INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Matrices

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^er cycle, 1^re année

Sommaire

Définition 1.1 (Matrice)

1. *Soit n et p des naturels non nuls.* ***Une matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$****, est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où les a_{ij} sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés ***coefficients*** *de A.*
On notera aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou encore $A = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de A.

2. *L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Lorsque $n = p$, on parle de* ***matrices carrées*** *et l'on note plus simplement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
3. *On appelle* ***matrice unité****, notée I_n, la matrice $(\delta_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $\delta_{ii} = 1$ et $\forall i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$.*
4. *On appelle* ***matrice colonne*** *tout élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et* ***matrice ligne*** *tout élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.*

Définition 1.2 (Matrice d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions respectives p et n.
Soit $\mathscr{B} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$ une base de F.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On appelle ***matrice de f par rapport aux (ou dans les) bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$****, la matrice à n lignes et p colonnes, notée $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ ou parfois $\mathcal{M}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})$, dont la j^e colonne est constituée des coordonnées du vecteur $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.*

Si l'on écrit, pour $1 \leqslant j \leqslant p$, $f(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{v}_i$, alors $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Cas particulier :
Lorsque $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note plus simplement $[f]_{\mathscr{B}}$ au lieu de $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$.

L'addition et la multiplication par un scalaire des applications linéaires se **transportent** de la manière suivante :

Proposition 1.3

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions respectives p et n.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Soit $(f,g) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$.
Si $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = (a_{ij})$ et $[g]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = (b_{ij})$ alors :

1. $[f+g]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = (a_{ij}+b_{ij})$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $[\lambda.f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = (\lambda a_{ij})$.

Cela permet de munir $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure d'e.v. :

Définition 1.4 (Opérations matricielles)

On définit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une loi interne $+$ et une loi externe $\cdot$ de la manière suivante :

1. $\forall ((a_{ij}),(b_{ij})) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $(a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda\cdot(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

Théorème 1.5 (Structure d'espace vectoriel)

1. *$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un* ***$\mathbb{K}$-e.v.*** *de dimension finie $n\times p$ dont une base (dite* ***canonique****) est constituée par la famille de matrices* ***élémentaires*** *$(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ définies par*

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \overset{\begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

2. *Pour toutes bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F* ***fixées****, l'application*
$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & [f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \end{array}$$
est un ***isomorphisme*** *d'e.v.*
et l'on a donc $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n\times p$.

Proposition 2.1 (Matrice et composition)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions respectives p, n et q.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G.
On considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et l'on pose :
$A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant n} = [g]_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$.
Alors $g\circ f \in \mathscr{L}(E,G)$ admet pour matrice

$$[g\circ f]_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right)_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant p}$$

En cohérence avec la propriété précédente (en modifiant l'ordre des notations), on peut définir le **produit de deux matrices** sous certaines conditions sur leurs tailles :

Définition 2.2 (Produit matriciel)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
On définit la ***matrice produit*** *$A\times B = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \forall j \in \{1,\ldots,q\},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

En conséquence, avec les notations de la proposition 2.1,
$$[g\circ f]_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = [g]_{\mathscr{C},\mathscr{D}} \times [f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Le transport des lois $(+,\cdot,\circ)$ opérant sur l'espace $\mathscr{L}(E,F)$ vers les lois $(+,\cdot,\times)$ opérant sur l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, permet d'en déduire des propriétés pour les opérations sur les matrices :

Proposition 2.3 (Propriétés du produit matriciel)

A, B, C étant des matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$, les égalités suivantes sont vérifiées à condition que les nombres de lignes et de colonnes des matrices y figurant soient compatibles :

1. $A(BC) = (AB)C$ ***(associativité)***
2. $A(B+C) = AB+AC$ ***(distributivité à gauche)***
3. $(A+B)C = AC+BC$ ***(distributivité à droite)***
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Remarque 2.4

Tout comme la loi de composition des applications, le produit de matrices **ne commute pas :** en général, $AB \neq BA$.

Remarque 2.5

Pour pouvoir faire le produit d'une matrice A avec elle-même, il faut et il suffit qu'elle ait le même nombre de lignes et de colonnes, i.e. qu'elle soit **carrée**.

Définition 2.6 (Puissance d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A^p = \underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{p \text{ fois}}$ et, par convention, $A^0 = I_n$.

S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O$ (i.e. la matrice dont tous les coefficients sont nuls), on dit que A est ***nilpotente****.*

Théorème 2.7 (Formule du binôme matricielle (facultatif))

Si A et B sont des matrices ***carrées*** *de même taille qui* ***commutent*** *(i.e. $AB = BA$), alors*

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Exemple 2.8 (Formule du binôme et matrices nilpotentes)

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. On décompose A en I_3+B avec $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
2. Remarquons que $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $B^3=O$, puis pour tout entier $k\geqslant 3$, $B^k=O$. La matrice B est donc **nilpotente.**
3. De plus I_3 **commute** avec B. On peut donc appliquer la **formule du binôme :**

$$\forall p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\},\quad A^p=\sum_{k=0}^{2}\binom{p}{k}B^k=I_3+pB+\frac{1}{2}p(p-1)B^2$$

soit

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad A^p=\begin{pmatrix}1&p&\frac12 p(p+1)\\0&1&p\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Proposition 2.9 (Représentation analytique)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $A=[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ et $(\vec{u},\vec{v})\in E\times F$.

Alors, si on note X la matrice colonne obtenue en écrivant les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$, et Y celle obtenue en écrivant les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{C}$, on a :

$$\vec{v}=f(\vec{u})\Longleftrightarrow Y=AX.$$

Explicitement :

si $\dim E=n$, $\dim F=m$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$ *et* $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$, *alors*

$$\vec{v}=f(\vec{u})\Longleftrightarrow\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\\quad\vdots\\y_m=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}$$

Pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$ tel que $i\neq j$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, soit la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}&&&&&j&\\&&&&&\downarrow&\end{array}\\ \Omega_{ij}(\lambda)=\quad i\rightarrow & \begin{pmatrix}1&&&&&&(0)\\&\ddots&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&\cdots&\lambda&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&\ddots&\\(0)&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Proposition 2.10

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

1. *La matrice produit $\Omega_{ij}(\lambda)A$ est la matrice obtenue en laissant inchangées les lignes de A à l'exception de la i^e ligne L_i qui est remplacée par $L_i+\lambda L_j$.*
2. *La matrice produit $A\Omega_{ij}(\lambda)$ est la matrice obtenue en laissant inchangées les colonnes de A à l'exception de la j^e colonne C_j qui est remplacée par $C_j+\lambda C_i$.*

Pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, soit la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}&&&i&&&\\&&&\downarrow&&&\end{array}\\ D_i(\lambda)=\quad i\rightarrow & \begin{pmatrix}1&&&&&&(0)\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\lambda&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\(0)&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Proposition 2.11

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $i\in\{1,\dots,n\}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

1. *La matrice produit $D_i(\lambda)A$ est la matrice obtenue en laissant inchangées les lignes de A à l'exception de la i^e ligne que l'on multiplie par λ.*
2. *La matrice produit $AD_i(\lambda)$ est la matrice obtenue en laissant inchangées les colonnes de A à l'exception de la i^e colonne que l'on multiplie par λ.*

Pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$ tel que $i\neq j$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, soit la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}&&i&&j&&\\&&\downarrow&&\downarrow&&\end{array}\\ \Delta_{ij}=\begin{array}{c}\\\\i\rightarrow\\\\j\rightarrow\\\\\\\end{array} & \begin{pmatrix}1&&&&&&(0)\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\(0)&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Proposition 2.12

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

1. *La matrice produit $\Delta_{ij}A$ est la matrice obtenue en échangeant les i^e et j^e lignes de A et en laissant inchangées les autres lignes.*
2. *La matrice produit $A\Delta_{ij}$ est la matrice obtenue en échangeant les i^e et j^e colonnes de A et en laissant inchangées les autres colonnes.*

Parmi les matrices **carrées**, **certaines** sont dites **inversibles** :

Définition 3.1 (Matrice inversible)

*$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** lorsqu'il existe $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB=BA=I_n$.*
*La matrice B, lorsqu'elle existe, est unique et s'appelle l'**inverse** de A et se note A^{-1}.*
On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.2 (Inversibilité et opérations)

1. *Si A est **inversible** et $\lambda\in\mathbb{K}$ **non nul,** alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.*
2. *Si A et B sont **inversibles** alors AB est **inversible** et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.*

Remarque 3.3

Attention, la **somme** de deux matrices **inversibles n'**est **pas** nécessairement **inversible.**

Proposition 3.4 (Inversibilité et bijectivité)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $A=[f]_{\mathscr{B}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
*Alors les propositions suivantes sont toutes **équivalentes** :*

1. *A est **inversible***
2. *$\exists\,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB=I_n$*
3. *$\exists\,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA=I_n$*
4. *rg(A)=n*
5. *f est **bijective***
6. *f est **injective***
7. *f est **surjective***

De plus, si l'une de ces propositions est vraie, alors $[f^{-1}]_{\mathscr{B}}=A^{-1}$.

Remarque 3.5 (Calcul de l'inverse)

1. Pour déterminer la matrice inverse d'une matrice A, lorsque celle-ci existe, on passe par la **résolution d'un système linéaire** par interprétation de l'équivalence $AX=Y\Longleftrightarrow X=A^{-1}Y$, où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(X,Y)\in(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$.
2. On peut aussi utiliser l'**algorithme de Gauss-Jordan :** par multiplications à gauche successives de la matrice A par des matrices élémentaires (transvection, dilatation, échange), on peut transformer A en la matrice identité I_n. Alors la matrice produit de ces matrices élémentaires successives est égale à A^{-1}.

Définition 4.1 (Transposition)

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$.
*On appelle **transposée** de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée ${}^tA$, définie par :*

$$\forall\,i\in\{1,\dots,p\},\ \forall\,j\in\{1,\dots,q\},\ {}^tA=(a'_{ij})\ \text{ où } a'_{ij}=a_{ji}.$$

Proposition 4.2 (Propriétés de la transposition)

1. $\forall(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $\forall\,\lambda\in\mathbb{K}$,
$${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB\qquad{}^t(\lambda A)=\lambda({}^tA)\qquad{}^t({}^tA)=A$$
2. $\forall\,A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\forall\,B\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.
3. *Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** alors ${}^tA$ est **inversible** et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$.*
4. $\forall\,A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}({}^tA)=\operatorname{rg}(A)$.

Définition 4.3 (Diverses matrices particulières)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée d'ordre n.

1. *A est appelée matrice **scalaire** lorsqu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $A=\lambda I_n$.*
2. *A est dite **diagonale** lorsque les coefficients de A placés en dehors de sa diagonale sont nuls.*
3. *A est dite **triangulaire supérieure** (respectivement **triangulaire inférieure**) lorsque les coefficients de A placés strictement au-dessous (respectivement au-dessus) de sa diagonale sont nuls.*
4. *A est dite **symétrique** lorsque ${}^tA=A$.*
5. *A est dite **antisymétrique** lorsque ${}^tA=-A$.*
6. *A est dite **orthogonale** lorsque ${}^tAA=I_n$ (ou $A\,{}^tA=I_n$, et dans ce cas $A^{-1}={}^tA$).*

Proposition 4.4 (Stabilité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans ce qui suit des parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *L'ensemble des matrices **diagonales** est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **stable** pour la multiplication des matrices.*
   Restreinte à cet ensemble, la multiplication des matrices est commutative.
2. *L'ensemble des matrices **triangulaires supérieures** est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **stable** pour la multiplication des matrices.*
3. *L'ensemble des matrices **triangulaires inférieures** est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **stable** pour la multiplication des matrices.*
4. *L'ensemble des matrices **symétriques** et l'ensemble des matrices **antisymétriques** sont des s.e.v. **supplémentaires** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
   *Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de **manière unique** selon*
   $$A = \frac{1}{2}(A + {}^{t}A) + \frac{1}{2}(A - {}^{t}A)$$
   où $\frac{1}{2}(A + {}^{t}A)$ est symétrique et $\frac{1}{2}(A - {}^{t}A)$ est antisymétrique.

Définition 5.1 (Matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n, muni de deux bases $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$.
*On appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ la matrice dans laquelle la j^e colonne est formée des coordonnées de $\vec{e}_j'$ dans la base $\mathscr{B}$. Elle se note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.*
En d'autres termes, $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Toute matrice de passage est **inversible.** Plus précisément :

Proposition 5.2 (Inverse d'une matrice de passage)

*Si P est la **matrice de passage** d'une base $\mathscr{B}$ vers une base $\mathscr{B}'$ alors P est **inversible** et son inverse P^{-1} est la **matrice de passage** de $\mathscr{B}'$ vers $\mathscr{B}$.*

Et plus généralement :

Proposition 5.3 (Un critère de base)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
Soit $\mathscr{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une famille de vecteurs de E et A la matrice de colonnes les coordonnées des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors :
*$\mathscr{F}$ est une **base** de E ssi A est **inversible.***

Proposition 5.4 (Changement de base pour un vecteur)

Soit $\vec{u} \in E$. La matrice colonne X des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathscr{B}$ et la matrice colonne X' des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathscr{B}'$ vérifient les égalités équivalentes :
$$X = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}X' \quad \text{et} \quad X' = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}X.$$

Et on a la même chose pour les matrices :

Proposition 5.5 (Changement de base pour une matrice)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et soit F un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, muni de deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Introduisons $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$, ainsi que $A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ et $A' = [f]_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}$.
Ces matrices vérifient les égalités équivalentes :
$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = QA'P^{-1}.$$

Définition 5.6 (Matrices équivalentes)

*Deux matrices A et A' vérifiant une relation de la forme $A' = Q^{-1}AP$, où P et Q sont des matrices inversibles, sont dites **équivalentes.***
*Elles représentent une **même** application linéaire relativement à des bases différentes.*

Proposition 5.7 (Cas des endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Introduisons $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ ainsi que $A = [f]_{\mathscr{B}}$ et $A' = [f]_{\mathscr{B}'}$.
Ces matrices vérifient les égalités équivalentes :
$$A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}.$$
On peut retenir une sorte de « relation de Chasles » :
$$[f]_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times [f]_{\mathscr{B}} \times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}.$$

Définition 5.8 (Matrices semblables)

*Deux matrices carrées A et A' vérifiant une relation de la forme $A' = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible, sont dites **semblables.***
*Elles représentent donc le **même** endomorphisme dans deux bases différentes.*

Exemple 5.9 (Détermination d'une projection)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et la droite vectorielle D de vecteur directeur $\vec{k}' = (1, 1, 1)$.

Déterminons la **projection vectorielle** p sur le plan P parallèlement à la droite D.

---

1. On vérifie tout d'abord que P et D sont **supplémentaires** dans E. P est engendré par les vecteurs $\vec{i}' = (2, 1, 0)$ et $\vec{j}' = (3, 0, -1)$. En accolant la base $(\vec{i}', \vec{j}')$ de P et la base $(\vec{k}')$ de D, on constate que l'on obtient une **base** $\mathscr{B}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ **de** E.
2. Le plan P étant **invariant** dans la projection, on a $p(\vec{i}') = \vec{i}'$ et $p(\vec{j}') = \vec{j}'$.
   D étant la **direction** de la projection, on a $p(\vec{k}') = \vec{0}$.
   Dans la base $\mathscr{B}'$, l'endomorphisme p admet donc la matrice simple $[p]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Introduisons la **matrice de passage** $Q = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour déterminer son inverse $Q^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$, on exprime les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$:
   $$\begin{cases} \vec{i}' = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{j}' = 3\vec{i} - \vec{k} \\ \vec{k}' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}(-\vec{i}' + \vec{j}' + \vec{k}') \\ \vec{j} = 2\vec{i}' - \vec{j}' - \vec{k}' \\ \vec{k} = \frac{1}{2}(-3\vec{i}' + \vec{j}' + 3\vec{k}') \end{cases} \text{d'où } Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.9 (Détermination d'une projection)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et la droite vectorielle D de vecteur directeur $\vec{k}' = (1, 1, 1)$.

Déterminons la **projection vectorielle** p sur le plan P parallèlement à la droite D.

---

4. En conclusion, p admet pour **matrice dans la base** $\mathscr{B}$ **:**
   $$[p]_{\mathscr{B}} = Q[p]_{\mathscr{B}'}Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
   ce qui fournit **analytiquement**
   $$p : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}(x + 2y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 2y - z)\right) \end{array}$$
5. À titre de vérification, on peut voir que
   - $\left([p]_{\mathscr{B}}\right)^2 = [p]_{\mathscr{B}}$, donc $p \circ p = \mathrm{Id}_E$ et p est bien une projection vectorielle ;
   - $\mathrm{Ker}\, p = \{(x, y, z) \in E : x = y = z\} = D$
     et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}\big((1, -1, -1), (1, 2, 1)\big) = P$,
     donc p est bien la projection vectorielle de E sur P parallèlement à D.

Définition 5.10 (Rang d'une matrice)

*Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang des p colonnes de A considérées comme une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.*

Proposition 5.11

*Deux matrices **équivalentes** ou **semblables** ont le **même rang.***

D'où une propriété d'**invariance** importante :

Proposition 5.12 (Rang matrice/application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
*Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de la matrice $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ **ne dépend pas du choix des bases** $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: il est toujours égal à $\mathrm{rg}(f)$.*

Proposition 5.13 (Rang et inversibilité)

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée.** Alors A est **inversible** ssi $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Représentation matricielle d'un système linéaire

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$ de la forme :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Posons $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A, et soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.
Résoudre le système $(\mathscr{S})$ est équivalent à **résoudre l'équation matricielle $AX = B$** d'inconnue X, qui est encore équivalent à **résoudre l'équation fonctionnelle $f(x) = b$** d'inconnue x.

Proposition 5.14 (Rang d'un système linéaire)

Avec les notations précédemment définies :

1. *on a $\mathrm{rg}(\mathscr{S}) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$;*
2. *si $\mathrm{rg}(\mathscr{S}) = n = p$, alors $(\mathscr{S})$ admet une **unique** solution donnée par $X = A^{-1}B$.*

Notions à retenir

- Matrices
  - Calcul matriciel (somme, produit, inverse, transposition)
  - Lien avec les applications linéaires
  - Lien avec les systèmes linéaires
  - Matrice de passage et changement de base
  - Rang