x_0)$.

Autre formulation : en posant $h = x - x_0$,

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

On peut également définir des **développements limités à droite et à gauche** en x_0 .

Remarque 2.2 (Formule Taylor-Young et DL)

La formule de Taylor-Young fournit pour toute fonction f **n fois dérivable en x_0** un

$DL_n(x_0)$ de coefficients $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$.

Mais en pratique, pour établir des développements limités en x_0 , on utilisera rarement cette formule qui nécessite le calcul des dérivées successives de la fonction.

On s'appuiera sur les développements limités obtenus en 0 par cette formule pour les fonctions usuelles et on utilisera le **changement de variable** $h = x - x_0$ ainsi que les propriétés des DL qui seront énoncées ultérieurement.

5

2. Développements limités

b) DL en l'infini

Remarque 2.3 (Développement limité en l'infini)

Étant donnée une fonction f définie au voisinage de $\pm\infty$, le changement de variable $X = 1/x$ permet d'obtenir un **développement limité de f en l'infini** à partir d'un $DL_n(0)$ de $f(1/x)$, c'est-à-dire une écriture valable au voisinage de l'infini de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 2.4 (Développement asymptotique et asymptote)

Si une fonction g définie au voisinage de l'infini est telle que $g(x)/x$ admette un

$DL_2(\pm\infty)$ de la forme $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on peut écrire

$$g(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette écriture est appelée **développement limité généralisé** ou **développement asymptotique** et met en évidence une **asymptote** pour g d'équation $y = a_0x + a_1$.

De plus le signe du coefficient a_2 indique la **position locale** au voisinage de $\pm\infty$ de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$, si $a_2 > 0$ (resp. $a_2 < 0$), alors la courbe est **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de son asymptote.

6

2. Développements limités

c) Cas particulier des DL₀ et DL₁

Proposition 2.5 (DL₀ et DL₁)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 .

- f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une **limite finie en x_0** . Plus précisément :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + o(1) \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = a_0.$$

f est alors **prolongeable par continuité en x_0** . On posera $f(x_0) = a_0$.

- f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est **dérivable en x_0** (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Remarque 2.6 (DL et dérivabilité d'ordre supérieur)

Si $n \geq 2$, pour une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 , le fait d'être **n fois dérivable en x_0** est une **condition suffisante** pour admettre un $DL_n(x_0)$ (donné par la formule de Taylor-Young) mais **non nécessaire**. Autrement dit, l'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 2$ **ne garantit pas** l'existence de la dérivée n^{e} de f en x_0 .

Exemple : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$ mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

7

Proposition 2.7 (Diverses propriétés)

- 1 Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors f admet un $DL_p(x_0)$ pour tout $p \leq n$ obtenu par « troncature » au degré p du $DL_n(x_0)$.
- 2 Si une fonction admet un $DL_n(x_0)$ alors celui-ci est **unique** (i.e. les coefficients a_k sont uniques).

Conséquences :

- Si f admet un $DL_n(x_0)$ et est n fois dérivable en x_0 , alors la formule de Taylor-Young fournit le $DL_n(x_0)$ de f :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

- Si f est **paire** et admet un $DL_n(0)$ alors sa partie régulière est **paire** (i.e. uniquement avec des exposants pairs).
- Si f est **impaire** et admet un $DL_n(0)$ alors sa partie régulière est **impaire** (i.e. uniquement avec des exposants impairs).

Exemple 2.8

- 1 Les fonctions cos et ch sont **paires** et admettent des DL de partie régulière **paire**.
- 2 Les fonctions sin et sh sont **impaires** et admettent des DL de partie régulière **impaire**.

Exemple 2.11 (Tangente/cotangente)

Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction tan. On part des $DL_3(0)$ de cos x et sin x :

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

• Division de sin x par cos x.

Puisque $\cos(0) \neq 0$, tan admet un $DL_3(0)$ obtenu par division suivant les puissances **croissantes** de $x - \frac{1}{6}x^3$ par $1 - \frac{1}{2}x^2$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{r} x - \frac{1}{6}x^3 \\ -(x - \frac{1}{2}x^2) \\ \hline \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \\ \frac{1}{3}x^3 \\ \hline -\frac{1}{3}x^3 \\ \frac{1}{3}x^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

soit $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

• Division de cos x par sin x.

En revanche, $\sin(0) = 0$. Pour obtenir un développement de cot, on ne peut pas utiliser directement la règle, mais on peut toutefois effectuer **formellement** une division suivant les puissances **croissantes** de $1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ par $x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$:

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\ -(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) \\ \hline -x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^2) \\ \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \\ \hline -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \\ \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \\ \hline o(x^2) \end{array}$$

soit $\cot x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x)$.

Il s'agit d'un DL généralisé...

Proposition 2.14 (Composition)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 admettant un $DL_n(x_0)$ de la forme

$$f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

et g une fonction définie sur un voisinage de $y_0 = f(x_0)$ admettant un $DL_n(y_0)$ de la forme

$$g(y) = Q(y - y_0) + o((y - y_0)^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n . Alors $g \circ f$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$(g \circ f)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (Q \circ P)_{(n)}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $P_1 = P - y_0$ est le polynôme P privé de son terme constant et $(Q \circ P)_{(n)}$ est le polynôme déduit de $Q \circ P_1$ en ne conservant que les termes de degré au plus n .

Formulation simplifiée : si f et g sont des fonctions définies sur un voisinage de 0 telles que $f(0) = 0$ admettant des $DL_n(0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} Q(y) + o(y^n)$$

alors $g \circ f$ admet pour $DL_n(0)$:

$$(g \circ f)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (Q \circ P)_{(n)}(x) + o(x^n).$$

Proposition 2.9 (Addition, multiplication, division)

Soit f et g deux fonctions admettant des $DL_n(x_0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n . Alors :

- 1 $f + g$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (P + Q)(x - x_0) + o((x - x_0)^n);$$

- 2 $f \times g$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$(f \times g)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (P \times Q)_{(n)}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $(P \times Q)_{(n)}$ est le polynôme déduit de $P \times Q$ en ne conservant que les termes de degré au plus n ;

- 3 si de plus $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} R(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où R est le quotient de la division suivant les puissances **croissantes** de P par Q à l'ordre n .

Exemple 2.12 (Asymptote oblique)

Étude en $\pm\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}$.

- **Équivalent asymptotique** : on a $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{x}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

La courbe représentative C_f admet une branche infinie en $\pm\infty$ que l'on va étudier.

- **Changement de variable** : $h = \frac{1}{x}$ que l'on reporte dans $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1 - 6h + 14h^2}{2h - 4h^2} = \frac{1}{h} \times \frac{\varphi(h)}{\psi(h)} \quad \text{avec} \quad \varphi(h) = 1 - 6h + 14h^2 \quad \text{et} \quad \psi(h) = 2 - 4h.$$

- **Division de $\varphi(h)$ par $\psi(h)$** .

Puisque $\psi(0) \neq 0$, $\frac{\varphi(h)}{\psi(h)}$ admet un $DL_2(0)$ obtenu par division suivant les puissances **croissantes** de $1 - 6h + 14h^2$ par $2 - 4h$ à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{r} 1 - 6h + 14h^2 \\ -(2 - 4h) \\ \hline -4h + 14h^2 \\ \frac{1}{2} - 2h + 3h^2 \\ \hline -4h + 8h^2 \\ \frac{1}{2} - 4h + 8h^2 \\ \hline 6h^2 \end{array}$$

ce qui fournit $\frac{\varphi(h)}{\psi(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - 2h + 3h^2 + o(h^2)$

puis $f(x) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2h} - 2 + 3h + o(h)$

soit $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \frac{x}{2} - 2 + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Il s'agit d'un DL généralisé...

Exemple 2.15 (Composée d'exponentielle et de racine carrée)

Déterminons le $DL_3(0)$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{e^{4x} + 1}$. On part des $DL_3(0)$:

$$e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+v} \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{16}v^3 + o(v^3).$$

On a $e^{4x} + 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2(1 + 2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3))$ que l'on reporte dans $\varphi(x)$ (prendre garde au facteur 2 du DL ci-dessus) :

$$\begin{aligned} \varphi(x)/\sqrt{2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{1 + [2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)]} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}[2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)] - \frac{1}{8}[2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}[2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)]^3 + o[2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)]^3 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{8}[(2x)(1 + 2x + \frac{8}{3}x^2 + o(x^2))]^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}[(2x)(1 + 2x + \frac{8}{3}x^2 + o(x^2))]^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2[1 + 4x + o(x)] + \frac{1}{2}x^3[1 + o(1)] + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Remarque : en pratique, on pourra omettre dans les calculs tous les « o » excepté le dernier $o(x^3)$.

La fonction φ admet ainsi le $DL_3(0)$:

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{2} + \sqrt{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{7\sqrt{2}}{6}x^3 + o(x^3).$$

Exemple 2.10 (Autour des fonctions cos et ch)

Calculons les $DL_7(0)$ des fonctions $x \mapsto \cos x + \text{ch} x$, $x \mapsto (\cos x)(\text{ch} x)$, $x \mapsto (\cos x - 1)(\text{ch} x - 1)$.

On part des $DL_7(0)$ de $\cos x$ et $\text{ch} x$:

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7) \quad \text{et} \quad \text{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o(x^7).$$

- **Somme** : $\cos x + \text{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^7)$.

- **Produit** : $(\cos x)(\text{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^7)$.

Remarque : si on développe complètement le produit des parties régulières, on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2880}x^8 - \frac{1}{518400}x^{12}.$$

Les termes $\frac{1}{2880}x^8$ et $-\frac{1}{518400}x^{12}$ sont inutiles puisque l'on doit tronquer ce produit à l'ordre 7. De plus, ces termes **ne sont pas significatifs**. Si l'on pousse les DL de $\cos x$ et $\text{ch} x$ à l'ordre 12, on trouve en effet $(\cos x)(\text{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2520}x^8 + \frac{1}{7484400}x^{12} + o(x^{12})$.

- **Autre produit** : $(\cos x - 1)(\text{ch} x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{4}x^4 + o(x^7)$.

Remarque : ici, il est suffisant de prendre des DL de $\cos x$ et $\text{ch} x$ d'ordre 5 :

$$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{et} \quad \text{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Exemple 2.13 (Asymptote oblique)

Étude en $\pm\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}$.

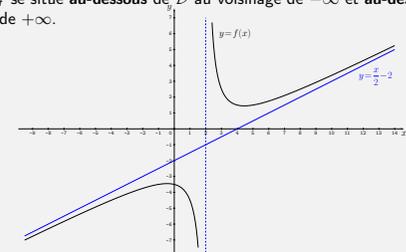
- **Interprétation géométrique** :

Le DLG $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \frac{x}{2} - 2 + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ fournit l'équivalent $f(x) - \left(\frac{x}{2} - 2\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{3}{x}$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} - 2\right)\right] = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} - 2\right)\right] = 0^+$.

Donc la courbe C_f admet une **asymptote** \mathcal{D} d'équation $y = \frac{x}{2} - 2$ en $\pm\infty$.

De plus C_f se situe **au-dessous** de \mathcal{D} au voisinage de $-\infty$ et **au-dessus** de \mathcal{D} au voisinage de $+\infty$.



Proposition 2.14 (Composition)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 admettant un $DL_n(x_0)$ de la forme

$$f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

et g une fonction définie sur un voisinage de $y_0 = f(x_0)$ admettant un $DL_n(y_0)$ de la forme

$$g(y) = Q(y - y_0) + o((y - y_0)^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n . Alors $g \circ f$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$(g \circ f)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (Q \circ P)_{(n)}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $P_1 = P - y_0$ est le polynôme P privé de son terme constant et $(Q \circ P)_{(n)}$ est le polynôme déduit de $Q \circ P_1$ en ne conservant que les termes de degré au plus n .

Formulation simplifiée : si f et g sont des fonctions définies sur un voisinage de 0 telles que $f(0) = 0$ admettant des $DL_n(0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} Q(y) + o(y^n)$$

alors $g \circ f$ admet pour $DL_n(0)$:

$$(g \circ f)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (Q \circ P)_{(n)}(x) + o(x^n).$$

Exemple 2.16 (Composée d'exponentielle et de racine carrée)

Déterminons un développement de la fonction $\psi : x \mapsto \sqrt{e^{4x} - 1}$. On part des DL en 0 :

$$e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+v} \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{16}v^3 + o(v^3).$$

On a $e^{4x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 4x(1 + 2x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3))$ que l'on reporte dans $\psi(x)$ (prendre garde au facteur 4x du DL ci-dessus) :

$$\begin{aligned} \psi(x)/(2\sqrt{x}) &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \sqrt{1 + [2x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)]} \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} 1 + \frac{1}{2}[2x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)] - \frac{1}{8}[2x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}[2x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)]^3 + o[2x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)]^3 \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} 1 + x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{8}[(2x)(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + o(x^2))]^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}[(2x)(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + o(x^2))]^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} 1 + x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2[1 + \frac{8}{3}x + o(x)] + \frac{1}{2}x^3[1 + o(1)] + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} 1 + x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

La fonction ψ admet ainsi le DL **généralisé** (ou **développement asymptotique**) :

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 2\sqrt{x} + 2x^{3/2} + \frac{5}{3}x^{5/2} + x^{7/2} + o(x^{7/2}).$$

Exemple 2.17 (Composée d'exponentielle et de cosinus/sinus)

Considérons les trois fonctions

$$\varphi_1: x \mapsto e^{\cos(2x)} + e^{1+\sin(x)}, \quad \varphi_2: x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\frac{1}{2}\sin(2x)}, \quad \varphi_3: x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\sin(x)}.$$

Déterminons leur DL₄(0). Partant des DL₄(0) usuels

$$\cos u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4), \quad \sin u \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{1}{6}u^3 + o(u^4),$$

$$e^v \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 + v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{24}v^4 + o(v^4),$$

on trouve (prendre garde au terme constant 1 dans les DL ci-dessus et dans $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$):

$$e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{\cos(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e - 2ex^2 + \frac{8e}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{1+\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e + ex + \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{1+\frac{1}{2}\sin(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e + ex + \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{6}x^3 - \frac{5e}{8}x^4 + o(x^4)$$

que l'on reporte dans $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$:

$$\varphi_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2e + ex - \frac{3e}{2}x^2 + \frac{61e}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\varphi_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2e + ex - \frac{e}{2}x^3 - \frac{11e}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\varphi_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2e + ex + \frac{e}{24}x^4 + o(x^4).$$

Exemple 2.17 (Composée d'exponentielle et de cosinus/sinus)

Considérons les trois fonctions

$$\varphi_1: x \mapsto e^{\cos(2x)} + e^{1+\sin(x)}, \quad \varphi_2: x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\frac{1}{2}\sin(2x)}, \quad \varphi_3: x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\sin(x)}.$$

Application géométrique :

Les DL tronqués

$$\varphi_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2e + ex - \frac{3e}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\varphi_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2e + ex - \frac{e}{2}x^3 + o(x^3),$$

$$\varphi_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2e + ex + \frac{e}{24}x^4 + o(x^4).$$

nous informons que les courbes représentatives C_1, C_2, C_3 de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ admettent en 0 la même tangente \mathcal{T} d'équation $y = ex + 2e$.

De plus, au voisinage de 0 :

$$\bullet \varphi_1(x) - (ex + 2e) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3e}{2}x^2$$

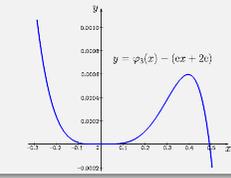
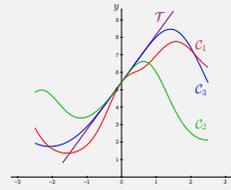
donc C_1 est **au-dessous** de \mathcal{T} ;

$$\bullet \varphi_2(x) - (ex + 2e) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{e}{2}x^3$$

donc C_2 **traverse** \mathcal{T} ;

$$\bullet \varphi_3(x) - (ex + 2e) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e}{24}x^4$$

donc C_3 est **au-dessus** de \mathcal{T} (cf. zoom).



Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{\text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

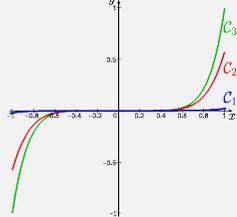
Posons $\varphi(x) = \text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

• **Dénominateur de f :** on part du DL₃(0) $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

$$\sin^5 x \underset{x \rightarrow 0}{=} [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} [x(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2))]^5$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} x^5 [1 - \frac{5}{6}x^2 + o(x^2)] \underset{x \rightarrow 0}{=} x^5 - \frac{5}{6}x^7 + o(x^7).$$

La fonction ψ admet ainsi le DL₇(0) : $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{5}{6}x^7 + o(x^7) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{5}{6}x^7$.



— courbe de φ
— courbe de ψ
— courbe de $x \mapsto x^7$

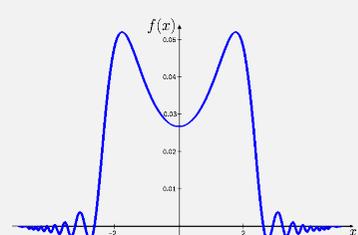
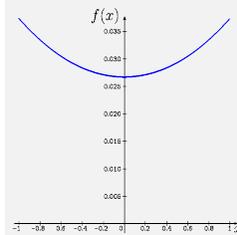
Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{\text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Posons $\varphi(x) = \text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

• **Limite de f :** On obtient finalement

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{45}x^7}{\frac{5}{6}x^7} = \frac{2}{75} \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{75}.$$



Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{\text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Posons $\varphi(x) = \text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

• **Numérateur de f :** on part des DL₇(0)

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7) \quad \text{et} \quad \text{sh } v \underset{v \rightarrow 0}{=} v + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 + \frac{1}{5040}v^7 + o(v^7).$$

$$\text{sh}(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} [x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7] + \frac{1}{6}[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7]^3$$

$$+ \frac{1}{120}[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7]^5 + \frac{1}{5040}[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7]^7 + o(x^7)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} [x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7] + \frac{1}{6}[x(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4)]^3$$

$$+ \frac{1}{120}[x(1 - \frac{1}{6}x^2)]^5 + \frac{1}{5040}[x]^7 + o(x^7)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} [x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7] + \frac{1}{6}x^3[1 + 3(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4) + 3(\frac{1}{36}x^4)]$$

$$+ \frac{1}{120}x^5[1 - \frac{5}{6}x^2] + \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{90}x^7 + o(x^7).$$

De même :

$$\sin(\text{sh } x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{90}x^7 + o(x^7).$$

La fonction φ admet ainsi le DL₇(0) : $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{45}x^7 + o(x^7) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{45}x^7$.

Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{\text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

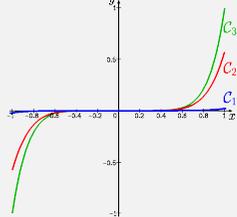
Posons $\varphi(x) = \text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

• **Dénominateur de f :** on part du DL₃(0) $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

$$\sin^5 x \underset{x \rightarrow 0}{=} [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} [x(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2))]^5$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} x^5 [1 - \frac{5}{6}x^2 + o(x^2)] \underset{x \rightarrow 0}{=} x^5 - \frac{5}{6}x^7 + o(x^7).$$

La fonction ψ admet ainsi le DL₇(0) : $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{5}{6}x^7 + o(x^7) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{5}{6}x^7$.



— courbe de φ
— courbe de ψ
— courbe de $x \mapsto x^7$

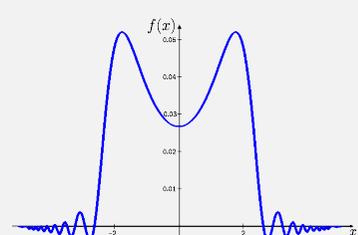
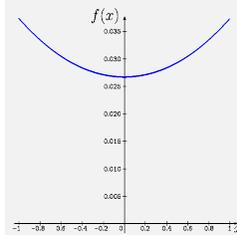
Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{\text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Posons $\varphi(x) = \text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

• **Limite de f :** On obtient finalement

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{45}x^7}{\frac{5}{6}x^7} = \frac{2}{75} \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{75}.$$



Proposition 2.19 (Dérivation/intégration)

Soit f une fonction définie continue en x_0 et dérivable au voisinage de x_0 .

Si f' admet un DL_n(x_0) alors f est de classe \mathcal{C}^1 en x_0 et admet un DL_{n+1}(x_0).

Plus précisément, si le DL_n(x_0) de f' est de la forme

$$f'(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

alors le DL_{n+1}(x_0) de f est donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

Exemple 2.20 (Arctangente)

Appliquons la règle précédente à la fonction $f = \arctan$ en 0.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. De plus f' admet le DL_n(0)

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Donc f admet le DL_{n+1}(0) obtenu par intégration (avec $f(0) = 0$) :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Remarque 2.21 (Contre-exemple)

Soit $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$. f admet un DL₂(0) alors que f' n'admet pas de DL₁(0).

Notions à retenir

- Formule de Taylor-Young (énoncé)
- Développements limités
 - * Connaître les DL usuels
 - * Calculs de DL par opérations diverses
 - * Utilisation pour les calculs de limites
 - * Détermination de la position locale courbe/tangente
 - * Étude de l'allure locale d'une courbe
 - * Détermination de branches infinies, d'asymptotes