INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Problème

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution des **équations différentielles linéaires du premier ordre** d'inconnue u qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$(\mathrm{E}) : \quad \forall\, t \in I, \quad u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

où a et b désignent des **fonctions continues** sur un intervalle I donné à valeurs réelles.

1. En fait, il s'agira de résoudre des équations un peu plus générales, de la forme $\alpha(t)u'(t) + \beta(t)u(t) = \gamma(t)$, mais pour le faire on se ramènera toujours à une équation de type (E) quitte à diviser par $\alpha(t)$ sur un intervalle où $\alpha(t)$ ne s'annule pas.
2. **Résoudre** l'équation (E), c'est trouver **toutes** les fonctions $u : I \to \mathbb{R}$ **dérivables** et vérifiant (E). Une telle fonction est alors appelée **une solution** de (E) sur I.
3. Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation est **sans second membre** et l'équation $u'(t) + a(t)u(t) = 0$ est appelée **équation homogène associée à (E).**

Proposition 1 (Solutions de l'équation homogène)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction ***continue*** *sur I.*
Les solutions sur I de l'équation $u'(t) + a(t)u(t) = 0$ sont les fonctions de la forme

$$u_H : t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où A est une ***primitive*** *de a sur I.*

Proposition 2 (Solution particulière par « variation de la constante »)

Soient a et b deux fonctions ***continues*** *sur un intervalle I à valeurs réelles.*
Une solution ***particulière*** *de l'équation $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$ sur I est la fonction*

$$u_P : t \longmapsto C(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$$

où A est une ***primitive*** *de a sur I et C est une* ***primitive*** *sur I de la fonction $t \mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.*

Proposition 3 (Solution générale)

Les solutions sur I de l'équation $(\mathrm{E}) : u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$ sont les fonctions $u : I \to \mathbb{R}$ de la forme $u = u_H + u_P$ où u_H est une solution quelconque de l'équation homogène associée à (E) et u_P est une solution particulière de (E).

Plus précisément, en notant A une primitive de a et C une primitive de $b\mathrm{e}^A$ sur I :

$$\forall\, t \in I, \quad u(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + C(t)\mathrm{e}^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le principe de superposition vu dans le cas des équations différentielles **linéaires** à coefficients constants reste valable :

Proposition 4 (Principe de superposition)

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et a, b_1, b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles.

- *soit u_1 une solution sur I de l'équation $u' + au = b_1$;*
- *soit u_2 une solution sur I de l'équation $u' + au = b_2$;*

alors $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est une solution sur I de l'équation $u' + au = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$.

De même pour le problème de Cauchy :

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ fixés.
Il existe une ***unique solution*** *sur I pour l'équation différentielle avec condition initiale (problème de Cauchy) :*

$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

De plus cette solution est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Elle est explicitement donnée par

$$\forall\, t \in I, \quad u(t) = u_0 \mathrm{e}^{-A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{A(s)}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-A(t)}.$$

Protocole de résolution

En résumé, voici le protocole de résolution d'une équation de la forme :

$$(\mathrm{E}) : \alpha(t)u'(t) + \beta(t)u(t) = \gamma(t)$$

où α, β, γ sont des fonctions sur $\mathbb{R}$.

1. On fait le choix d'un **intervalle** I sur lequel la fonction α **ne s'annule pas** de sorte que (E) soit équivalente à une équation $(\tilde{\mathrm{E}})$ de la forme $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$ où a et b sont des fonctions **continues** sur I.
On dit que $(\tilde{\mathrm{E}})$ est la forme **normalisée** de l'équation (E).
2. On écrit les solutions de l'équation homogène associée à $(\tilde{\mathrm{E}})$ (pour cela, il faut pouvoir calculer une primitive de la fonction a sur I).
3. On détermine une solution particulière sur I de $(\tilde{\mathrm{E}})$, par exemple par la méthode de variation de la constante.
4. La solution particulière ajoutée à n'importe quelle solution de l'équation homogène permet d'obtenir toutes les solutions de $(\tilde{\mathrm{E}})$ sur I et donc de (E).

Exemple 6

Considérons l'équation différentielle

$$tu'(t) + u(t) = t\mathrm{e}^t. \qquad (\mathrm{E})$$

1. On **normalise** l'équation selon
$$u'(t) + \frac{1}{t}u(t) = \mathrm{e}^t. \qquad (\tilde{\mathrm{E}})$$
On résout $(\tilde{\mathrm{E}})$ sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$, soit encore sur $\mathbb{R}^*$.
2. Une primitive de la fonction $a : t \mapsto \frac{1}{t}$ est donnée par $A : t \mapsto \ln|t|$, donc l'**équation homogène associée** $u_H'(t) + \frac{1}{t}u_H(t) = 0$ admet pour solution générale sur $\mathbb{R}^*$:
$$u_H(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{t} & \text{si } t \in I_1 \\ \dfrac{\lambda_2}{t} & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Une **solution particulière** de (E) est de la forme $u_P = \frac{C(t)}{t}$ où C est une fonction vérifiant $C'(t) = t\mathrm{e}^t$, ce qui donne $C(t) = (t-1)\mathrm{e}^t$. D'où
$$u_P(t) = \frac{(t-1)\mathrm{e}^t}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$
4. La **solution générale** de (E) sur $\mathbb{R}^*$ s'écrit finalement :
$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)\mathrm{e}^t + \lambda_1}{t} & \text{si } t \in I_1 \\ \dfrac{(t-1)\mathrm{e}^t + \lambda_2}{t} & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 6

Considérons l'équation différentielle

$$tu'(t) + u(t) = t\mathrm{e}^t. \qquad (\mathrm{E})$$

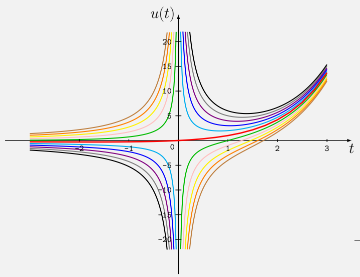
5. Cherchons s'il existe une (ou plusieurs) solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ **tout entier.**
   - Une telle solution est nécessairement de la forme, sur $\mathbb{R}^*$:
   $$u(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)\mathrm{e}^t + \lambda_1}{t} & \text{si } t \in I_1 \\ \dfrac{(t-1)\mathrm{e}^t + \lambda_2}{t} & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
   - La fonction u doit être **dérivable en 0** et vérifier (E) en 0. Elle doit donc être au moins **continue en 0**, i.e. les limites $\ell_1 = \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{1}{t}\big((t-1)\mathrm{e}^t + \lambda_1\big)$ et $\ell_2 = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\big((t-1)\mathrm{e}^t + \lambda_2\big)$ doivent exister et coïncider, ce qui impose que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, auquel cas $\ell_1 = \ell_2 = 0$.
   D'où la fonction candidate :
   $$u(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)\mathrm{e}^t + 1}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$
   - À l'aide du DL $(t-1)\mathrm{e}^t + 1 \underset{t \to 0}{=} \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, on trouve $\lim\limits_{t \to 0} \frac{u(t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(t-1)\mathrm{e}^t + 1}{t^2} = \frac{1}{2}$ ce qui montre que u est **dérivable en 0** et que $u'(0) = \frac{1}{2}$.
   - Enfin (E) est clairement **vérifiée** pour $t = 0$. La fonction u ci-dessus est l'**unique** solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6

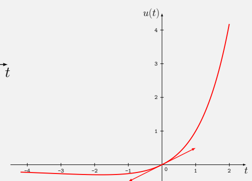
Considérons l'équation différentielle

$$tu'(t) + u(t) = t\mathrm{e}^t. \qquad (\mathrm{E})$$

6. « Flot » de l'équation



Quelques courbes pour $\lambda \in \{-4, -3, \dots, 6\}$



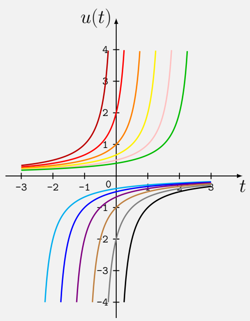
Courbe solution sur $\mathbb{R}$

Exemple 7 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = u(t)^2. \qquad (\mathrm{E})$$

- Notons tout d'abord que la fonction nulle est une solution de (E).
- En se plaçant à présent sur un intervalle sur lequel u ne s'annule pas, (E) s'écrit
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right)(t) = -1$$
donc $\dfrac{1}{u(t)} = -t + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, puis
$$u(t) = \frac{1}{\lambda - t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Les intervalles de définition de u sont $]-\infty, \lambda[$ et $]\lambda, +\infty[$.
Remarques. Notons que ces intervalles dépendent de λ contrairement au cas linéaire.
De plus la fonction nulle ne fait pas partie de la famille de solutions précédente, on dit que c'est une solution **singulière**.



Quelques courbes pour $\lambda \in \{-\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, \dots, 2, \frac{5}{2}\}$

Exemple 8 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

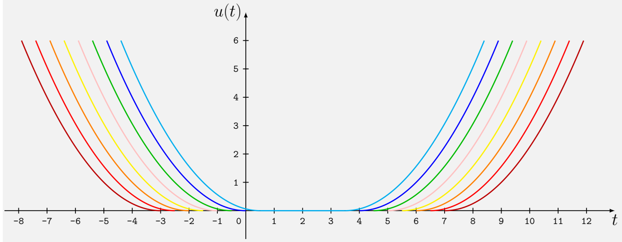
$$u'(t) = \sqrt{u(t)}. \qquad (\mathrm{E}')$$

- Notons tout d'abord que la fonction nulle est une solution de (E′).
- Plaçons-nous à présent sur un intervalle I sur lequel u ne s'annule pas.
  Une solution de (E′) sur I est nécessairement strictement positive.
  (E′) s'écrit
  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{u})(t) = \frac{1}{2}$$
  donc $\sqrt{u(t)} = \frac{1}{2}(t-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, puis
  $$u(t) = \frac{1}{4}(t-\lambda)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
  Les intervalles de non-annulation de u sont $]-\infty, \lambda[$ et $]\lambda, +\infty[$.

Exemple 8 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}. \qquad (\mathrm{E}')$$



Quelques courbes pour $\lambda \in \{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, \dots, 0, \frac{1}{2}\}$
et $\lambda \in \{\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots, \frac{13}{2}, 7\}$

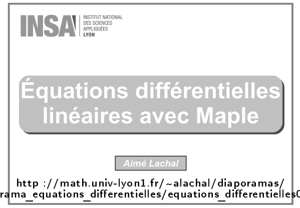
Exemple 8 (Équations non linéaires (facultatif))

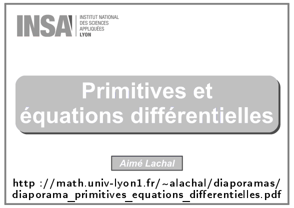
Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}. \qquad (\mathrm{E}')$$

Remarques.

- Notons que ces intervalles dépendent de λ contrairement au cas linéaire.
- De plus la fonction nulle ne fait pas partie de la famille de solutions précédente, on dit que c'est une solution **singulière**.
- Enfin, les solutions de (E′) définies sur $\mathbb{R}$ s'écrivent
  $$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-\lambda)^2 & \text{si } t \in]-\infty, \lambda[\\ 0 & \text{si } t \in]\lambda, \mu[\\ \frac{1}{4}(t-\mu)^2 & \text{si } t \in]\mu, +\infty[\end{cases}$$
  Pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il y a une infinité de solutions telles que $u(t_0) = 0$.
  Le problème de Cauchy correspondant admet donc un infinité de solutions contrairement au cas linéaire.





Notions à retenir

- Techniques de résolution
  - Équation homogène associée
  - Recherche de solutions particulières à l'aide de la méthode de la variation de la constante
  - Principes de superposition
  - Résolution de problème de Cauchy
  - Raccord de solutions pour des équations définies sur des intervalles contigus