INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Développements limités

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

Sommaire

Sommaire

Rappels

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0.

1. Le fait d'être **dérivable en x_0** pour f entraîne la **continuité** de f **en** x_0.
2. Le fait d'être **n fois dérivable en x_0** pour f entraîne l'existence de $f^{(n-1)}$ **sur un voisinage de x_0** et a fortiori la **continuité** de f **sur un voisinage de x_0**.

   Plus précisément, on a même

   $$f \text{ est } \boldsymbol{n} \textbf{ fois dérivable en } \boldsymbol{x_0}$$
   $$\Longrightarrow f \text{ est de } \textbf{classe } \mathcal{C}^{(n-2)} \textbf{ sur un voisinage de } \boldsymbol{x_0} \text{ et de } \textbf{classe } \mathcal{C}^{(n-1)} \textbf{ en } \boldsymbol{x_0}.$$

3. L'écriture $f(x) \underset{x \to x_0}{=} g(x) + o\big(h(x)\big)$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0, on ait $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)h(x)$ avec $\lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0$.

   En particulier, l'écriture $f(x) \underset{x \to x_0}{=} g(x) + o\big((x - x_0)^n\big)$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0, on ait $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^n$ avec $\lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0$.

Théorème 1.1 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0.
*Si f est **n fois dérivable en x_0**, alors*

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to x_0}{=} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big) \\ &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big). \end{aligned}$$

Autre formulation : *en posant $h = x - x_0$,*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &\underset{h \to 0}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n) \\ &\underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 (Formule de Taylor-Young aux ordres 1 et 2)

1. ***Ordre** 1 :* si f est **dérivable en x_0**, alors
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$
2. ***Ordre** 2 :* si f est **deux fois dérivable en x_0**, alors
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big).$$

Remarque 1.3 (Comparaison Taylor-Lagrange/Taylor-Young)

Comparons les deux énoncés des formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young :

- ***Taylor-Lagrange :*** si f est de **classe $\mathcal{C}^n$ sur $[x_0, x]$** et **$(n+1)$ fois dérivable sur $]x_0, x[$** (ou plus simplement si f est **$(n+1)$ fois dérivable sur $[x_0, x]$**), alors
$$\exists t \in]0,1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$
- ***Taylor-Young :*** si f est **n fois dérivable en x_0**, alors il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \varepsilon(x)(x-x_0)^n \quad \text{avec } \lim_{x_0} \varepsilon = 0.$$

Les hypothèses portant sur f sont **plus fortes** avec la formule de Taylor-Lagrange (f **$(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle fermé**) qu'avec celle de Taylor-Young (f **n fois dérivable en un point**). Mais la nature du résultat n'est pas la même :

- la formule de Taylor-Lagrange a un caractère **global** (les réels x et x_0 peuvent être « très » éloignés) ;
- la formule de Taylor-Young donne un résultat **local** (elle n'a de sens qu'au voisinage d'un point).

Voici une liste d'exemples **qu'il faut connaître.**

Exemple 1.4 (Fonctions usuelles au voisinage de 0)

- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
  $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
- $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
- $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$

Sommaire

Définition 2.1 (Développement limité en x_0)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (pas nécessairement en x_0).
On dit que f admet un ***développement limité d'ordre n en x_0*** *(noté $\mathrm{DL}_n(x_0)$) lorsqu'il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big).$$

Le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ est appelé ***partie régulière*** *du $\mathrm{DL}_n(x_0)$.*
Autre formulation : en posant $h = x - x_0$,

$$f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + o\big(h^n\big).$$

On peut également définir des ***développements limités à droite et à gauche*** *en x_0.*

Remarque 2.2 (Formule Taylor-Young et DL)

La formule de Taylor-Young fournit pour toute fonction f **n fois dérivable en x_0** un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de coefficients $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Mais en pratique, pour établir des développements limités en x_0, on utilisera rarement cette formule qui nécessite le calcul des dérivées successives de la fonction.

On s'appuiera sur les développements limités obtenus en 0 par cette formule pour les fonctions usuelles et on utilisera le **changement de variable** $h = x - x_0$ ainsi que les propriétés des DL qui seront énoncées ultérieurement.

Remarque 2.3 (Développement limité en l'infini)

Étant donnée une fonction f définie au voisinage de $\pm\infty$, le changement de variable $X = 1/x$ permet d'obtenir **un développement limité de *f* en l'infini** à partir d'un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f(1/x)$, c'est-à-dire une écriture valable au voisinage de l'infini de la forme

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 2.4 (Développement asymptotique et asymptote)

Si une fonction g définie au voisinage de l'infini est telle que $g(x)/x$ admette un $\mathrm{DL}_2(\pm\infty)$ de la forme $a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on peut écrire

$$g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette écriture est appelée **développement limité généralisé** ou **développement asymptotique** et met en évidence une **asymptote** pour g d'équation $y = a_0 x + a_1$.

De plus le signe du coefficient a_2 indique la **position locale** au voisinage de $\pm\infty$ de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$, si $a_2 > 0$ (resp. $a_2 < 0$), alors la courbe est **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de son asymptote.

Proposition 2.5 (DL_0 et DL_1)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

1. *f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une **limite finie en x_0**. Plus précisément :*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + o(1) \iff \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = a_0.$$

*f est alors **prolongeable par continuité en x_0**. On posera $f(x_0) = a_0$.*

2. *f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est **dérivable en x_0** (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + o(x-x_0) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Remarque 2.6 (DL et dérivabilité d'ordre supérieur)

Si $n \geqslant 2$, pour une fonction f définie sur un voisinage I de x_0, le fait d'être n fois dérivable en x_0 est une **condition suffisante** pour admettre un $DL_n(x_0)$ (donné par la formule de Taylor-Young) mais **non nécessaire**. Autrement dit, l'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geqslant 2$ **ne garantit pas** l'existence de la dérivée n^{e} de f en x_0.

Exemple : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$ mais **n**'est **pas** 2 fois dérivable en 0.

Proposition 2.7 (Diverses propriétés)

1. *Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_p(x_0)$ pour tout $p \leqslant n$ obtenu par « troncature » au degré p du $\mathrm{DL}_n(x_0)$.*

2. *Si une fonction admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors celui-ci est **unique** (i.e. les coefficients a_k sont uniques).*

   Conséquences :

   - *Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et est **n fois dérivable en x_0**, alors la formule de Taylor-Young fournit **le** $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f :*

   $$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

   - *Si f est **paire** et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors sa partie régulière est **paire** (i.e. uniquement avec des exposants pairs).*
   - *Si f est **impaire** et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors sa partie régulière est **impaire** (i.e. uniquement avec des exposants impairs).*

Exemple 2.8

1. Les fonctions cos et ch sont **paires** et admettent des DL de partie régulière **paire**.
2. Les fonctions sin et sh sont **impaires** et admettent des DL de partie régulière **impaire**.

Proposition 2.9 (Addition, multiplication, division)

Soit f et g deux fonctions admettant des $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} P(x-x_0) + o\big((x-x_0)^n\big) \quad et \quad g(x) \underset{x\to x_0}{=} Q(x-x_0) + o\big((x-x_0)^n\big)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n. Alors :

1. *$f+g$ admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$:*

$$(f+g)(x) \underset{x\to x_0}{=} (P+Q)(x-x_0) + o\big((x-x_0)^n\big);$$

2. *$f\times g$ admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$:*

$$(f\times g)(x) \underset{x\to x_0}{=} (P\times Q)_{(n)}(x-x_0) + o\big((x-x_0)^n\big)$$

   où $(P\times Q)_{(n)}$ est le polynôme déduit de $P\times Q$ en ne conservant que les termes de degré au plus n ;

3. *si de plus $g(x_0)\neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \underset{x\to x_0}{=} R(x-x_0) + o\big((x-x_0)^n\big)$$

   *où R est le quotient de la division suivant les puissances **croissantes** de P par Q à l'ordre n.*

Exemple 2.10 (Autour des fonctions cos et ch)

Calculons les $DL_7(0)$ des fonctions $x \mapsto \cos x + \operatorname{ch} x$, $x \mapsto (\cos x)(\operatorname{ch} x)$, $x \mapsto (\cos x - 1)(\operatorname{ch} x - 1)$.

On part des $DL_7(0)$ de $\cos x$ et $\operatorname{ch} x$:

$$\cos x \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o(x^7).$$

- ***Somme :*** $\cos x + \operatorname{ch} x \underset{x \to 0}{=} 2 + \dfrac{1}{12}x^4 + o(x^7)$.
- ***Produit :*** $(\cos x)(\operatorname{ch} x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^7)$.

  Remarque : si on développe complètement le produit des parties régulières, on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2880}x^8 - \frac{1}{518400}x^{12}.$$

  Les termes $\frac{1}{2880}x^8$ et $-\frac{1}{518400}x^{12}$ sont inutiles puisque l'on doit tronquer ce produit à l'ordre 7. De plus, ces termes **ne sont pas significatifs.** Si l'on pousse les DL de cos et ch à l'ordre 12, on trouve en effet $(\cos x)(\operatorname{ch} x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2520}x^8 + \frac{1}{7484400}x^{12} + o(x^{12})$.

- ***Autre produit :*** $(\cos x - 1)(\operatorname{ch} x - 1) \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{1}{4}x^4 + o(x^7)$.

  Remarque : ici, il est suffisant de prendre des DL de cos et ch d'ordre 5 :

$$\cos x - 1 \underset{x \to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Exemple 2.11 (Tangente/cotangente)

Calculons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction tan. On part des $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

- ***Division de $\sin x$ par $\cos x$.***

  Puisque $\cos(0)\neq 0$, tan admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ obtenu par division suivant les puissances **croissantes** de $x-\frac{1}{6}x^3$ par $1-\frac{1}{2}x^2$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{r|l}
x-\frac{1}{6}x^3 & 1-\frac{1}{2}x^2 \\ \cline{2-2}
-(x-\frac{1}{2}x^3) & x+\frac{1}{3}x^3 \\ \cline{1-1}
\frac{1}{3}x^3 & \\
-\frac{1}{3}x^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

  soit $\tan x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3).$

- ***Division de $\cos x$ par $\sin x$.***

  En revanche, $\sin(0)=0$. Pour obtenir un développement de cot, on ne peut pas utiliser directement la règle, mais on peut toutefois effectuer **formellement** une division suivant les puissances **croissantes** de $1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$ par $x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$:

$$\begin{array}{r|l}
1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3) & x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \\ \cline{2-2}
-(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)) & \frac{1}{x}-\frac{1}{3}x+o(x) \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{3}x^2+o(x^2) & \\
-\frac{1}{3}x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1}
o(x^2) &
\end{array}$$

  soit $\cot x \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{3}x+o(x).$

  Il s'agit d'un DL généralisé...

Exemple 2.12 (Asymptote oblique)

Étude en $\pm\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}$.

- ***Équivalent asymptotique :*** on a $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

  La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $\pm\infty$ que l'on va étudier.

- ***Changement de variable :*** $h = \dfrac{1}{x}$ que l'on reporte dans $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1 - 6h + 14h^2}{2h - 4h^2} = \frac{1}{h} \times \frac{\varphi(h)}{\psi(h)} \quad \text{avec} \quad \varphi(h) = 1 - 6h + 14h^2 \text{ et } \psi(h) = 2 - 4h.$$

- ***Division de $\varphi(h)$ par $\psi(h)$.***

  Puisque $\psi(0) \neq 0$, $\dfrac{\varphi(h)}{\psi(h)}$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ obtenu par division suivant les puissances **croissantes** de $1 - 6h + 14h^2$ par $2 - 4h$ à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{r|l} 1 - 6h + 14h^2 & 2 - 4h \\ \cline{2-2} -(1 - 2h) & \frac{1}{2} - 2h + 3h^2 \\ \cline{1-1} -4h + 14h^2 & \\ -(-4h + 8h^2) & \\ \cline{1-1} 6h^2 & \end{array}$$

ce qui fournit $\dfrac{\varphi(h)}{\psi(h)} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2} - 2h + 3h^2 + o(h^2)$

puis $\quad f(x) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2h} - 2 + 3h + o(h)$

soit $\quad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \dfrac{x}{2} - 2 + \dfrac{3}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Il s'agit d'un DL généralisé...

Exemple 2.13 (Asymptote oblique)

Étude en $\pm\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}$.

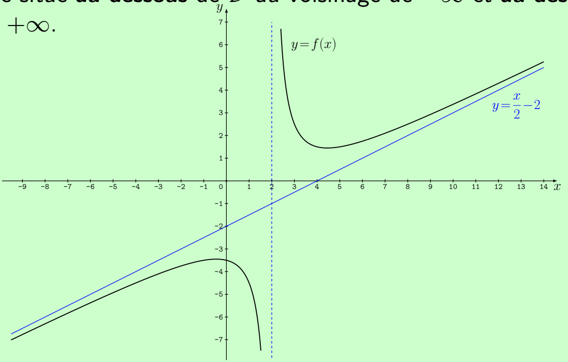
- ***Interprétation géométrique :***

  Le DLG $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \dfrac{x}{2} - 2 + \dfrac{3}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ fournit l'équivalent $f(x) - \left(\dfrac{x}{2} - 2\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{3}{x}$.

  Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} - 2\right)\right] = 0^-$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} - 2\right)\right] = 0^+$.

  Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote** $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{x}{2} - 2$ en $\pm\infty$.

  De plus $\mathcal{C}_f$ se situe **au-dessous** de $\mathcal{D}$ au voisinage de $-\infty$ et **au-dessus** de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$.



Proposition 2.14 (Composition)

*Soit f une fonction définie **sur un voisinage de x_0** admettant un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de la forme*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x - x_0) + o\big((x - x_0)^n\big)$$

*et g une fonction définie **sur un voisinage de $y_0 = f(x_0)$** admettant un $\mathrm{DL}_n(y_0)$ de la forme*

$$g(y) \underset{y \to y_0}{=} Q(y - y_0) + o\big((y - y_0)^n\big)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n. Alors $g \circ f$ admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$:

$$(g \circ f)(x) \underset{x \to x_0}{=} (Q \circ P_1)_{(n)}(x - x_0) + o\big((x - x_0)^n\big)$$

où $P_1 = P - y_0$ est le polynôme P privé de son terme constant et $(Q \circ P_1)_{(n)}$ est le polynôme déduit de $Q \circ P_1$ en ne conservant que les termes de degré au plus n.

***Formulation simplifiée :** si f et g sont des fonctions définies **sur un voisinage de 0** telles que $\boldsymbol{f(0) = 0}$ admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme*

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y \to 0}{=} Q(y) + o(y^n)$$

alors $g \circ f$ admet pour $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$(g \circ f)(x) \underset{x \to 0}{=} (Q \circ P)_{(n)}(x) + o(x^n).$$

Exemple 2.15 (Composée d'exponentielle et de racine carrée)

Déterminons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{e^{4x}+1}$. On part des $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{6}u^3+o\left(u^3\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+v} \underset{v\to 0}{=} 1+\tfrac{1}{2}v-\tfrac{1}{8}v^2+\tfrac{1}{16}v^3+o\left(v^3\right).$$

On a $e^{4x}+1 \underset{x\to 0}{=} 2+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 2\left(1+2x+4x^2+\frac{16}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)$ que l'on reporte dans $\varphi(x)$ (prendre garde au facteur 2 du DL ci-dessus) :

$$\begin{aligned}
\varphi(x)/\sqrt{2} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+\left[2x+4x^2+\tfrac{16}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\tfrac{1}{2}\left[2x+4x^2+\tfrac{16}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\tfrac{1}{8}\left[2x+4x^2+\tfrac{16}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]^2 \\
&\qquad +\tfrac{1}{16}\left[2x+4x^2+\tfrac{16}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]^3+o\left[2x+4x^2+\tfrac{16}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]^3 \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+2x^2+\tfrac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)-\tfrac{1}{8}\left[(2x)\left(1+2x+\tfrac{8}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]^2 \\
&\qquad +\tfrac{1}{16}\left[(2x)\left(1+2x+\tfrac{8}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]^3+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+2x^2+\tfrac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)-\tfrac{1}{2}x^2[1+4x+o(x)]+\tfrac{1}{2}x^3[1+o(1)]+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{7}{6}x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Remarque : en pratique, on pourra omettre dans les calculs tous les «o» excepté le dernier $o(x^3)$.

La fonction φ admet ainsi le $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}+\sqrt{2}\,x+\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3+o\left(x^3\right).$$

Exemple 2.16 (Composée d'exponentielle et de racine carrée)

Déterminons un développement de la fonction $\psi : x \mapsto \sqrt{e^{4x}-1}$. On part des DL en 0 :

$$e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4+o\left(u^4\right) \text{ et } \sqrt{1+v} \underset{v\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}v-\frac{1}{8}v^2+\frac{1}{16}v^3+o\left(v^3\right).$$

On a $e^{4x}-1 \underset{x\to 0}{=} 4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+\frac{32}{3}x^4+o(x^4) \underset{x\to 0}{=} 4x\left(1+2x+\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right)$
que l'on reporte dans $\psi(x)$ (prendre garde au facteur $4x$ du DL ci-dessus) :

$$\begin{aligned}
\psi(x)/(2\sqrt{x}) &\underset{x\to 0^+}{=} \sqrt{1+\left[2x+\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]} \\
&\underset{x\to 0^+}{=} 1+\frac{1}{2}\left[2x+\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\frac{1}{8}\left[2x+\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]^2 \\
&\quad +\frac{1}{16}\left[2x+\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]^3+o\left[2x+\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]^3 \\
&\underset{x\to 0^+}{=} 1+x+\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)-\frac{1}{8}\left[(2x)\left(1+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]^2 \\
&\quad +\frac{1}{16}\left[(2x)\left(1+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]^3+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0^+}{=} 1+x+\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)-\frac{1}{2}x^2\left[1+\frac{8}{3}x+o(x)\right]+\frac{1}{2}x^3\left[1+o(1)\right]+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0^+}{=} 1+x+\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

La fonction ψ admet ainsi le DL **généralisé** (ou **développement asymptotique**) :

$$\psi(x) \underset{x\to 0^+}{=} 2\sqrt{x}+2x^{3/2}+\frac{5}{3}x^{5/2}+x^{7/2}+o\left(x^{7/2}\right).$$

Exemple 2.17 (Composée d'exponentielle et de cosinus/sinus)

Considérons les trois fonctions

$$\varphi_1 : x \mapsto e^{\cos(2x)} + e^{1+\sin(x)}, \quad \varphi_2 : x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\frac{1}{2}\sin(2x)}, \quad \varphi_3 : x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\sin(x)}.$$

Déterminons leur $DL_4(0)$. Partant des $DL_4(0)$ usuels

$$\cos u \underset{u\to 0}{=} 1 - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{24}u^4 + o\big(u^4\big), \qquad \sin u \underset{u\to 0}{=} u - \tfrac{1}{6}u^3 + o\big(u^4\big),$$

$$e^v \underset{u\to 0}{=} 1 + v + \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{24}v^4 + o\big(v^4\big),$$

on trouve (prendre garde au terme constant 1 dans les DL ci-dessus et dans $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) :

$$\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} e - \tfrac{e}{2}x^2 + \tfrac{e}{6}x^4 + o\big(x^4\big)\\
e^{\cos(2x)} &\underset{x\to 0}{=} e - 2ex^2 + \tfrac{8e}{3}x^4 + o\big(x^4\big)\\
e^{1+\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} e + ex + \tfrac{e}{2}x^2 - \tfrac{e}{8}x^4 + o\big(x^4\big)\\
e^{1+\frac{1}{2}\sin(2x)} &\underset{x\to 0}{=} e + ex + \tfrac{e}{2}x^2 - \tfrac{e}{2}x^3 - \tfrac{5e}{8}x^4 + o\big(x^4\big)
\end{aligned}$$

que l'on reporte dans $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &\underset{x\to 0}{=} 2e + ex - \tfrac{3e}{2}x^2 + \tfrac{61e}{24}x^4 + o\big(x^4\big),\\
\varphi_2(x) &\underset{x\to 0}{=} 2e + ex - \tfrac{e}{2}x^3 - \tfrac{11e}{24}x^4 + o\big(x^4\big),\\
\varphi_3(x) &\underset{x\to 0}{=} 2e + ex + \tfrac{e}{24}x^4 + o\big(x^4\big).
\end{aligned}$$

Exemple 2.17 (Composée d'exponentielle et de cosinus/sinus)

Considérons les trois fonctions

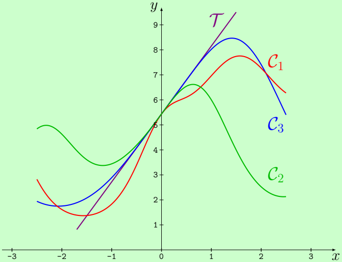
$$\varphi_1 : x \mapsto e^{\cos(2x)} + e^{1+\sin(x)}, \quad \varphi_2 : x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\frac{1}{2}\sin(2x)}, \quad \varphi_3 : x \mapsto e^{\cos(x)} + e^{1+\sin(x)}.$$

Application géométrique :

Les DL tronqués

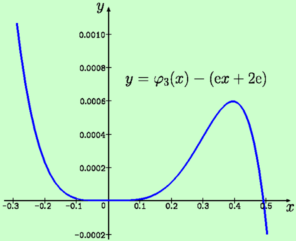
$$\varphi_1(x) \underset{x\to 0}{=} 2e + ex - \frac{3e}{2}x^2 + o(x^2),$$
$$\varphi_2(x) \underset{x\to 0}{=} 2e + ex - \frac{e}{2}x^3 + o(x^3),$$
$$\varphi_3(x) \underset{x\to 0}{=} 2e + ex + \frac{e}{24}x^4 + o(x^4).$$

nous informent que les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2$ de φ_1, φ_2, φ_3 admettent en 0 la même tangente $\mathcal{T}$ d'équation $y = ex + 2e$.



De plus, au voisinage de 0 :

- $\varphi_1(x) - (ex + 2e) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{3e}{2}x^2$ donc $\mathcal{C}_1$ est **au-dessous** de $\mathcal{T}$;
- $\varphi_2(x) - (ex + 2e) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{e}{2}x^3$ donc $\mathcal{C}_2$ **traverse** $\mathcal{T}$;
- $\varphi_3(x) - (ex + 2e) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e}{24}x^4$ donc $\mathcal{C}_3$ est **au-dessus** de $\mathcal{T}$ (cf. zoom).



Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Posons $\varphi(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

---

❶ ***Numérateur de f*** : on part des $\mathrm{DL}_7(0)$

$$\sin x \underset{x \to 0}{=} x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7 + o\left(x^7\right) \text{ et } \operatorname{sh} v \underset{v \to 0}{=} v + \tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{120}v^5 + \tfrac{1}{5040}v^7 + o\left(v^7\right).$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\sin x) &\underset{x \to 0}{=} \left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7\right] + \tfrac{1}{6}\left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7\right]^3 \\
&\qquad + \tfrac{1}{120}\left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7\right]^5 + \tfrac{1}{5040}\left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7\right]^7 + o\left(x^7\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7\right] + \tfrac{1}{6}\left[x\left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4\right)\right]^3 \\
&\qquad + \tfrac{1}{120}\left[x\left(1 - \tfrac{1}{6}x^2\right)\right]^5 + \tfrac{1}{5040}[x]^7 + o\left(x^7\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7\right] + \tfrac{1}{6}x^3\left[1 + 3\left(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4\right) + 3\left(\tfrac{1}{36}x^4\right)\right] \\
&\qquad + \tfrac{1}{120}x^5\left[1 - \tfrac{5}{6}x^2\right] + \tfrac{1}{5040}x^7 + o\left(x^7\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} x - \tfrac{1}{15}x^5 + \tfrac{1}{90}x^7 + o\left(x^7\right).
\end{aligned}$$

De même :

$$\sin(\operatorname{sh} x) \underset{x \to 0}{=} x - \tfrac{1}{15}x^5 - \tfrac{1}{90}x^7 + o\left(x^7\right).$$

La fonction φ admet ainsi le $\mathrm{DL}_7(0)$: $\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \tfrac{1}{45}x^7 + o\left(x^7\right) \underset{x \to 0}{\sim} \tfrac{1}{45}x^7$.

Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

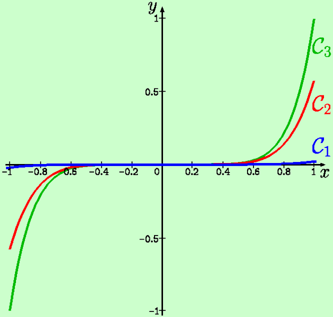
Posons $\varphi(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

---

❷ ***Dénominateur de f :*** on part du $\mathrm{DL}_3(0)$ $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$.

$$\begin{aligned}\sin^5 x &\underset{x\to 0}{=} \left[x - \tfrac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right]^5 \underset{x\to 0}{=} \left[x\left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + o\left(x^2\right)\right)\right]^5 \\ &\underset{x\to 0}{=} x^5\left[1 - \tfrac{5}{6}x^2 + o\left(x^2\right)\right] \underset{x\to 0}{=} x^5 - \tfrac{5}{6}x^7 + o\left(x^7\right).\end{aligned}$$

La fonction ψ admet ainsi le $\mathrm{DL}_7(0)$: $\psi(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{5}{6}x^7 + o\left(x^7\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{5}{6}x^7$.



— courbe de φ
— courbe de ψ
— courbe de $x \mapsto x^7$

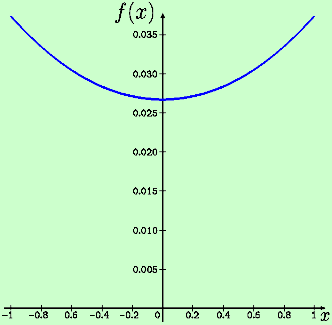
Exemple 2.18 (Composée de sinus et sinus hyperbolique)

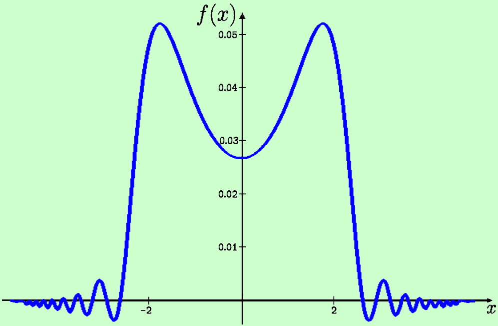
Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)}{x^5 - \sin^5 x}$. Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Posons $\varphi(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ et $\psi(x) = x^5 - \sin^5 x$.

❸ ***Limite de f :*** On obtient finalement

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{45}x^7}{\frac{5}{6}x^7} = \frac{2}{75} \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{75}.$$





Proposition 2.19 (Dérivation/intégration)

Soit f une fonction définie ***continue en x_0*** *et* ***dérivable au voisinage de x_0****.*
Si f' admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors f est de classe $\boldsymbol{\mathcal{C}^1}$ *en* $\boldsymbol{x_0}$ *et admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(x_0)$.*
Plus précisément, si le $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f' est de la forme

$$f'(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big)$$

alors le $\mathrm{DL}_{n+1}(x_0)$ de f est donné par

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + o\big((x-x_0)^{n+1}\big).$$

Exemple 2.20 (Arctangente)

Appliquons la règle précédente à la fonction $f = \arctan$ en 0.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. De plus f' admet le $\mathrm{DL}_n(0)$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Donc f admet le $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu par intégration (avec $f(0) = 0$) :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Remarque 2.21 (Contre-exemple)

Soit $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ alors que f' n'admet pas de $\mathrm{DL}_1(0)$.

Notions à retenir

- Formule de Taylor-Young (énoncé)
- Développements limités
  - ⋆ Connaître les DL usuels
  - ⋆ Calculs de DL par opérations diverses
  - ⋆ Utilisation pour les calculs de limites
  - ⋆ Détermination de la position locale courbe/tangente
  - ⋆ Étude de l'allure locale d'une courbe
  - ⋆ Détermination de branches infinies, d'asymptotes