INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Espaces vectoriels

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+$ et d'une **loi externe** $\cdot$ telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ *(loi $+$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ *(loi $+$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0} \in E,\ \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall \vec{u} \in E,\ \exists \vec{v} \in E,\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} = \vec{0}$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-\vec{u}$, pour tout élément $\vec{u}$ de E)*
5. $\forall \vec{u} \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{u}$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
8. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.
Quand les lois $+$ et $\cdot$ sont évidentes, on ne les précise pas.
On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ » au lieu de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1. $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in E,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \vec{u}$
   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \vec{u} \in E,\ \underbrace{\vec{u}+\ldots+\vec{u}}_{n \text{ fois}} = n\,\vec{u}$
2. $\forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \vec{u}_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$
3. $\forall \vec{u} \in E,\ 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
4. $\forall \vec{u} \in E,\ (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$
5. $\forall \vec{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$

Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)

1. Définissons sur l'ensemble $\mathbb{K}^n$ les deux opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
   $$\begin{cases}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\end{cases}$$
   Alors $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
2. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
3. Définissons sur l'ensemble $\mathcal{A}(E, \mathbb{K})$ des applications définies sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{K}$ les opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(E, \mathbb{K})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
   $$\forall x \in E, \quad \begin{cases}(f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)\end{cases}$$
   Alors $(\mathcal{A}(E, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (s.e.v. en abrégé) si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

En général, on démontre qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. connu :

Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.

$$F \text{ est un s.e.v de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \quad (\text{un s.e.v contient toujours le vecteur } \vec{0}) \\ \qquad \text{et} \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2,\ \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F \\ (F \text{ est } \textbf{stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ plus simplement $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Proposition 2.3 (Intersection de deux s.e.v)

*L'**intersection** de deux s.e.v est encore un s.e.v. C'est faux pour la réunion.*

Exemple 2.4

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un s.e.v.
2. L'ensemble des solutions d'un système linéaire de p équations à n inconnues de la forme
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pj}x_j + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$
   est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
3. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-ensembles des fonctions paires, impaires, continues, dérivables, de classe $\mathcal{C}^p$ sont des s.e.v.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un s.e.v.
5. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans le $\mathbb{C}$-e.v. des applications dérivables de I dans $\mathbb{C}$, les ensembles des solutions des équations différentielles $u'(t) + au(t) = 0$ et $u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0$, $t \in I$, sont des s.e.v.

Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E, +, \cdot)$ un e.v. et A une partie non vide de E.
*On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A**, noté $\mathrm{Vect}(A)$, le plus petit s.e.v. de E contenant A.*
Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.

Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)

Soit A une partie non vide d'un e.v E.
$\mathrm{Vect}(A)$ est le s.e.v. de E constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de A.
En particulier, si A est une famille finie de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$, alors :

$$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p,\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. *Le s.e.v $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \lambda\vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$
4. $\forall (\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ *avec* $\lambda_i \neq 0$,
   $$\mathrm{Vect}\Big(\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p\Big) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$$

Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.
   Le s.e.v. $\mathrm{Vect}(\vec{u}) = \{\lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\vec{u}$, est une **droite vectorielle**.
2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{K}$-e.v. E (i.e. $\vec{w}$ ne coïncide avec aucun $\lambda\vec{v}$ et $\vec{v}$ ne coïncide avec aucun $\mu\vec{w}$).
   Le s.e.v. $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w}) = \{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ est un **plan vectoriel**.
3. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est une **droite vectorielle** dans le $\mathbb{R}$-e.v. des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v d'un e.v. E.

1. *On appelle **somme** de F et G, l'ensemble noté $F+G$ défini par*
$$F+G=\{\vec{w}\in E : \exists\,\vec{u}\in F,\ \exists\,\vec{v}\in G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\}=\{\vec{u}+\vec{v},\ (\vec{u},\vec{v})\in F\times G\}.$$
2. *On dit que la somme $F+G$ est **directe** et on la note $F\oplus G$ lorsque la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ de $F+G$ en $\vec{u}+\vec{v}$ avec $(\vec{u},\vec{v})\in F\times G$ est **unique**.*

Proposition 2.10 (Somme et réunion)

Soit F et G deux s.e.v d'un e.v. E.

1. *La somme $F+G$ est un **s.e.v.** de E contenant F et G et c'est le plus petit s.e.v de E contenant $F\cup G$, autrement dit : $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.*
2. *La somme $F+G$ est **directe** ssi $F\cap G=\{\vec{0}\}$.*

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v d'un e.v. E.

*On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque :* $\begin{cases} F\cap G=\{\vec{0}\} \\ \text{et} \\ F+G=E \end{cases}$

*On note alors $E=F\oplus G$ et on dit que E est la **somme directe** de F et de G.*

Théorème 2.12 (Caractérisation)

Soit F et G deux s.e.v d'un e.v. E. On a
$$E=F\oplus G \iff \forall\,\vec{w}\in E, \exists!\,(\vec{u},\vec{v})\in F\times G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}.$$
*Ainsi, F et G sont **supplémentaires** dans E ssi tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

Exemple 2.13 (Fonctions paires/impaires)

Les s.e.v. des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.

Définition 3.1 (Indépendance linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1. *On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p)$ de E est **libre** lorsque : $\forall\,(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$,*
$$\lambda_1\vec{v}_1+\cdots+\lambda_p\vec{v}_p=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0.$$
*On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p$ sont **linéairement indépendants**.*
2. *On dit que la famille $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p)$ est **liée** lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire*
$$\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\neq(0,\dots,0)\ \text{tel que}\ \lambda_1\vec{v}_1+\cdots+\lambda_p\vec{v}_p=\vec{0}.$$
*On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p$ sont **linéairement dépendants**.*

Exemple 3.2 (Vecteurs colinéaires, coplanaires)

1. **Deux** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **colinéaires.**
2. **Trois** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **coplanaires.**

Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.*
2. *Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée.***
3. *Toute famille extraite d'une famille **libre** est **libre.***
4. *Toute famille contenant une famille **liée** est **liée.***

Proposition 3.4 (Extension d'une famille libre)

*Soit $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p)$ une famille **libre** de vecteurs d'un e.v. E.*
Soit $\vec{v}\in E$. Alors :
$$(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p,\vec{v})\ \text{est libre}\iff\vec{v}\notin\mathrm{Vect}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p).$$
Autrement dit, on peut augmenter la taille d'une famille libre de vecteurs en lui ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ces vecteurs.

Définition 3.5 (Familles génératrices, bases)

1. *Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p)$ d'un e.v. E est dite **génératrice** si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p$.*
2. *Une famille **libre** et **génératrice** de E est appelée une **base** de E.*

Proposition 3.6 (Coordonnées)

*La famille $\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$-e.v. E ssi tout vecteur de E s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$.*

*Pour tout vecteur $\vec{v}\in E$, il existe donc un **unique** n-uplet $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\vec{v}=x_1\vec{v}_1+\cdots+x_n\vec{v}_n$.*

*Les scalaires $x_1,\dots,x_n$ de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 3.7 (Base canonique)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^n$, la famille de vecteurs $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ où $\vec{e}_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (le 1 étant à la i-ème position), est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée **base canonique de $\mathbb{R}^n$.**

Définition 3.8 (E.v. de dimension finie)

*On dit qu'un e.v. E est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs génératrice de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie** et l'on note par convention $\dim E=+\infty$.*

Théorème 3.9 (dit de la base incomplète)

*Soit E un e.v. de **dimension finie.** Si $\mathcal{L}$ est une famille **libre** de E et $\mathcal{G}$ une famille **génératrice** de E, alors on peut former une **base** de E en complétant $\mathcal{L}$ par des vecteurs bien choisis de $\mathcal{G}$.*

Corollaire 3.10

*Dans un e.v. de **dimension finie :***

1. *toute famille **libre** peut être complétée en une **base ;***
2. *de toute famille **génératrice,** on peut extraire une **base.***

Corollaire 3.11 (Existence de bases)

*Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).*

Théorème-définition 3.12 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie.***

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments n appelé la **dimension de E.** Ce nombre est noté $\dim E$.*
2. *Toute famille libre de E contient **au plus** n éléments.*
3. *Toute famille génératrice de E contient **au moins** n éléments.*
4. *Toute famille **libre** de n éléments de E est une **base.***
5. *Toute famille **génératrice** de n éléments de E est une **base.***

Par convention, on pose $\dim\{\vec{0}\}=0$.

Corollaire 3.13 (Dimension infinie)

*Si un e.v. possède des familles libres de cardinal **arbitrairement grand,** alors il est de **dimension infinie.***

Exemple 3.14

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
5. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $(x\mapsto e^{kx})_{1\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
6. Soit $a,b\in\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans le $\mathbb{C}$-e.v. des applications dérivables de I dans $\mathbb{C}$,
   - l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $u'(t)+au(t)=0$, $t\in I$, est une **droite vectorielle ;**
   - l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $u''(t)+au'(t)+bu(t)=0$, $t\in I$, est un **plan vectoriel.**

Définition 3.15 (Vecteurs échelonnés)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** et soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
*Une famille de vecteurs $(v_1,\dots,v_p)$ de E est dite **échelonnée relativement à la base** $\mathcal{B}$ lorsque, pour tout $k\in\{1,\dots,p-1\}$, l'écriture des coordonnées de v_{k+1} dans la base $\mathcal{B}$ commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de v_k, sauf si $v_k=v_{k+1}=0$.*

Proposition 3.16

*Toute famille de vecteurs non nuls **échelonnée** relativement à une base est nécessairement **libre.***

Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie.***

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et $\dim F \leqslant \dim E$.*
   Si de plus $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ *(formule de **Grassmann**).*
   - *Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.*

Corollaire 3.18

*Soit E un e.v. de **dimension finie,** F et G deux s.e.v. de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.*

Exemple 3.19

1. Un s.e.v. de dim. $n-1$ d'un e.v. de dim. n est appelé **hyperplan vectoriel**.
2. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. L'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{P \in \mathbb{K}_n[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 3.20 (Supplémentarité et dimension)

*Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de **dimension finie.***

$$E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E$$
$$\iff E = F + G \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E$$

Proposition 3.21

*Deux s.e.v. F et G d'un e.v. E de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base** $\mathcal{B}_E$ de E en accolant une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G : $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ et alors $\dim E = \dim F + \dim G$.*

*Une telle base de E obtenue en accolant une base de F et une base de G est dite **adaptée à la supplémentarité** de F et G.*

Théorème 3.22 (Existence de s.e.v. supplémentaires)

*Soit E un e.v. de **dimension finie.***
*Tout s.e.v. de E possède au moins un **supplémentaire** dans E.*

Définition 3.23 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$, et on note $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$, la **dimension** du s.e.v. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.*

Proposition 3.24

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs d'un e.v. E.

1. *$rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leqslant p$ avec égalité ssi la famille est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie,***
   - *$rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leqslant \dim E$ avec égalité ssi la famille est **génératrice** ;*
   - *$rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = p = \dim E$ ssi $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est une **base** de E.*

Proposition 3.25

*On **ne** modifie **pas** le **rang** d'une famille de vecteurs lorsque :*

- *on change l'ordre des vecteurs de la famille ;*
- *on multiplie un vecteur par un scalaire non nul ;*
- *on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*

Remarque 3.26 (Rang d'un système linéaire)

Si $(\mathcal{S})$ est un système linéaire de n équations à p inconnues de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Alors le rang du système $(\mathcal{S})$ est égal au rang de la famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ où $\vec{v}_j$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié.**

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

1. Faisons apparaître des zéros sur la **première** ligne à partir de la **deuxième** colonne :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 & \vec{u}'_4 & \vec{u}'_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -14 & -14 & -5 & -19 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

avec $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1$, $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$, $\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - 4\vec{u}_1$, $\vec{u}'_4 = \vec{u}_4 - \vec{u}_1$, $\vec{u}'_5 = \vec{u}_5 - 4\vec{u}_1$.

3. Dimension d'un espace vectoriel | e) Méthode des zéros échelonnés

Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié.**

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

2. Faisons apparaître des zéros sur la **deuxième** ligne à partir de la **troisième** colonne :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}''_1 & \vec{u}''_2 & \vec{u}''_3 & \vec{u}''_4 & \vec{u}''_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -14 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

avec $\vec{u}''_1 = \vec{u}'_1$, $\vec{u}''_2 = \vec{u}'_2$, $\vec{u}''_3 = \vec{u}'_3 - \vec{u}'_2$, $\vec{u}''_4 = 3\vec{u}'_4 - \vec{u}'_2$, $\vec{u}''_5 = 3\vec{u}'_5 - 4\vec{u}'_2$.

3. Dimension d'un espace vectoriel | e) Méthode des zéros échelonnés

Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié.**

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

3. Le terme apparaissant à l'intersection des **troisième** ligne et **troisième** colonne étant nul, on permute par exemple les vecteurs $\vec{u}''_3$ et $\vec{u}''_5$:

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}''_1 & \vec{u}''_2 & \vec{u}''_5 & \vec{u}''_4 & \vec{u}''_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

3. Dimension d'un espace vectoriel | e) Méthode des zéros échelonnés

Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié.**

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

4. Faisons apparaître des zéros sur la **troisième** ligne à partir de la **quatrième** colonne :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}'''_1 & \vec{u}'''_2 & \vec{u}'''_3 & \vec{u}'''_4 & \vec{u}'''_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

avec $\vec{u}'''_1 = \vec{u}''_1$, $\vec{u}'''_2 = \vec{u}''_2$, $\vec{u}'''_3 = \vec{u}''_5$, $\vec{u}'''_4 = \vec{u}''_4 - \vec{u}''_5$, $\vec{u}'''_5 = \vec{u}''_3$.

3. Dimension d'un espace vectoriel | e) Méthode des zéros échelonnés

Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié.**

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \end{array}$$

5. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{S}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}'''_1, \vec{u}'''_2, \vec{u}'''_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1, 3\vec{u}_5 - 4\vec{u}_2 - 4\vec{u}_1).$$

La famille $\big((1,1,0,5), (0,-3,2,-14), (0,0,1,-1)\big)$ est une **base** de $\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ et alors

$$\mathrm{rang}(\mathcal{S}) = 3.$$

De plus les égalités $\vec{u}'''_4 = \vec{u}'''_5 = \vec{0}$ conduisent progressivement à $\vec{u}'_4 - \vec{u}'_5 = \vec{u}'_3 = \vec{0}$, puis $\vec{u}'_2 + \vec{u}'_4 - \vec{u}'_5 = \vec{u}'_3 - \vec{u}'_2 = \vec{0}$ et enfin

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_5 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4.$$

Notions à retenir

- Espaces vectoriels
  - Axiomes, calcul vectoriel
  - Exemples canoniques
  - Dimension
- Sous-espaces vectoriels
  - Caractérisation
  - Notion d'engendrement
  - Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentarité
- Famille de vecteurs
  - Familles libres, liées, génératrices, bases
  - Dépendance, indépendance linéaires
  - Rang, méthode des zéros échelonnés