INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Systèmes linéaires

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

Sommaire

Exemple 1.1

Fixons un réel a. Considérons le système de trois équations à deux inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + y = 1 & E_1 \\ 2x - y = 2 & E_2 \\ 3x + 2y = a & E_3 \end{cases}$$

Résolution. On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl|l} -x + & y = 1 & E_1 \\ & y = 4 & E_2' = E_2 + 2E_1 \\ & 5y = a + 3 & E_3' = E_3 + 3E_1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl|l} -x + y & = 1 & E_1 \\ y & = 4 & E_2' \\ 0 & = a - 17 & E_3'' = E_3' - 5E_2' \end{array} \right.$$

On obtient un système composé d'un sous-système **triangulaire** de deux équations à deux inconnues (S'') : $\begin{cases} -x + y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ et d'une équation de **« compatibilité »** sans inconnue : $a - 17 = 0$.

Cette dernière indique si le système (S) admet des solutions ou non :

- si $a \neq 17$, il n'y a pas de solution, on dit que le système (S) est **incompatible** ;
- si $a = 17$, l'équation de compatibilité s'écrit $0 = 0$ et devient redondante. Les systèmes (S) et (S'') sont alors équivalents.
  Le sous-système (S'') étant **triangulaire**, il est facile de le résoudre en partant de l'équation du bas puis en « remontant » les équations : E_2' donne $y = 4$, puis en reportant dans E_1, on récupère $x = y - 1 = 3$.
  Le système (S) admet une **unique** solution dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) = (3, 4)$.

Exemple 1.1

Fixons un réel a. Considérons le système de trois équations à deux inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + \ \ y = 1 & E_1 \\ 2x - \ \ y = 2 & E_2 \\ 3x + 2y = a & E_3 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

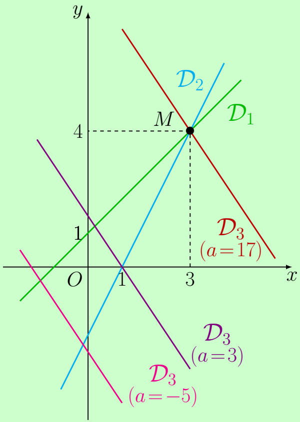
Chaque équation du système (S) représente une droite dans un plan rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Notons

- $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $-x + y = 1$
- $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $2x - y = 2$
- $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $3x + 2y = a$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces trois droites.

La résolution précédente fournit donc :

- si $a \neq 17$, les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ n'admettent pas de point d'intersection : $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \varnothing$;
- si $a = 17$, les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ admettent un point d'intersection, le point $M(3, 4)$, elles sont **concourantes** : $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{M\}$.



Exemple 1.2

Considérons le système de deux équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + y + z = 1 & E_1 \\ 2x - y + 3z = 2 & E_2 \end{cases}$$

Résolution

On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl|l} -x + y + z & = & 1 & E_1 \\ y + 5z & = & 4 & E_2' = E_2 + 2E_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl|l} -x + y & = & 1 - z & E_1 \\ y & = & 4 - 5z & E_2' \end{array} \right.$$

On obtient un système **triangulaire** (S') équivalent à (S) composé de deux équations à deux inconnues dites **« principales »** (x, y) et une inconnue dite **« auxiliaire »** (z).

Le sous-système (S') étant **triangulaire**, il est facile de le résoudre en partant de l'équation du bas puis en « remontant » les équations :

- E_2' donne $y = 4 - 5z$,
- puis en reportant dans E_1, on récupère $x = y + z - 1 = 3 - 4z$.

Le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) = (3 - 4z, 4 - 5z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2

Considérons le système de deux équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + y + z = 1 & E_1 \\ 2x - y + 3z = 2 & E_2 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

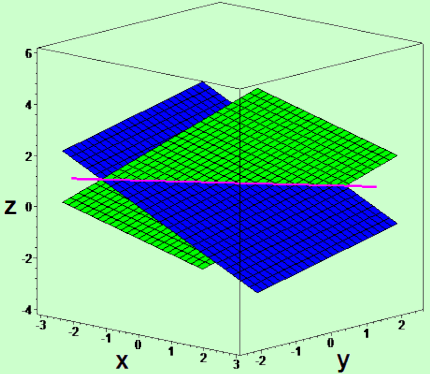
Chaque équation du système (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Notons

- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $-x + y + z = 1$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x - y + 3z = 2$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces deux plans.

La résolution précédente montre que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ admettent une infinité de points d'intersection, les points $M(3 - 4z, 4 - 5z, z)$, $z \in \mathbb{R}$, il s'agit en fait d'une droite $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}.$$



Exemple 1.3

Fixons un réel a. Considérons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + y + z = 1 & E_1 \\ 2x - y + 3z = 2 & E_2 \\ -x + 2y + 6z = a & E_3 \end{cases}$$

Résolution. On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl|l} -x + y + z &= 1 & E_1 \\ y + 5z &= 4 & E_2' = E_2 + 2E_1 \\ y + 5z &= a - 1 & E_3' = E_2 - E_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl|l} -x + y + z &= 1 & E_1 \\ y + 5z &= 4 & E_2' \\ 0 &= a - 5 & E_3'' = E_3' - E_2' \end{array}\right.$$

On obtient un système composé d'un sous-système **triangulaire** de deux équations à deux inconnues **principales** (x, y) et une **auxiliaire** (z) $(S'') : \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y + 5z = 4 \end{cases}$
et d'une équation de **compatibilité** sans inconnue $a - 5 = 0$.

Cette dernière indique si le système (S) admet des solutions ou non :

- si $a \neq 5$, il n'y a pas de solution, le système (S) est **incompatible** ;
- si $a = 5$, l'équation de compatibilité s'écrit $0 = 0$ et devient redondante. Les systèmes (S) et (S'') sont alors équivalents.
  Le sous-système (S'') a été résolu dans l'exemple précédent.
  Ainsi, le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^3$:
  $$(x, y, z) = (3 - 4z, 4 - 5z, z), z \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3

Fixons un réel a. Considérons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + y + z = 1 & E_1 \\ 2x - y + 3z = 2 & E_2 \\ -x + 2y + 6z = a & E_3 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

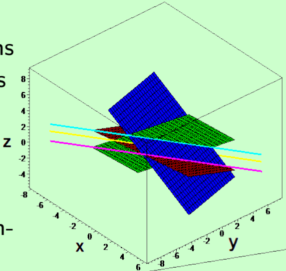
Chaque équation de (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Notons

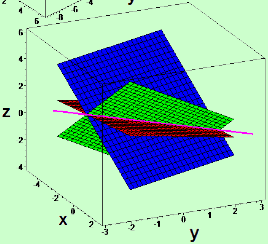
- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $-x + y + z = 1$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x - y + 3z = 2$
- $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $-x + 2y + 6z = a$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces trois plans.

La résolution précédente fournit donc :

- si $a \neq 5$, les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ n'admettent pas de point d'intersection :
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing;$$
- si $a = 5$, les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ admettent comme intersection une droite $\mathcal{D}$:
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{D}.$$





Exemple 1.4

Considérons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S): \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Résolution

On essaie de faire « disparaître » progressivement les inconnues à l'aide de **combinaisons linéaires** sur les équations :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 5z & = & 4 \\ & & y & + & 4z & = & 3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2' = E_2 + 2E_1 \\ E_3' = E_2 - E_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 5z & = & 4 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2' \\ E_3'' = E_3' - E_2' \end{array}\right.$$

On obtient un système **triangulaire** qui se résout en partant de l'équation du bas puis en remontant les équations :

- E_3'' donne $z = 1$,
- que l'on reporte dans E_2' qui donne $y = 4 - 5z = -1$,
- que l'on reporte dans E_1 qui donne $x = y + z - 1 = -1$.

Le système (S) admet une **unique** solution dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

Exemple 1.4

Considérons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} -x + y + z = 1 & E_1 \\ 2x - y + 3z = 2 & E_2 \\ -x + 2y + 5z = 4 & E_3 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

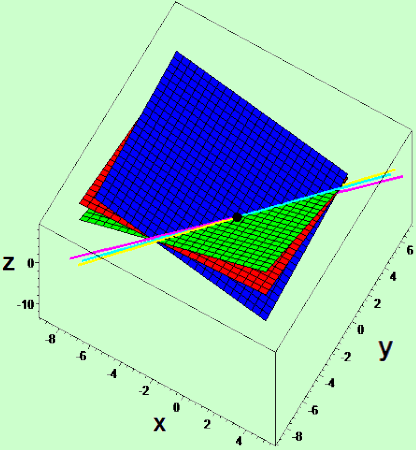
Chaque équation du système (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Notons

- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $-x + y + z = 1$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x - y + 3z = 2$
- $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $-x + 2y + 5z = 4$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection de ces trois plans.

La résolution précédente montre que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ admettent un point d'intersection, le point $M(-1, -1, 1)$, ils sont **concourants** :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{M\}.$$



Sommaire

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 (Système linéaire)

*Un **système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$** est un système d'équations de la forme :*

$$(S) : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

*où les a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$, et les b_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des éléments fixés de $\mathbb{K}$ qui forment respectivement **les coefficients** et le **second membre** du système.*

Représentation matricielle (facultatif, voir chapitre « Matrices »)

❶ Introduisons les **tableaux** de nombres suivants :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Le tableau « rectangulaire » A est une **matrice à n lignes et p colonnes**, à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- la « colonne » X est une **matrice-colonne** à p lignes ;
- la « colonne » B est une **matrice-colonne** à n lignes.

❷ Définissons formellement le **« produit matriciel »** de A par X selon

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système (S) est équivalent à **résoudre l'équation matricielle $AX = B$** d'inconnue X, les matrices A et B étant **fixées.**

Définition 2.2

- *On appelle **solution** du système* (S) *tout p-uplet* $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ *qui satisfait aux équations du système.*
- *Lorsque* $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$, *le système* (S) *est dit **homogène**.*
- *Deux systèmes* (S) *et* (S') *sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.*

Proposition 2.3 (Opérations équivalentes)

On obtient un système (S') ***équivalent*** *au système* (S) *si on applique à ce dernier l'une des opérations suivantes :*

- ***échange** de deux lignes (on note* $L_i \longleftrightarrow L_j$*) ;*
- ***multiplication** d'une ligne par un coefficient **non nul*** α *(on note* $L_i \longleftarrow \alpha L_i$*) ;*
- ***ajout** à une ligne d'un multiple d'une autre (on note* $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$*),*
  *et plus généralement **ajout** à une ligne d'une **combinaison linéaire** des autres (on note* $L_i \longleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \beta_j L_j$*).*

Description d'une méthode de résolution

On va décrire la **méthode du pivot de Gauss** pour résoudre un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3p}x_p = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

1. **Choix du pivot :**
   - Si **tous** les coefficients a_{ij} sont **nuls**, et si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, tous les p-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ sont solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{K}^p$.
   - Si **tous** les coefficients a_{ij} sont **nuls**, et si **l'un au moins** des b_i est **non nul**, alors le système n'admet pas de solution : $\mathscr{S} = \varnothing$.
   - Si l'**un** des coefficients a_{ij} est **non nul**, on peut le choisir comme **pivot**. Quitte à échanger lignes et/ou colonnes, on peut supposer par exemple $a_{11} \neq 0$.

2. On utilise a_{11} comme **pivot** pour « éliminer » x_1 des lignes L_2 à L_n, à l'aide des opérations $L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$.
On obtient alors un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcccrcl} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& a_{13}x_3 &+& \cdots &+& a_{1p}x_p &=& b_1 \\ && a'_{22}x_2 &+& a'_{23}x_3 &+& \cdots &+& a'_{2p}x_p &=& b'_2 \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ && a'_{32}x_2 &+& a'_{33}x_3 &+& \cdots &+& a'_{3p}x_p &=& b'_3 \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \\ &&&&&&&&& \vdots & \qquad \vdots \\ && a'_{n2}x_2 &+& a'_{n3}x_3 &+& \cdots &+& a'_{np}x_p &=& b'_n \qquad L_n \longleftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{array}\right.$$

3. On recommence la même démarche sur les lignes L_2 à L_n (en supposant $a'_{22} \neq 0$) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcccrcl} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& a_{13}x_3 &+& \cdots &+& a_{1p}x_p &=& b_1 \\ && a'_{22}x_2 &+& a'_{23}x_3 &+& \cdots &+& a'_{2p}x_p &=& b'_2 \\ &&&& a''_{33}x_3 &+& \cdots &+& a''_{3p}x_p &=& b''_3 \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L_2 \\ &&&&&&&&& \vdots & \qquad \vdots \\ &&&& a''_{n3}x_3 &+& \cdots &+& a''_{np}x_p &=& b''_n \qquad L_n \longleftarrow L_n - \frac{a'_{n2}}{a'_{22}} L_2 \end{array}\right.$$

4. On recommence ce procédé jusqu'à l'obtention d'un système **échelonné** :

Proposition 3.1 (Triangularisation)

Tout système linéaire à n équations et p inconnues est équivalent à un système de la forme suivante pour un certain entier $r \leqslant \min(n,p)$ *:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1r}y_r + \cdots + b_{1p}y_p & = & c_1 \\ b_{22}y_2 + \cdots + b_{2r}y_r + \cdots + b_{2p}y_p & = & c_2 \\ \ddots \qquad\qquad\qquad & & \vdots \\ b_{rr}y_r + \cdots + b_{rp}y_p & = & c_r \\ \hline 0 & = & c_{r+1} \\ & & \vdots \\ 0 & = & c_n \end{array}\right.$$

où les inconnues $y_1, \ldots, y_p$ *sont les mêmes que* $x_1, \ldots, x_p$ *mais éventuellement dans un ordre différent, et où les* $b_{11}, \ldots, b_{rr}$ *sont tous* ***non nuls****.*

Lorsque $r < n$*, les équations* $0 = c_{r+1}, \ldots, 0 = c_n$ *sont des équations de* ***compatibilité****.*

Théorème-définition 3.2 (Rang du système)

Le nombre r de coefficients diagonaux b_{ii} *non nuls est* ***indépendant*** *des opérations effectuées pour arriver à cette forme du système, et s'appelle le* ***rang*** *du système.*

❺ **Analyse de la compatibilité du système :**

- Si $n > r$ et si **l'un au moins** des c_i, $r+1 \leqslant i \leqslant n$ est **non nul**, le système est **incompatible**, et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.
- Si $n > r$ et si **tous** les coefficients c_i, $r+1 \leqslant i \leqslant n$ sont **nuls**, ou si $n = r$, le système est **compatible**, et admet au moins une solution.
  - ∗ Les r premières équations constituent un **sous-système principal**,
  - ∗ les r inconnues $y_j, 1 \leqslant j \leqslant r$, sont appelées **inconnues principales** du système,
  - ∗ et, lorsque $p > r$, les $p - r$ inconnues y_j, $r+1 \leqslant j \leqslant p$, **inconnues auxiliaires**.

❻ **« Remontée » du système principal** :

On résout alors le système **principal** « en partant du bas », et les inconnues **principales** $y_1, \ldots, y_r$ s'expriment en fonction des inconnues **auxiliaires** $y_{r+1}, \ldots, y_p$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1r}y_r & = & c_1 - b_{1r+1}y_{r+1} - \cdots - b_{1p}y_p \\ b_{22}y_2 + \cdots + b_{2r}y_r & = & c_2 - b_{2r+1}y_{r+1} - \cdots - b_{2p}y_p \\ \ddots \qquad & \vdots & \\ b_{rr}y_r & = & c_r - b_{rr+1}y_{r+1} - \cdots - b_{rp}y_p \end{array}\right. \quad \Uparrow$$

Système échelonné

En pratique, on ne cherche pas toujours à obtenir des coefficients diagonaux tous non nuls, mais plutôt à obtenir un système **échelonné**, c'est-à-dire où chaque ligne contient **au moins « un zéro de plus »** que la précédente « en partant de la gauche », jusqu'à ce que les premiers membres soient nuls. Cela évite d'échanger les inconnues.

Dans un système **échelonné,** le nombre r d'équations dont le premier membre est **non nul** est égal au **rang** du système.

Proposition 3.3 (Nombre de solutions)

Un système linéaire admet soit

- ***aucune** solution* ($r < n$ *et sytème **incompatible***) ;
- *une solution **unique*** ($r = p \leqslant n$ *et système **compatible***) ;
- *une **infinité** de solutions* ($r < p$ *et système **compatible***).

Remarque 3.4 (Système homogène)

Un système **homogène** admet **une ou une infinité** de solutions. Il admet en particulier toujours la solution « nulle » $(0, \dots, 0)$.

Exemple 3.5

Fixons deux réels a et b. Considérons le système de trois équations à quatre inconnues suivant :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rrrrl} x + & 2y + & 3z + & 4t = 1 & E_1 \\ 2x + & (a+2)y + & (a+4)z + & (2a+4)t = b & E_2 \\ 4x + & (a^2+4)y + & (2a^2+4)z + & (3a^2+4)t = a^2 & E_3 \end{array}\right.$$

Résolution

On débute la méthode du pivot en choisissant par exemple comme première équation E_1 et première inconnue x :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr|l} x + & 2y + & 3z + & 4t = 1 & E_1 \\ & (a-2)y + & (a-2)z + & (2a-4)t = b-2 & E_2' = E_2 - 2E_1 \\ & (a^2-4)y + & (2a^2-8)z + & (3a^2-12)t = a^2-4 & E_3' = E_2 - 4E_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow (S') : \left\{\begin{array}{r|l} x + 2y + 3z + 4t = 1 & E_1 \\ (a-2)(y + z + 2t) = b-2 & E_2' \\ (a^2-4)(y + 2z + 3t) = a^2-4 & E_3' \end{array}\right.$$

Exemple 3.5

Fixons deux réels a et b. Considérons le système de trois équations à quatre inconnues suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 & E_1 \\ 2x + (a+2)y + (a+4)z + (2a+4)t = b & E_2 \\ 4x + (a^2+4)y + (2a^2+4)z + (3a^2+4)t = a^2 & E_3 \end{cases}$$

Discussion

- Si $a = 2$:

$$(S') \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 0 = b - 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2' \\ E_3' \end{array} \right.$$

  On obtient un système constitué d'une **équation principale** E_1 d'**inconnue principale** x et de deux équations de **compatibilité** $0 = b - 2$ et $0 = 0$.

  * Si $b \neq 2$, le système est **incompatible**, il n'y a pas de solution.
  * Si $b = 2$, les équations de **compatibilité** E_2' et E_3' sont redondantes et le système (S) est équivalent à E_1, il est de **rang** 1.

    En récrivant E_1 selon $x = 1 - 2y - 3z - 4t$, le système (S) admet une infinité de solutions données par

$$\mathscr{S} = \{(1 - 2y - 3z - 4t, y, z, t),\ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Exemple 3.5

Fixons deux réels a et b. Considérons le système de trois équations à quatre inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 & E_1 \\ 2x + (a+2)y + (a+4)z + (2a+4)t = b & E_2 \\ 4x + (a^2+4)y + (2a^2+4)z + (3a^2+4)t = a^2 & E_3 \end{cases}$$

Discussion

- Si $a \neq 2$:
  on simplifie E_2' et E_3' en les divisant par $a-2$ puis l'on poursuit la triangularisation :

$$(S') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl|l} x + 2y + 3z + 4t &= 1 & E_1 \\ y + z + 2t &= \frac{b-2}{a-2} & \tilde{E}_2' = \frac{1}{a-2} E_2' \\ (a+2)(y + 2z + 3t) &= a+2 & \tilde{E}_3' = \frac{1}{a-2} E_3' \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow (S'') : \left\{ \begin{array}{rl|l} x + 2y + 3z + 4t &= 1 & E_1 \\ y + z + 2t &= \frac{b-2}{a-2} & \tilde{E}_2' \\ (a+2)(z + t) &= (a+2)\frac{a-b}{a-2} & E_3'' = \tilde{E}_3' - (a+2)E_2' \end{array} \right.$$

Exemple 3.5

Fixons deux réels a et b. Considérons le système de trois équations à quatre inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 & E_1 \\ 2x + (a+2)y + (a+4)z + (2a+4)t = b & E_2 \\ 4x + (a^2+4)y + (2a^2+4)z + (3a^2+4)t = a^2 & E_3 \end{cases}$$

Discussion

- Si $a \neq 2$:
  - Si $a = -2$, on obtient un système constitué de deux **équations principales** E_1 et $\tilde{E}_2'$ d'**inconnues principales** x et y et d'une équation de **compatibilité** $0 = 0$ qui est redondante. Le système est de **rang** 2 et équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - 3z - 4t \\ y = \frac{2-b}{4} - z - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{b}{2} - z \\ y = \frac{2-b}{4} - z - 2t \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions données par

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\tfrac{b}{2} - z, \tfrac{2-b}{4} - z - 2t, z, t \right),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemple 3.5

Fixons deux réels a et b. Considérons le système de trois équations à quatre inconnues suivant :

$$(S):\quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 & E_1 \\ 2x + (a+2)y + (a+4)z + (2a+4)t = b & E_2 \\ 4x + (a^2+4)y + (2a^2+4)z + (3a^2+4)t = a^2 & E_3 \end{cases}$$

Discussion

- Si $a \neq 2$:
  - Si $a \neq -2$, on simplifie E_3'' en la divisant par $a+2$:

$$(S'') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl|l} x + 2y + 3z + 4t &=& 1 & E_1 \\ y + z + 2t &=& \frac{b-2}{a-2} & \tilde{E}_2' \\ z + t &=& \frac{a-b}{a-2} & \tilde{E}_3'' = \frac{1}{a+2} E_3'' \end{array} \right.$$

On obtient un système composé de trois **équations principales** $E_1, \tilde{E}_2', \tilde{E}_3''$ d'**inconnues principales** x, y, z. Le système est de **rang** 3 et équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 - 4t \\ y + z = \frac{b-2}{a-2} - 2t \\ z = \frac{a-b}{a-2} - t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-b}{a-2} + t \\ y = \frac{-a+2b-2}{a-2} - t \\ z = \frac{a-b}{a-2} - t \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions données par

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{2-b}{a-2} + t, \frac{-a+2b-2}{a-2} - t, \frac{a-b}{a-2} - t, t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple 3.5

Fixons deux réels a et b. Considérons le système de trois équations à quatre inconnues suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 & E_1 \\ 2x + (a+2)y + (a+4)z + (2a+4)t = b & E_2 \\ 4x + (a^2+4)y + (2a^2+4)z + (3a^2+4)t = a^2 & E_3 \end{cases}$$

En résumé

Le système étant composé de 3 équations à 4 inconnues, son **rang** est $\leqslant 3$.

- Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$: le système est de **rang** 3 et

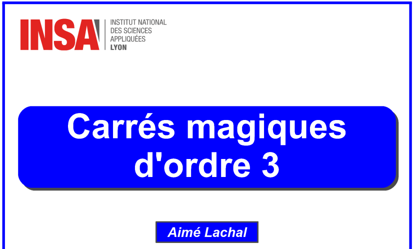
$$\mathscr{S} = \left\{\left(\tfrac{2-b}{a-2} + t, \tfrac{-a+2b-2}{a-2} - t, \tfrac{a-b}{a-2} - t, t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Si $a = -2$: le système est de **rang** 2 et

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\tfrac{b}{2} - z, \tfrac{2-b}{4} - z - 2t, z, t\right),\ (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

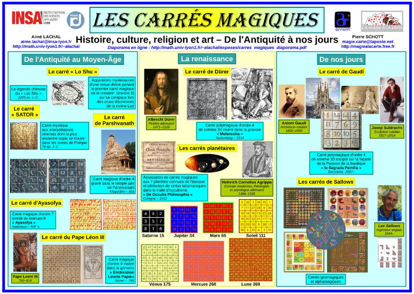
- Si $a = 2$: le système est de **rang** 1 et
  - si $b = 2$,
  $$\mathscr{S} = \{(1 - 2y - 3z - 4t, y, z, t),\ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\};$$
  - si $b \neq 2$,
  $$\mathscr{S} = \varnothing.$$

Et pour aller plus loin...

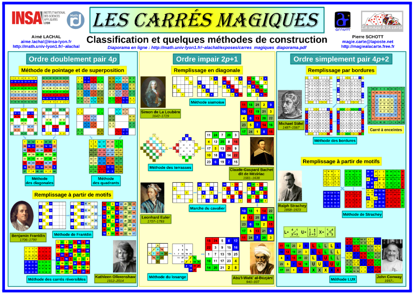


http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/ diaporama_carres_magiques_ordre3.pdf

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/ carres_magiques_diaporama.pdf



http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/ les_carres_magiques1.pdf



http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/ les_carres_magiques2.pdf