

Applications linéaires

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

- 1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$
 - Définition
 - Exemples
 - Structure
- 2 Image par une application linéaire
 - Image et image réciproque
 - Noyau et image d'une application linéaire
 - Image d'une famille de vecteurs
- 3 Applications linéaires particulières
 - Homothéties vectorielles
 - Projections vectorielles
 - Symétries vectorielles
- 4 Applications linéaires en dimension finie
 - Image d'une famille de vecteurs
 - Représentation analytique
 - Matrice d'une application linéaire
 - Rang d'une application linéaire

- 1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$
 - Définition
 - Exemples
 - Structure
- 2 Image par une application linéaire
- 3 Applications linéaires particulières
- 4 Applications linéaires en dimension finie

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et l'on se donne deux \mathbb{K} -e.v. $(E, +_E, \cdot_E)$ et $(F, +_F, \cdot_F)$.

Définition 1.1 (Applications linéaires)

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** si :

- ① $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, f(\vec{u} +_E \vec{v}) = f(\vec{u}) +_F f(\vec{v})$
- ② $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot_E \vec{u}) = \lambda \cdot_F f(\vec{u})$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Un élément de $\mathcal{L}(E, E)$, noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$, s'appelle un **endomorphisme** de E .

On peut aussi vérifier qu'une application est linéaire en une seule relation :

Proposition 1.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit f une application de E dans F .

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \iff \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, f(\lambda \cdot_E \vec{u} +_E \mu \cdot_E \vec{v}) = \lambda \cdot_F f(\vec{u}) +_F \mu \cdot_F f(\vec{v})$$

N.B. Dans toute la suite, pour alléger les notations, on utilisera les mêmes symboles $+$ et \cdot (ou rien) pour les lois relatives à E et F .

Proposition 1.3 (Propriétés immédiates)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
- $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{u}_i)$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \vec{u} \in E, f(n\vec{u}) = n f(\vec{u})$.

Exemple 1.4

- 1 Les applications linéaires de \mathbb{K} dans \mathbb{K} sont toutes de la forme $x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{K}$.
- 2 Les applications linéaires de \mathbb{K}^2 dans \mathbb{K} sont toutes de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
- 3 L'application $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'$ est linéaire.
- 4 L'application $\varphi : \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ est linéaire.

Définition 1.5 (Forme linéaire)

Si $F = \mathbb{K}$ on dit que l'application linéaire est une **forme linéaire** sur E .

Proposition 1.6 (Structure d'e.v.)

Soit E et F deux \mathbb{K} -e.v. $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un \mathbb{K} -e.v.

En plus de la stabilité par combinaison linéaire, on a :

Proposition 1.7 (Composition)

- 1 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est encore linéaire.
- 2 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Définition 1.8 (Isomorphisme, automorphisme)

- 1 Toute application **linéaire bijective** de E dans F s'appelle un **isomorphisme** de E sur F .
- 2 Tout **endomorphisme bijectif** de E s'appelle un **automorphisme** de E .
- 3 L'ensemble des automorphismes de E , noté $GL(E)$, muni de la loi de composition \circ , est un groupe non commutatif appelé **groupe linéaire** de E .

- 1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$
- 2 Image par une application linéaire
 - Image et image réciproque
 - Noyau et image d'une application linéaire
 - Image d'une famille de vecteurs
- 3 Applications linéaires particulières
- 4 Applications linéaires en dimension finie

Définition 2.1 (Image directe/réciproque)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A une partie de E et B une partie de F .

- ① L'**image (directe)** de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{\vec{v} \in F : \exists \vec{u} \in A, \vec{v} = f(\vec{u})\} = \{f(\vec{u}), \vec{u} \in A\}.$$

- ② L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) \in B\}.$$

Une propriété importante de conservation de la structure d'e.v. par les applications linéaires :

Proposition 2.2 (Image d'un s.e.v)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G un s.e.v de E et H un s.e.v de F .

Alors $f(G)$ est un s.e.v de F et $f^{-1}(H)$ est un s.e.v de E .

Définition 2.3 (Image/Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1 On appelle **image** de f le s.e.v $f(E)$ de F que l'on note $\text{Im } f$.
- 2 On appelle **noyau** de f le s.e.v $f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$ de E que l'on note $\text{Ker } f$.

On peut caractériser la surjectivité et l'injectivité d'une application linéaire :

Théorème 2.4 (Injectivité/Surjectivité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1 f est **surjective** ssi $\text{Im } f = F$.
- 2 f est **injective** ssi $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$.

Remarque 2.5

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\vec{b} \in F$. Si $\vec{b} \in \text{Im } f$ et si \vec{u}_p est une solution particulière de l'équation $f(\vec{u}) = \vec{b}$, alors les solutions de cette équation sont les vecteurs de E de la forme $\vec{u}_p + \vec{u}_h$ où \vec{u}_h décrit $\text{Ker } f$.

Exemple 2.6 (Dérivation/intégration)

- ① Dans le \mathbb{R} -e.v. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , considérons les applications $\varphi : E \longrightarrow E$ et $\psi : E \longrightarrow E$

$$f \longmapsto f' \qquad f \longmapsto \int_0^\cdot f$$

($\int_0^\cdot f$ est la fonction $x \longmapsto \int_0^x f$).

- φ et ψ sont des **endomorphismes** de E .
 - $\text{Ker}(\varphi)$ est le s.e.v. des fonctions constantes et $\text{Im}(\varphi) = E$ donc φ est **surjective** mais **pas injective**.
 - $\text{Ker}(\psi) = \{0\}$ et $\text{Im}(\psi)$ est le s.e.v. des fonctions s'annulant en 0 donc ψ est **injective** mais **pas surjective**.
 - On a $\forall f \in E$, $(\varphi \circ \psi)(f) = \left(\int_0^\cdot f\right)' = f$ et $(\psi \circ \varphi)(f) = \int_0^\cdot f' = f - f(0)$ donc $\varphi \circ \psi = \text{Id}_E$ (mais $\psi \circ \varphi \neq \text{Id}_E$).
- ② Le sous-ensemble $E_0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ est un s.e.v. de E .

Considérons à présent les applications $\varphi_0 : E_0 \longrightarrow E$ et $\psi_0 : E \longrightarrow E_0$

$$f \longmapsto f' \qquad f \longmapsto \int_0^\cdot f$$

Dans ce contexte, on a $\varphi_0 \circ \psi_0 = \text{Id}_E$ et $\psi_0 \circ \varphi_0 = \text{Id}_{E_0}$. Ainsi φ_0 et ψ_0 sont des **isomorphismes** réciproques l'un de l'autre.

Exemple 2.7 (Équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Considérons l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : u'(t) + au(t) = g(t)$, $t \in I$.

On introduit l'application linéaire Φ entre les \mathbb{R} -e.v. $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions réelles respectivement de classe \mathcal{C}^1 et continues sur I définie par

$$\begin{aligned}\Phi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' + af\end{aligned}$$

- $\text{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) : $u'(t) + au(t) = 0$. C'est la droite vectorielle des fonctions $t \mapsto \lambda e^{-at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Puis, l'équation (\mathcal{E}) s'écrivant $\Phi(f) = g$, son ensemble de solutions est $u_p + \text{Ker}(\Phi)$ où u_p est une solution particulière de (\mathcal{E}) . On retrouve ainsi un principe de superposition.

Proposition 2.8 (Image d'une famille de vecteurs)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .

- 1 Si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est liée alors $(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$ est liée.
- 2 Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille **libre** dans E .
Si f est **injective** alors $(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$ est **libre** dans F .
- 3 Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille **génératrice** de E .
Si f est **surjective** alors $(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$ est une famille **génératrice** de F .
- 4 Si $G = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ alors $f(G) = \text{Vect}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$.
En particulier, si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E , alors $(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n))$ est une famille **génératrice** de $\text{Im } f$.

- 1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$
- 2 Image par une application linéaire
- 3 Applications linéaires particulières
 - Homothéties vectorielles
 - Projections vectorielles
 - Symétries vectorielles
- 4 Applications linéaires en dimension finie

Définition 3.1 (Homothétie)

On appelle **homothétie vectorielle** de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $h_\lambda : E \mapsto E$ définie par $h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. C'est un endomorphisme de E .

Quelques propriétés immédiates :

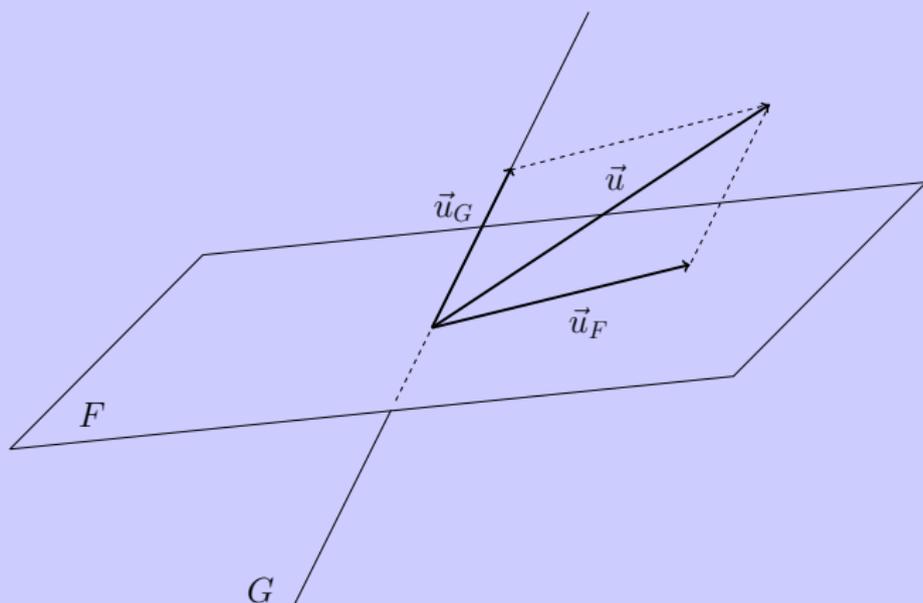
Proposition 3.2 (Composition)

- 1 Une homothétie vectorielle de $\mathcal{L}(E)$ commute avec tout $f \in \mathcal{L}(E)$.
- 2 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.
- 3 $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, h_\lambda \in \text{GL}(E)$ et $(h_\lambda)^{-1} = h_{1/\lambda}$.

Définition 3.3 (Projection)

Soit F et G deux s.e.v supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.

Tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décomposant de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$, on appelle **projection vectorielle sur F parallèlement à G** , l'application $p : E \rightarrow E$ définie par $p(\vec{u}) = \vec{u}_F$.



Théorème 3.4 (Propriétés)

Soit p la projection vectorielle sur F parallèlement à G dans $E = F \oplus G$.

Alors :

- 1 p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$ (on dit que p est **idempotent**).
- 2 $F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker } p$.
 F est l'ensemble des vecteurs **invariants** par p : $F = \{\vec{u} \in E : p(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

Proposition 3.5 (Caractérisation)

Tout endomorphisme **idempotent** p de E est la **projection vectorielle** sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$, espaces alors supplémentaires dans E : $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

Remarque 3.6

En revanche, il ne suffit pas d'avoir $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$ pour dire que f est une projection.

Exemple 3.7 (Détermination d'une projection)

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère le plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et la droite vectorielle D de vecteur directeur $(1, 1, 1)$. D a pour équations $x = y = z$.

Déterminons la **projection vectorielle** p sur le plan P parallèlement à la droite D .

- 1 On vérifie tout d'abord que P et D sont supplémentaires dans E : ceci est dû à $P \cap D = \{(0, 0, 0)\}$ et $\dim P + \dim D = \dim E$.
- 2 Pour tout vecteur (x, y, z) de E , notons (x', y', z') son image par p :
 $(x', y', z') = p(x, y, z)$.
- 3 Le vecteur (x', y', z') est caractérisé par les deux conditions

$$\begin{cases} (x', y', z') \in P \\ (x, y, z) - (x', y', z') \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x' - 2y' + 3z' = 0 \\ x' - y' = x - y \\ x' - z' = x - z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + 2y - 3z) \\ y = \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z) \\ z = \frac{1}{2}(-x + 2y - z) \end{cases}$$

- 4 En conclusion, p est définie analytiquement par

$$p: \quad E \longrightarrow E \\ (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{1}{2}(x + 2y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 2y - z) \right)$$

Exemple 3.8 (Identification d'une projection)

Considérons l'endomorphisme p du \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ suivant :

$$p: \quad E \longrightarrow E \\ (x, y, z) \longmapsto (3x - 2y + 8z, -x + 2y - 4z, -x + y - 3z)$$

- 1 On vérifie que $p \circ p = p$ donc p est une **projection vectorielle** de E .
- 2 Déterminons le noyau de p . Soit $(x, y, z) \in E$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(p) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 8z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(p) = \{(-2\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

C'est la **droite vectorielle** D engendrée par le vecteur $(-2, 1, 1)$.

- 3 Déterminons les **invariants** de p . Soit $(x, y, z) \in E$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 8z = x \\ -x + 2y - 4z = y \\ -x + y - 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = z \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{(x, y, z) \in E : x - y + 4z = 0\} = \{(\lambda, \lambda + 4\mu, \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

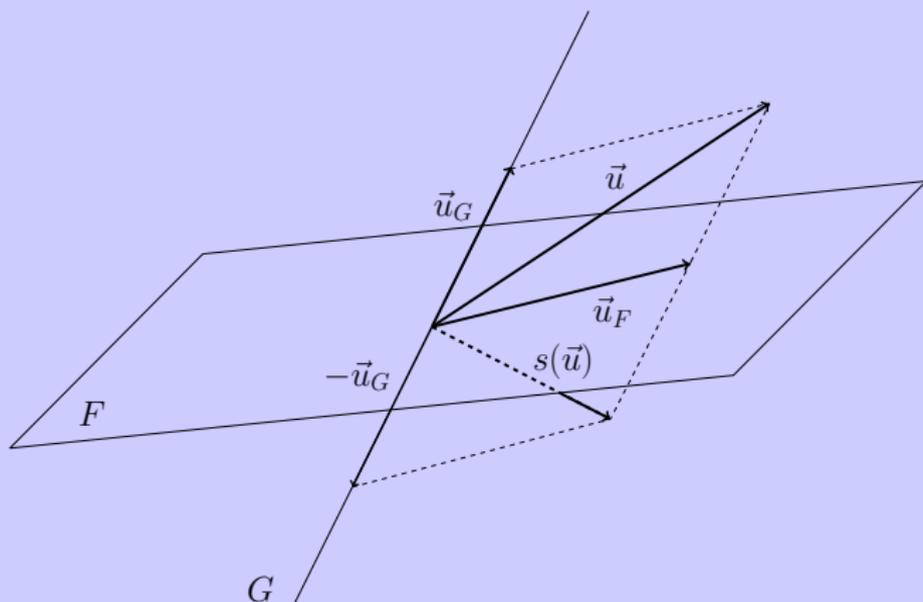
C'est le **plan vectoriel** P engendré par $(1, 1, 0)$ et $(0, 4, 1)$.

- 4 En conclusion, p est la **projection vectorielle sur P parallèlement à D** .

Définition 3.9 (Symétrie)

Soit F et G deux s.e.v supplémentaires dans E .

Tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décomposant de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$, on appelle **symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G** , l'application $s : E \rightarrow E$ définie par $s(\vec{u}) = \vec{u}_F - \vec{u}_G$.



Théorème 3.10 (Propriétés)

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G dans $E = F \oplus G$.

Alors :

- 1 s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \text{Id}_E$ (on dit que s est **involutif**) et $s = 2p - \text{Id}_E$, p étant la projection sur F parallèlement à G .
- 2 $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.
 F (resp. G) est l'ensemble des vecteurs **invariants** (resp. **anti-invariants**) par s :
 $F = \{\vec{u} \in E : s(\vec{u}) = \vec{u}\}$ (resp. $G = \{\vec{u} \in E : s(\vec{u}) = -\vec{u}\}$).

Proposition 3.11 (Caractérisation)

Tout endomorphisme **involutif** s de E est la **symétrie vectorielle** par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, espaces alors supplémentaires dans E .

- 1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$
- 2 Image par une application linéaire
- 3 Applications linéaires particulières
- 4 Applications linéaires en dimension finie
 - Image d'une famille de vecteurs
 - Représentation analytique
 - Matrice d'une application linéaire
 - Rang d'une application linéaire

Théorème 4.1 (Image d'une famille de vecteurs)

On suppose E de dimension **finie** n et F de dimension quelconque.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Alors :

- 1 la famille $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est **libre** dans F ssi f est **injective** ;
- 2 la famille $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est **génératrice** dans F ssi f est **surjective** ;
- 3 la famille $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une **base** de F ssi f est un **isomorphisme**.
Dans ce cas, on dit que E et F sont **isomorphes**.

Corollaire 4.2 (Injectivité/surjectivité et dimension)

On suppose E et F de dimensions **finies**.

Alors :

- 1 s'il existe une application linéaire de E dans F **injective** alors $\dim F \geq \dim E$;
- 2 s'il existe une application linéaire de E dans F **surjective** alors $\dim F \leq \dim E$;
- 3 s'il existe un **isomorphisme** de E sur F alors $\dim F = \dim E$.

Théorème 4.3 (Détermination d'une application linéaire)

On suppose E de dimension **finie** n et F de dimension quelconque.

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E . Alors :

- 1 si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie $f(\vec{e}_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors f est l'application **nulle** ;
- 2 si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $f = g$.
Autrement dit, si f et g **coïncident sur une base** alors elles sont **égales** ;
- 3 soit $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs de F . Alors, il existe une **unique application linéaire** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On peut résumer ce résultat en une phrase :

si l'espace de départ est de dimension finie, une application linéaire est **entièrement déterminée** par la donnée des images d'une base.

Théorème 4.4 (Représentation analytique)

On suppose E et F de dimensions **finies** respectives n et m .

Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Notons pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{e}_i$.

Si le vecteur $\vec{u} \in E$ a pour coordonnées (x_1, \dots, x_n) par rapport à \mathcal{B}_E , alors son image par f est le vecteur $f(\vec{u}) \in F$ de coordonnées (y_1, \dots, y_m) par rapport à \mathcal{B}_F où

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$. Cela s'écrit explicitement :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Le système précédent s'appelle la **représentation analytique** de f relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .

Corollaire 4.5 (Applications linéaires canoniques)

Les applications linéaires des \mathbb{K} -e.v. **canoniques** \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^m sont de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right) \in \mathbb{K}^m \text{ où les } a_{ij} \text{ sont des scalaires}$$

de \mathbb{K} .

Il est parfois commode d'écrire la correspondance sous la forme (cf. le cours de calcul différentiel de 2^e année, calcul de matrice **jacobienne**)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 4.6 (Matrice d'une application linéaire)

On suppose E et F de dimensions **finies** respectives n et m .

Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** , le tableau de nombres à m lignes et n colonnes, noté $[f]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ (ou $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$), obtenu en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(\vec{e}_j)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, dans la base \mathcal{B}_F .

Ainsi, si pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{e}_i$,

$$[f]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposition-définition 4.7 (Rang d'une application linéaire)

On suppose E de dimension **finie** n , F de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Im } f$ est de dimension **finie**. Sa dimension est appelée le **rang** de f et notée $\text{rg}(f)$.

Ainsi, si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E , $\text{rg}(f)$ est le rang de la famille de vecteurs $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$.

Quelques propriétés du rang d'une application linéaire :

Proposition 4.8 (Propriétés immédiates)

On suppose E de dimension **finie**, F de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ① $\text{rg}(f) \leq \dim E$, avec égalité ssi f est **injective**.
- ② $\text{rg}(f) \leq \dim F$, avec égalité ssi f est **surjective**.
- ③ $\text{rg}(f) = \dim E = \dim F$ ssi f est un **isomorphisme**.

Proposition 4.9 (Composition et rang)

Soit E, F des \mathbb{K} -e.v. de dimensions finies et G un \mathbb{K} -e.v. quelconque.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

De plus,

- 1 si f est **surjective** alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$;
- 2 si g est **injective** alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Une conséquence importante :

Corollaire 4.10

On ne modifie pas le rang d'une application linéaire en composant celle-ci avec un isomorphisme.

Théorème 4.11 (Théorème du rang)

On suppose E de dimension **finie**, F de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si G est un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E alors $f|_G : G \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.

En particulier :

$$\dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f) = \dim E.$$

Corollaire 4.12 (Équivalence injectivité/surjectivité)

On suppose E et F de **même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

f est **injective** \iff f est **surjective** \iff f est un **isomorphisme**

En particulier, ces équivalences sont vérifiées pour tout endomorphisme f de E .

Théorème 4.13 (Espaces isomorphes)

Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.

Ainsi, tous les \mathbb{K} -e.v. de **dimension finie n** sont **isomorphes à \mathbb{K}^n** .

Exemple 4.14 (Dérivation/intégration)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} -e.v. des polynômes à coefficients réels de degré au plus n et $F = \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}$. Considérons l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$

$$P \mapsto (P', P(0))$$

① Déterminons le **noyau** de $\varphi : P \in \text{Ker}(\varphi) \iff P' = 0$ et $P(0) = 0 \iff P = 0$.
Donc φ est **injective**.

② Comme les e.v. E et F sont de **même dimension finie** $n + 1$, φ est aussi **surjective**, c'est donc un **isomorphisme**.

③ Son **isomorphisme réciproque** s'écrit $\varphi^{-1} : F \rightarrow E$

$$(Q, a) \mapsto \int_0^{\cdot} Q + a$$

Notions à retenir

- Applications linéaires
 - ★ Caractérisation
 - ★ Représentation analytique
 - ★ Matrice
 - ★ Noyau, image ; lien avec l'injectivité, la surjectivité ; isomorphisme
 - ★ Image d'une famille de vecteurs
 - ★ Théorème du rang
 - ★ Exemples géométriques : homothéties, projections, symétries