INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Suites numériques

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^er^ cycle, 1^re^ année

Sommaire

Sommaire

Définition 1.1 (Monotonie)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) lorsque :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} > u_n)$$

Définition 1.1 (Monotonie)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} > u_n)$$
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} < u_n)$$

Définition 1.1 (Monotonie)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} > u_n)$$
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} < u_n)$$
3. *On dit qu'une suite réelle est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) lorsqu'elle est* ***croissante ou décroissante*** *(resp.* ***strictement croissante ou strictement décroissante****).*

Définition 1.1 (Monotonie)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (resp. \quad u_{n+1} > u_n)$$
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad (resp. \quad u_{n+1} < u_n)$$
3. *On dit qu'une suite réelle est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) lorsqu'elle est* ***croissante ou décroissante*** *(resp.* ***strictement croissante ou strictement décroissante****).*

Remarque 1.2 (Méthodes)

Il y a plusieurs manières d'étudier les variations d'une suite :

- on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;

Définition 1.1 (Monotonie)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} > u_n)$$
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} < u_n)$$
3. *On dit qu'une suite réelle est **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est **croissante ou décroissante** (resp. **strictement croissante ou strictement décroissante**).*

Remarque 1.2 (Méthodes)

Il y a plusieurs manières d'étudier les variations d'une suite :

- on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si $u_n = f(n)$ avec f fonction réelle, on peut étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$;

Définition 1.1 (Monotonie)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} > u_n)$$
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad (\textit{resp.} \quad u_{n+1} < u_n)$$
3. *On dit qu'une suite réelle est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) lorsqu'elle est* ***croissante ou décroissante*** *(resp.* ***strictement croissante ou strictement décroissante****).*

Remarque 1.2 (Méthodes)

Il y a plusieurs manières d'étudier les variations d'une suite :

- on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si $u_n = f(n)$ avec f fonction réelle, on peut étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$;
- si tous les termes sont **de signe constant**, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***majorée*** *lorsque*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A.$$
A est alors un ***majorant*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsque*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A.$$
*A est alors un **majorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsque*
$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant B.$$
*B est alors un **minorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***majorée*** *lorsque*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A.$$
A est alors un ***majorant*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***minorée*** *lorsque*
$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant B.$$
B est alors un ***minorant*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *On dit qu'une suite réelle est* ***bornée*** *lorsqu'elle est* ***majorée et minorée.***
De manière équivalente : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** *ssi*
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsque*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A.$$
*A est alors un **majorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsque*
$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant B.$$
*B est alors un **minorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *On dit qu'une suite réelle est **bornée** lorsqu'elle est **majorée et minorée.***
*De manière équivalente : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** ssi*
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Définition 1.4 (Cas des suites complexes)

*On dit que la suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsque*
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad |u_n| \leqslant M.$$

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsque*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A.$$
*A est alors un **majorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsque*
$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant B.$$
*B est alors un **minorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *On dit qu'une suite réelle est **bornée** lorsqu'elle est **majorée et minorée.***
*De manière équivalente : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** ssi*
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Définition 1.4 (Cas des suites complexes)

*On dit que la suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsque*
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad |u_n| \leqslant M.$$

Proposition 1.5 (Cas des suites complexes)

*La suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** ssi les suites **réelles** $\left(\Re e(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\Im m(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **bornées.***

Sommaire

Définition 2.1 (Limite finie)

On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers*** *le nombre* ℓ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On dit que ℓ *est la* ***limite*** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Définition 2.1 (Limite finie)

*On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** le nombre ℓ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

*On dit que ℓ est la **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

Proposition 2.2

*Toute suite **convergente** est **bornée.** La réciproque est **fausse.***

Définition 2.1 (Limite finie)

On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers*** *le nombre* ℓ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On dit que ℓ *est la* ***limite*** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Proposition 2.2

Toute suite ***convergente*** *est* ***bornée.*** *La réciproque est* ***fausse.***

Définition 2.3 (Divergence)

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas, on dit qu'elle* ***diverge****, c'est-à-dire :*

$$\forall \ell \in \mathbb{R}\,(\textit{ou } \mathbb{C}), \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N \textit{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

Définition 2.1 (Limite finie)

On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers*** *le nombre* ℓ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On dit que ℓ *est la* ***limite*** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Proposition 2.2

Toute suite ***convergente*** *est* ***bornée.*** *La réciproque est* ***fausse.***

Définition 2.3 (Divergence)

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas, on dit qu'elle* ***diverge****, c'est-à-dire :*

$$\forall \ell \in \mathbb{R}\,(ou\ \mathbb{C}), \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

En particulier, pour une suite ***réelle divergente :***

1. *on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *lorsque*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > n_A \Longrightarrow u_n > A);$$

Définition 2.1 (Limite finie)

On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers*** *le nombre* ℓ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On dit que ℓ *est la* ***limite*** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Proposition 2.2

Toute suite ***convergente*** *est* ***bornée.*** *La réciproque est* ***fausse.***

Définition 2.3 (Divergence)

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas, on dit qu'elle* ***diverge****, c'est-à-dire :*

$$\forall \ell \in \mathbb{R}\,(ou\ \mathbb{C}), \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

En particulier, pour une suite ***réelle divergente :***

1. *on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *lorsque*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > n_A \Longrightarrow u_n > A);$$
2. *on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *lorsque*
$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists n_B \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > n_B \Longrightarrow u_n < B).$$

Illustration d'une suite réelle convergente

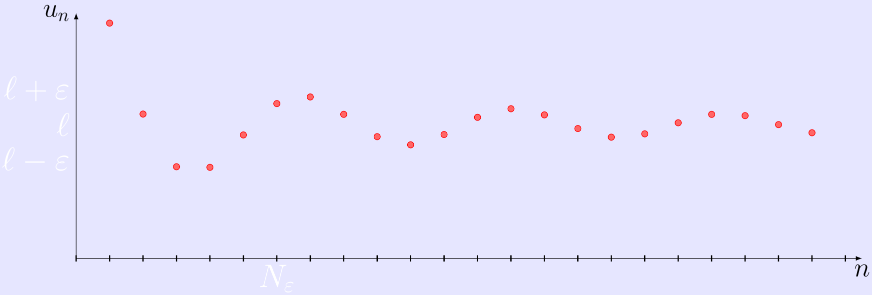
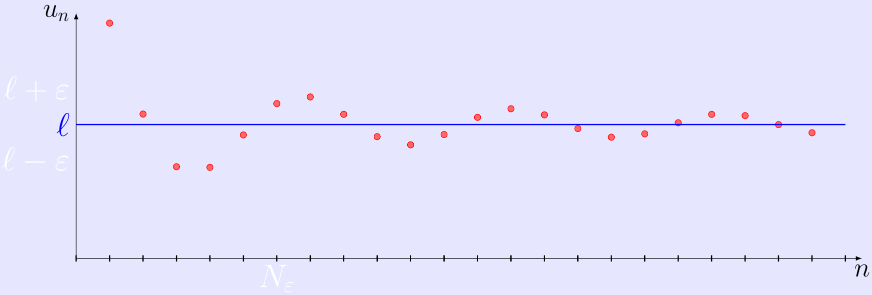
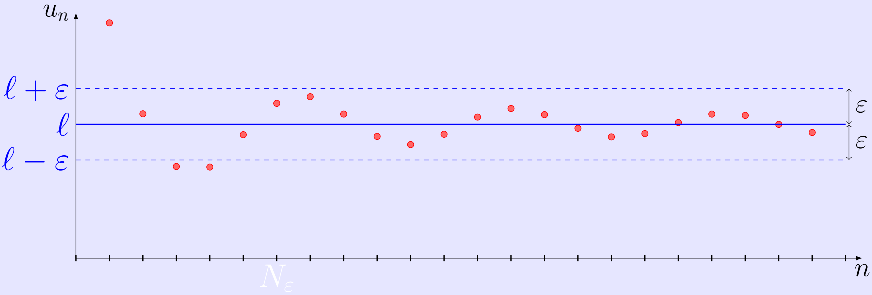


Illustration d'une suite réelle convergente



$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Illustration d'une suite réelle convergente

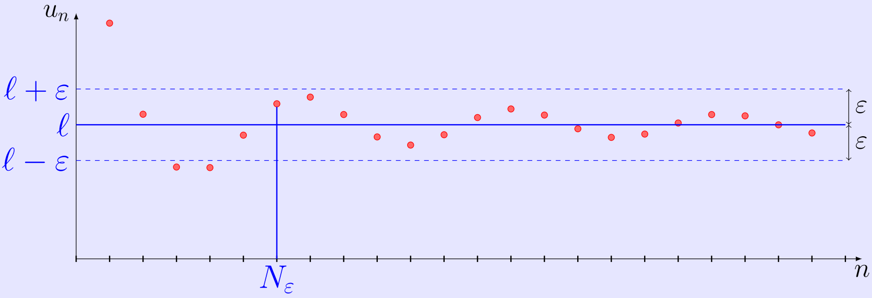


$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0,$

Illustration d'une suite réelle convergente

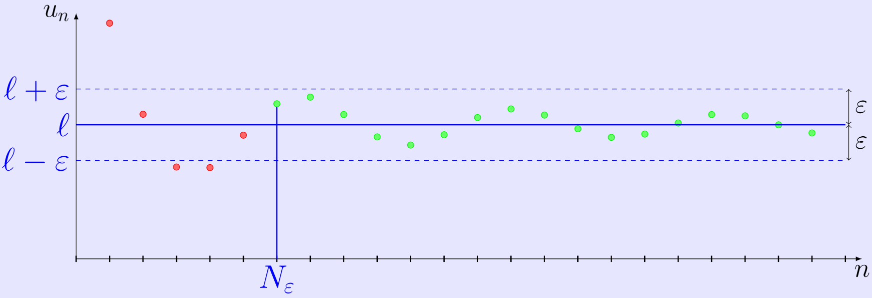


$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},$

Illustration d'une suite réelle convergente

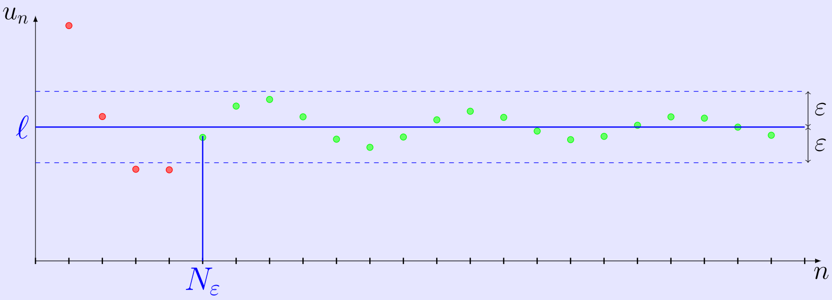


$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

$$\iff$$

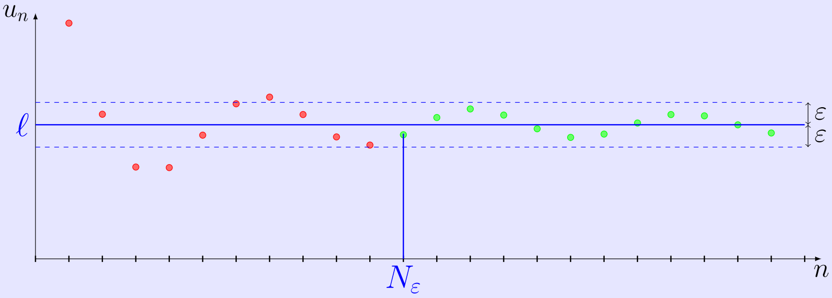
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon)$$

Illustration d'une suite réelle convergente



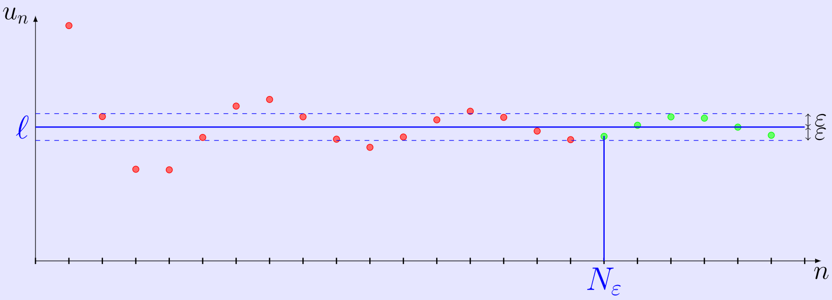
L'entier N_ε dépend naturellement de ε et il n'est pas unique.

Illustration d'une suite réelle convergente



L'entier N_ε dépend naturellement de ε et il n'est pas unique.

Illustration d'une suite réelle convergente



L'entier N_ε dépend naturellement de ε et il n'est pas unique.

Illustration d'une suite complexe convergente

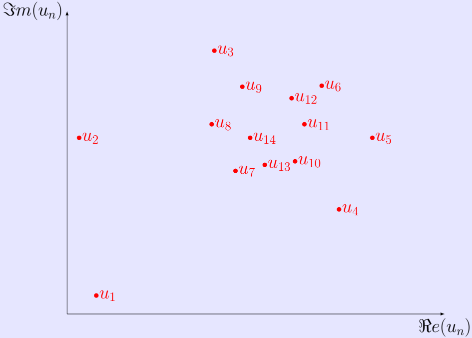
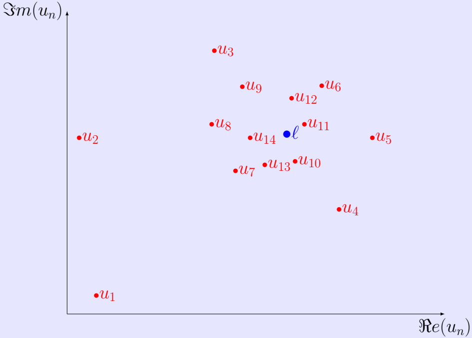
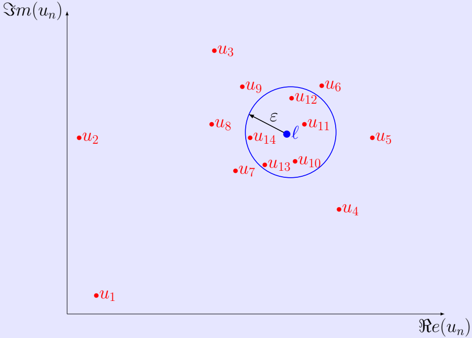


Illustration d'une suite complexe convergente



$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Illustration d'une suite complexe convergente

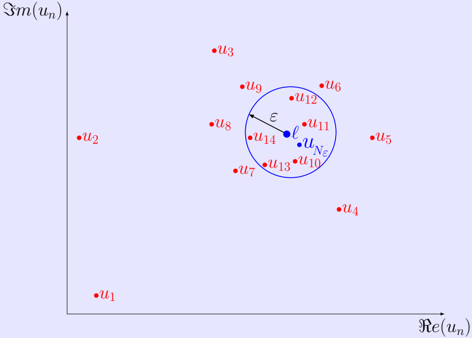


$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0,$

Illustration d'une suite complexe convergente

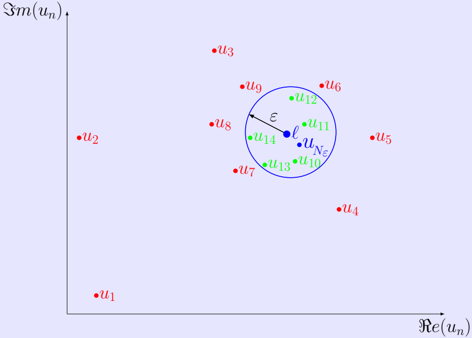


$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

$$\iff$$

$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},$

Illustration d'une suite complexe convergente

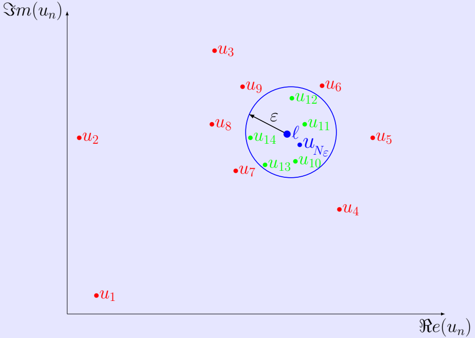


$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Illustration d'une suite complexe convergente



$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon)$$

ou encore $n > N_\varepsilon \Longrightarrow u_n \in \mathcal{D}_{\ell,\varepsilon}$

Remarque 2.4

Les effets sur les limites des **opérations usuelles** (somme, produit, quotient) sont les mêmes que ceux vus pour les limites de fonctions.

On a en particulier les mêmes formes indéterminées lorsqu'il s'agit

- de la **somme** de deux suites de limites respectives $+\infty$ et $-\infty$;
- du **produit** de deux suites de limites respectives ∞ et 0 ;
- du **quotient** de deux suites de limites ∞ ou de limites nulles toutes les deux.

On pourra être amené aussi à utiliser des **équivalents** et des **développements limités** dans les mêmes conditions que celles pour les fonctions.

Remarque 2.4

Les effets sur les limites des **opérations usuelles** (somme, produit, quotient) sont les mêmes que ceux vus pour les limites de fonctions.

On a en particulier les mêmes formes indéterminées lorsqu'il s'agit

- de la **somme** de deux suites de limites respectives $+\infty$ et $-\infty$;
- du **produit** de deux suites de limites respectives ∞ et 0 ;
- du **quotient** de deux suites de limites ∞ ou de limites nulles toutes les deux.

On pourra être amené aussi à utiliser des **équivalents** et des **développements limités** dans les mêmes conditions que celles pour les fonctions.

Proposition 2.5 (Cas des suites complexes)

1. *La suite **numérique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre (réel ou complexe) ℓ ssi la suite **réelle** $(|u_n-\ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 0**.*

Remarque 2.4

Les effets sur les limites des **opérations usuelles** (somme, produit, quotient) sont les mêmes que ceux vus pour les limites de fonctions.

On a en particulier les mêmes formes indéterminées lorsqu'il s'agit

- de la **somme** de deux suites de limites respectives $+\infty$ et $-\infty$;
- du **produit** de deux suites de limites respectives ∞ et 0 ;
- du **quotient** de deux suites de limites ∞ ou de limites nulles toutes les deux.

On pourra être amené aussi à utiliser des **équivalents** et des **développements limités** dans les mêmes conditions que celles pour les fonctions.

Proposition 2.5 (Cas des suites complexes)

1. *La suite **numérique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre (réel ou complexe) ℓ ssi la suite **réelle** $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 0**.*
2. *La suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers le complexe ℓ ssi les suites **réelles** $\left(\Re e(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\Im m(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent** vers les **réels** $\Re e(\ell)$ et $\Im m(\ell)$.*

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

1. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

1. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

1. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Théorème 2.7 (Théorème de l'encadrement)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang* $u_n \leqslant v_n$.

1. *Si les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2.7 (Théorème de l'encadrement)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang* $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exemple 2.8

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

1. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Théorème 2.7 (Théorème de l'encadrement)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

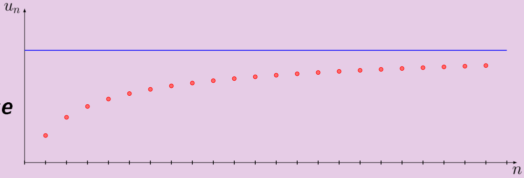
Exemple 2.8

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, puis $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

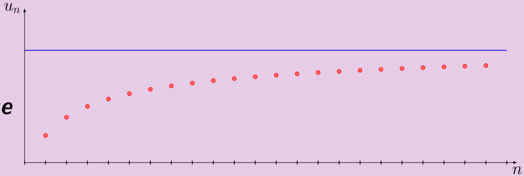
Proposition 2.9 (Monotonie et convergence)

1. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et majorée*** *est* ***convergente.***
2. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et minorée*** *est* ***convergente.***

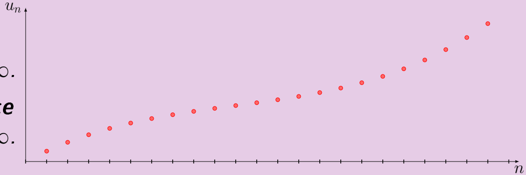


Proposition 2.9 (Monotonie et convergence)

1. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et majorée*** *est* ***convergente.***
2. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et minorée*** *est* ***convergente.***

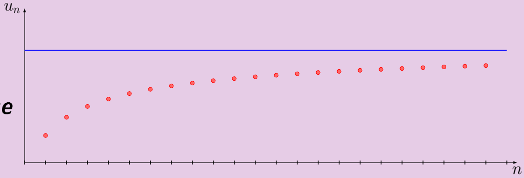


3. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et non majorée*** *tend vers* $+\infty$.
4. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et non minorée*** *tend vers* $-\infty$.

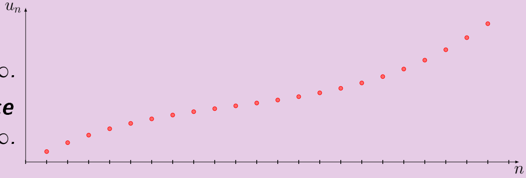


Proposition 2.9 (Monotonie et convergence)

1. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et majorée*** *est* ***convergente.***
2. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et minorée*** *est* ***convergente.***



3. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et non majorée*** *tend vers* $+\infty$.
4. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et non minorée*** *tend vers* $-\infty$.



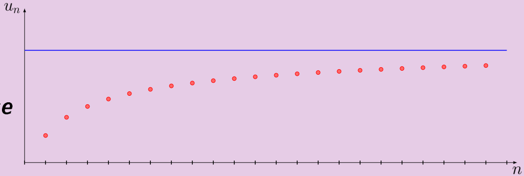
Proposition 2.10 (Suites et fonctions)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de l'intervalle* I*. Soit* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *et* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

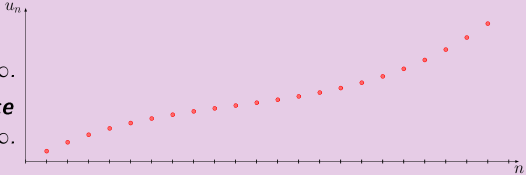
1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Proposition 2.9 (Monotonie et convergence)

1. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et majorée*** *est* ***convergente.***
2. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et minorée*** *est* ***convergente.***



3. *Toute suite réelle* ***croissante*** ***et non majorée*** *tend vers* $+\infty$.
4. *Toute suite réelle* ***décroissante*** ***et non minorée*** *tend vers* $-\infty$.



Proposition 2.10 (Suites et fonctions)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de l'intervalle* I. *Soit* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *et* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *et si* f *est* ***continue*** *en* a *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Sommaire

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ.***

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ.***
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ.***

Définition 3.1 (Suites extraites)

On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite extraite*** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$* ***strictement croissante*** *telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge vers ℓ****, alors* ***toute suite extraite*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge vers ℓ.***
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$* ***convergent vers la même limite ℓ****, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge vers ℓ.***

Exemple 3.3

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*

Exemple 3.3

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
   On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*

Exemple 3.3

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
   On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.
   Les limites de deux suites extraites étant **différentes**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*

Exemple 3.3

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
   On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.
   Les limites de deux suites extraites étant **différentes**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*

Exemple 3.3

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
   On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.
   Les limites de deux suites extraites étant **différentes**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   On a $v_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = 1$

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*

Exemple 3.3

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
   On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.
   Les limites de deux suites extraites étant **différentes**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   On a $v_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = 1$
   ce qui entraîne la **convergence** de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 1.

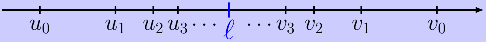
Sommaire

4. Suites adjacentes

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

Deux suites ***réelles*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites* ***adjacentes*** *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est* ***croissante*** *et l'autre est* ***décroissante*** *;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$

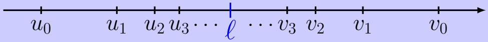


4. Suites adjacentes

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

*Deux suites **réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$



Théorème 4.2

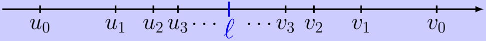
*Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes** de **même limite.***

4. Suites adjacentes

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

*Deux suites **réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$



Théorème 4.2

*Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes** de **même limite.***

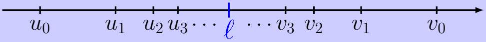
Exemple 4.3 (L'exponentielle)

Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

Deux suites ***réelles*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites* ***adjacentes*** *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est* ***croissante*** *et l'autre est* ***décroissante*** *;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$



Théorème 4.2

Deux suites réelles ***adjacentes*** *sont* ***convergentes*** *de* ***même limite.***

Exemple 4.3 (L'exponentielle)

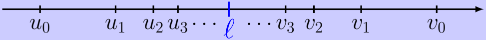
Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

*Deux suites **réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$



Théorème 4.2

*Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes** de **même limite.***

Exemple 4.3 (L'exponentielle)

Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

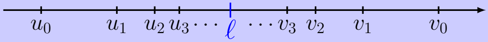
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

4. Suites adjacentes

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

*Deux suites **réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$



Théorème 4.2

*Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes** de **même limite.***

Exemple 4.3 (L'exponentielle)

Soit $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

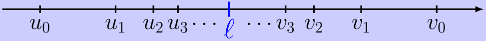
- On a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
- On a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

*Deux suites **réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$



Théorème 4.2

*Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes** de **même limite.***

Exemple 4.3 (L'exponentielle)

Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.

On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}\ldots$

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes.**

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes.**

On démontre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{4}$...

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes.**

On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{4}\ldots$

---

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes.**

On démontre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{4}\ldots$

---

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$.
     Donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.

On démontre que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{4}\ldots$

---

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
   Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$.
     Donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \frac{1}{2n+1}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

❶ Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$. Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes.**

On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{4}$...

---

❷ Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$. Donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante.**
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \frac{1}{2n+1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes** de même limite. On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.

On démontre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{4}$...

---

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$.
     Donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \frac{1}{2n+1}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

   Ainsi, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes** de même limite. On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.

   On démontre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln 2$...

Sommaire

Définition 5.1 (Suite récurrente)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I.
On étudie dans cette partie les suites réelles définies par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***une suite récurrente de fonction associée f.***

Définition 5.1 (Suite récurrente)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I.
On étudie dans cette partie les suites réelles définies par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***une suite récurrente de fonction associée f****.*

Remarque 5.2 (Cohérence)

La condition $f(I) \subset I$ assure que cette suite est bien définie : en effet, partant de $u_0 \in I$, on peut définir $u_1 = f(u_0)$. L'hypothèse entraîne $u_1 \in I$; on peut donc définir $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.

Définition 5.1 (Suite récurrente)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I.
On étudie dans cette partie les suites réelles définies par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***une suite récurrente de fonction associée f****.*

Remarque 5.2 (Cohérence)

La condition $f(I) \subset I$ assure que cette suite est bien définie : en effet, partant de $u_0 \in I$, on peut définir $u_1 = f(u_0)$. L'hypothèse entraîne $u_1 \in I$; on peut donc définir $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.

Exemple 5.3 (Suites arithmétiques/géométriques)

1. Une suite **arithmétique** de raison r est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \longmapsto x + r$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.1 (Suite récurrente)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I.
On étudie dans cette partie les suites réelles définies par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***une suite récurrente de fonction associée f****.*

Remarque 5.2 (Cohérence)

La condition $f(I) \subset I$ assure que cette suite est bien définie : en effet, partant de $u_0 \in I$, on peut définir $u_1 = f(u_0)$. L'hypothèse entraîne $u_1 \in I$; on peut donc définir $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.

Exemple 5.3 (Suites arithmétiques/géométriques)

1. Une suite **arithmétique** de raison r est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \longmapsto x + r$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Une suite **géométrique** de raison q est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \longmapsto qx$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

1. *Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :*
   - *si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;*
   - *si $u_1 \leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

1. *Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :*
   - *si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;*
   - *si $u_1 \leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.*
2. *Si l'application f est **décroissante** sur I alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones** de **sens de variation opposés**.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

1. *Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :*
   - *si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;*
   - *si $u_1 \leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.*
2. *Si l'application f est **décroissante** sur I alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones** de **sens de variation opposés**.*

Remarque 5.5

Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux pour fonction associée $f \circ f$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

1. *Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :*
   - *si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;*
   - *si $u_1 \leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.*
2. *Si l'application f est **décroissante** sur I alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones** de **sens de variation opposés**.*

Remarque 5.5

Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux pour fonction associée $f \circ f$.

1. Lorsque l'application f est **décroissante** sur I, l'application $f \circ f$ est **croissante**, ce qui justifie la **monotonie** des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

1. *Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :*
   - *si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;*
   - *si $u_1 \leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.*
2. *Si l'application f est **décroissante** sur I alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones** de **sens de variation opposés**.*

Remarque 5.5

Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux pour fonction associée $f \circ f$.

1. Lorsque l'application f est **décroissante** sur I, l'application $f \circ f$ est **croissante**, ce qui justifie la **monotonie** des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. D'autre part, ces suites sont reliées par $u_{2n+1} = f(u_{2n})$. L'application f étant **décroissante**, on voit que les sens de variation sont opposés.

Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*

Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

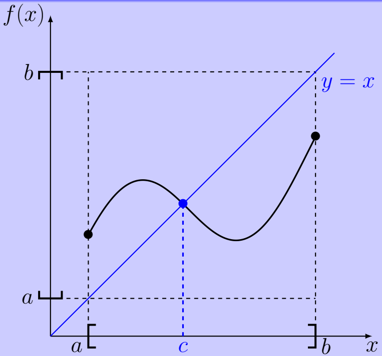
*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*
*Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.*

Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*
*Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.*

*Géométriquement les **points fixes** de f sont les abscisses des **points d'intersection** de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.*

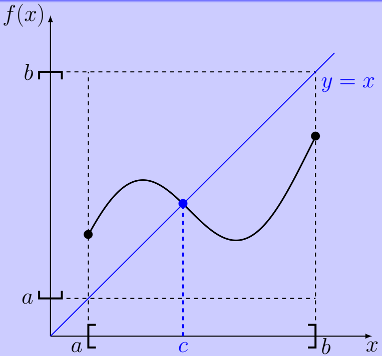


Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*
*Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.*

*Géométriquement les **points fixes** de f sont les abscisses des **points d'intersection** de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.*



Proposition 5.7 (Continuité et point fixe)

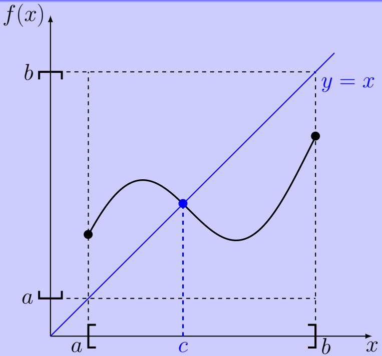
1. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **continue** alors f admet au moins un **point fixe**.*

Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*
*Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.*

*Géométriquement les **points fixes** de f sont les abscisses des **points d'intersection** de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.*



Proposition 5.7 (Continuité et point fixe)

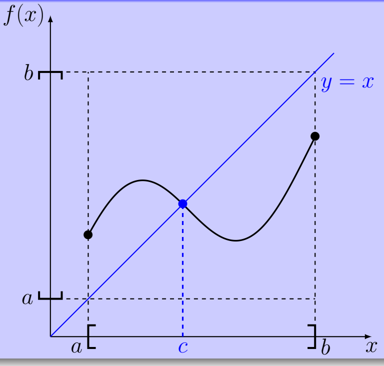
1. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **continue** alors f admet au moins un **point fixe**.*
2. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **croissante** alors f admet au moins un **point fixe**.*

Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

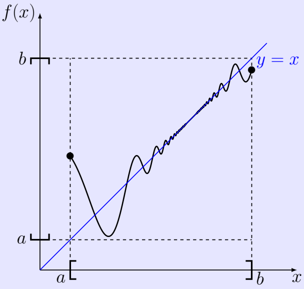
*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*
*Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.*

*Géométriquement les **points fixes** de f sont les abscisses des **points d'intersection** de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.*

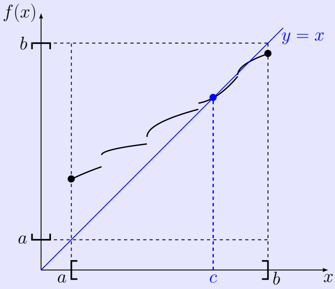


Proposition 5.7 (Continuité et point fixe)

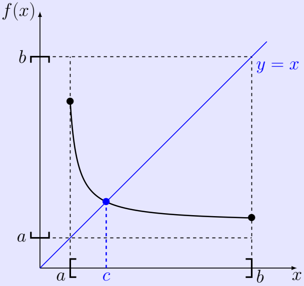
1. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **continue** alors f admet au moins un **point fixe**.*
2. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **croissante** alors f admet au moins un **point fixe**.*
3. *Soit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonction associée f.*
   *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\ell \in I$ et si f est **continue** sur I alors ℓ est un **point fixe** de f.*



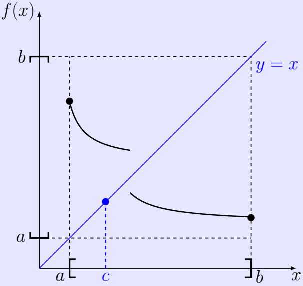
Une fonction peut avoir
une infinité de points fixes



Une fonction croissante
a au moins un point fixe



Une fonction décroissante continue
a un unique point fixe



Une fonction discontinue
peut ne pas avoir de point fixe

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est* ***lipschitzienne*** *de rapport k sur I si*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k} \in \mathbf{[0, 1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k} \in \mathbf{[0,1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I.*

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est* ***lipschitzienne*** *de rapport k sur I si*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k} \in [0,1[$ et f est* ***lipschitzienne*** *de rapport k sur I, on dit que f est* ***k-contractante*** *sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application* ***lipschitzienne*** *sur I est* ***continue*** *sur I.*
2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$* ***continue*** *sur $[a,b]$,* ***dérivable*** *sur $]a,b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $\left|f'(x)\right| \leqslant k$.*

   Alors f est ***k-lipschitzienne*** *sur $[a,b]$.*

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k \in [0,1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I.*
2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $\left|f'(x)\right| \leqslant k$.*

   *Alors f est **k-lipschitzienne** sur $[a,b]$.*

Exemple 5.10 (Racine carrée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$.

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k \in [0,1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I.*
2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $\left|f'(x)\right| \leqslant k$.*

   *Alors f est **k-lipschitzienne** sur $[a,b]$.*

Exemple 5.10 (Racine carrée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k \in [0,1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I.*
2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $\left|f'(x)\right| \leqslant k$.*

   *Alors f est **k-lipschitzienne** sur $[a,b]$.*

Exemple 5.10 (Racine carrée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a $\sup\limits_{x\in[1/4,1]} |f'(x)| = 2$, $\sup\limits_{x\in[4,+\infty[} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ et $\sup\limits_{x\in]0,1]} |f'(x)| = +\infty$.

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k \in [0,1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I.*
2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $\left|f'(x)\right| \leqslant k$.*

   *Alors f est **k-lipschitzienne** sur $[a,b]$.*

Exemple 5.10 (Racine carrée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a $\sup\limits_{x\in[1/4,1]} |f'(x)| = 2$, $\sup\limits_{x\in[4,+\infty[} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ et $\sup\limits_{x\in]0,1]} |f'(x)| = +\infty$.

Donc f est **lipschitzienne** de rapport 2 sur $[1/4,1]$, **contractante** de rapport $1/2$ sur $[4,+\infty[$ mais **pas lipschitzienne** sur $[0,1]$.

Sous certaines conditions, il est possible de conclure à la convergence d'une suite récurrente dont la limite sera l'unique point fixe de la fonction associée.
Il s'agit du **théorème du point fixe** :

Sous certaines conditions, il est possible de conclure à la convergence d'une suite récurrente dont la limite sera l'unique point fixe de la fonction associée.
Il s'agit du **théorème du point fixe** :

Théorème 5.11 (Théorème du point fixe)

*Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction k-**contractante.** Alors :*

1. *la fonction f admet un **unique point fixe** ℓ ;*

Sous certaines conditions, il est possible de conclure à la convergence d'une suite récurrente dont la limite sera l'unique point fixe de la fonction associée.
Il s'agit du **théorème du point fixe** :

Théorème 5.11 (Théorème du point fixe)

*Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction k-**contractante.** Alors :*

1. *la fonction f admet un **unique point fixe** ℓ ;*
2. *toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonction associée f **converge** vers ℓ quel que soit son premier terme $u_0 \in [a,b]$ et l'on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n - \ell| \leqslant k^n(b-a) \quad \text{et aussi} \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

Sous certaines conditions, il est possible de conclure à la convergence d'une suite récurrente dont la limite sera l'unique point fixe de la fonction associée.
Il s'agit du **théorème du point fixe** :

Théorème 5.11 (Théorème du point fixe)

*Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction k-**contractante.** Alors :*

1. *la fonction f admet un **unique point fixe** ℓ ;*
2. *toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonction associée f **converge** vers ℓ quel que soit son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et l'on a*

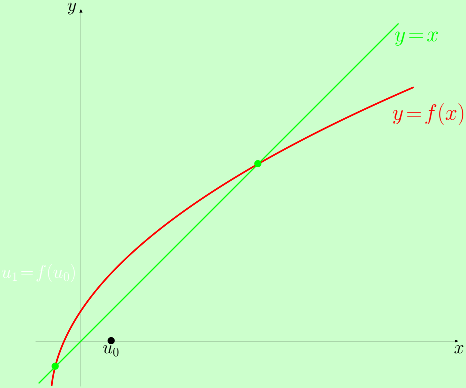
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n(b-a) \quad \text{et aussi} \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

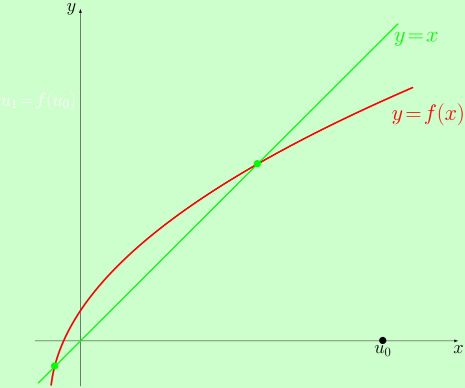
Remarque 5.12

Le théorème du point fixe reste vrai si on remplace l'intervalle fermé borné $[a, b]$ par un intervalle fermé non borné, i.e. du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$ (ces intervalles sont appelés des **fermés** de $\mathbb{R}$).

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$



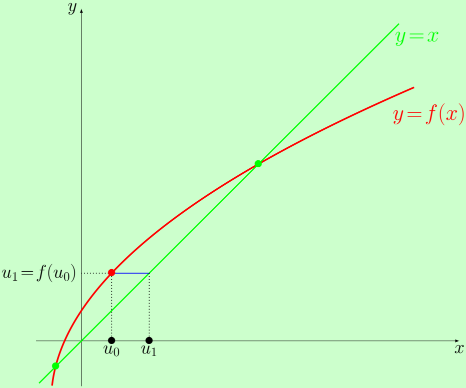


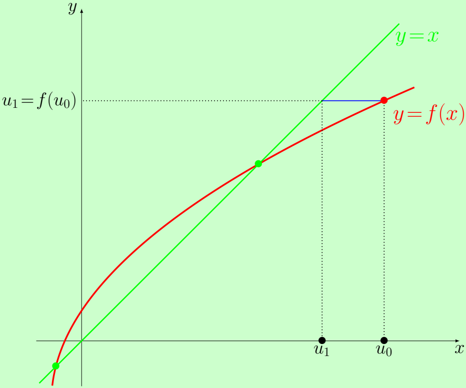
Partant de $u_0 = 1$:

Partant de $u_0 = 10$:

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$





Partant de $u_0 = 1$:

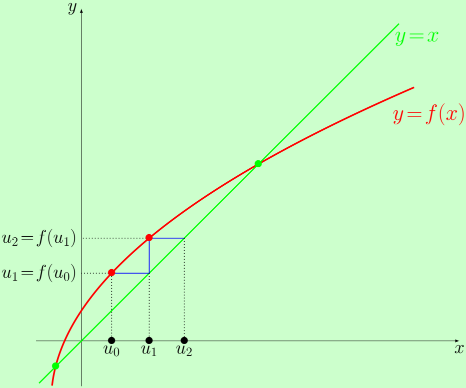
$u_0 < u_1$

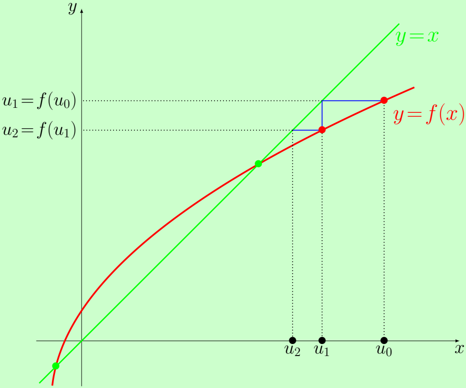
Partant de $u_0 = 10$:

$u_0 > u_1$

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$





Partant de $u_0 = 1$:

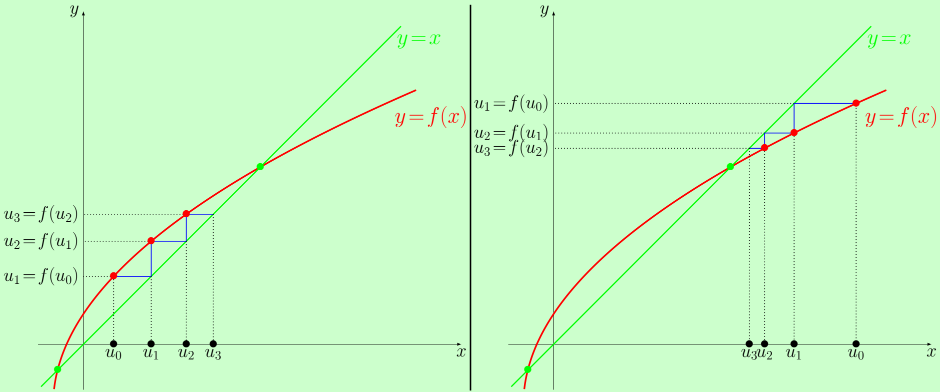
$u_0 < u_1 < u_2$

Partant de $u_0 = 10$:

$u_0 > u_1 > u_2$

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$



Partant de $u_0 = 1$:

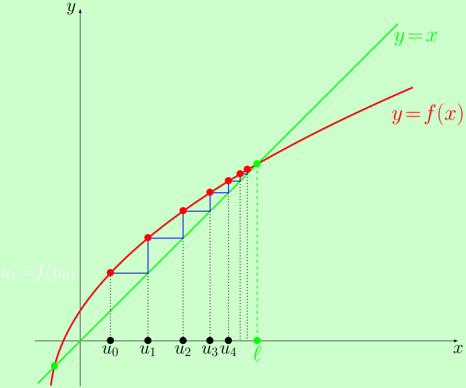
$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

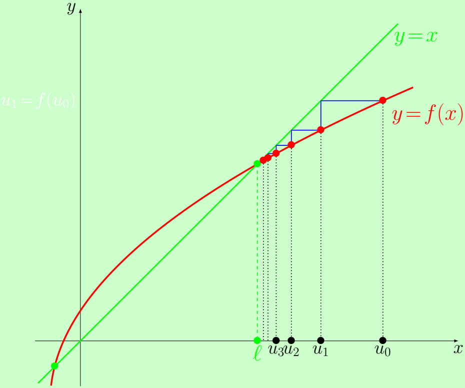
Partant de $u_0 = 10$:

$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$





Partant de $u_0 = 1$:

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < \ell$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**

et **converge** vers $\ell = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

Partant de $u_0 = 10$:

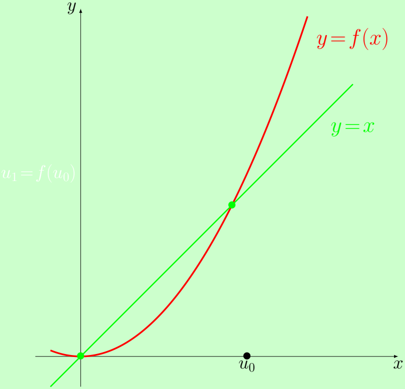
$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > \ell$

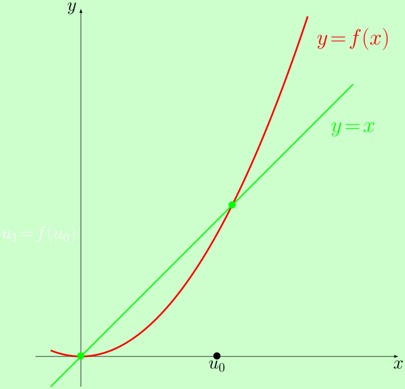
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**

et **converge** vers $\ell = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



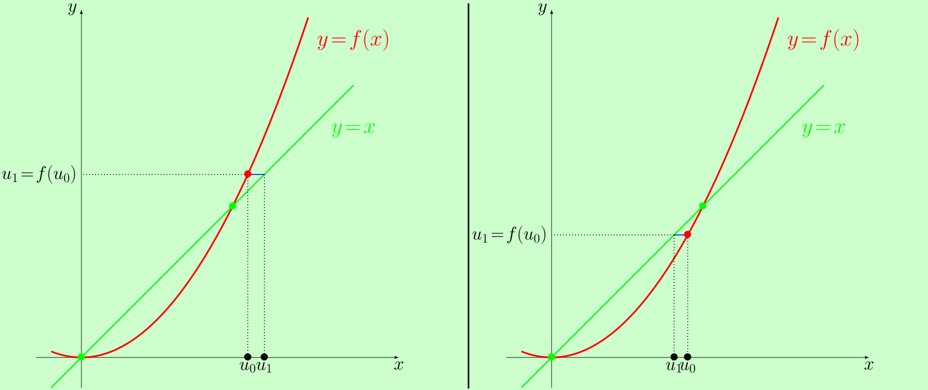


Partant de $u_0 = 5,5$:

Partant de $u_0 = 4,5$:

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



Partant de $u_0 = 5,5$:

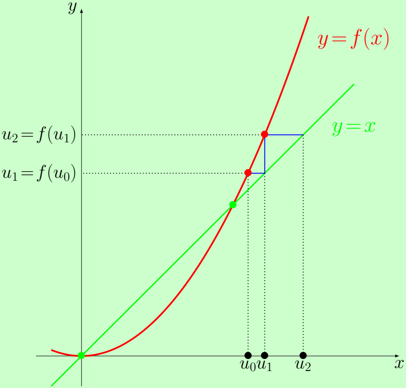
$u_0 < u_1$

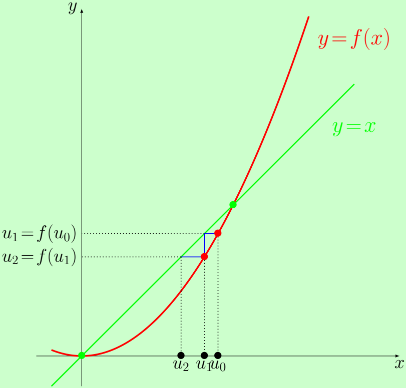
Partant de $u_0 = 4,5$:

$u_0 > u_1$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$





Partant de $u_0 = 5,5$:

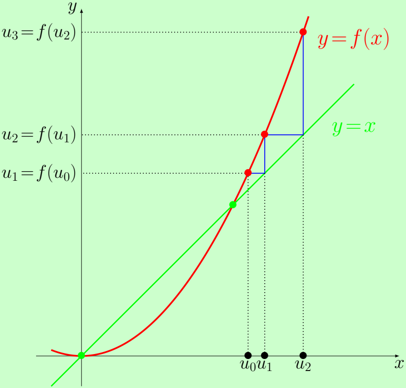
$u_0 < u_1 < u_2$

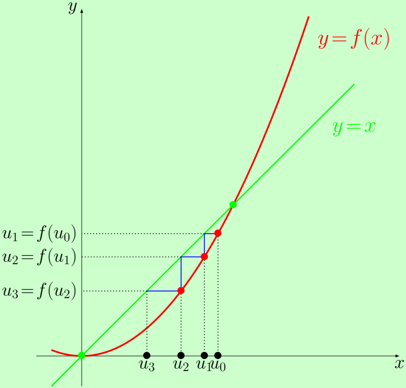
Partant de $u_0 = 4,5$:

$u_0 > u_1 > u_2$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$





Partant de $u_0 = 5,5$:

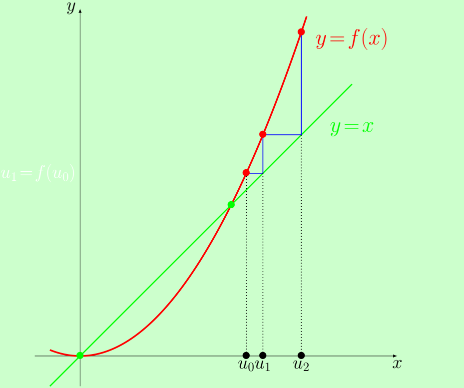
$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

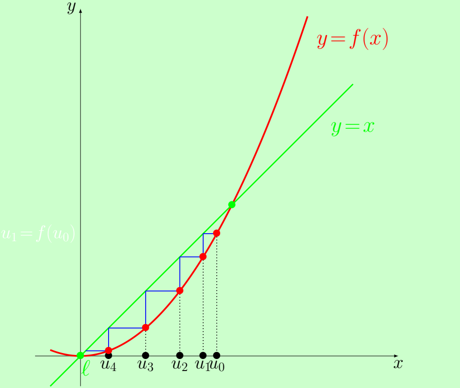
Partant de $u_0 = 4,5$:

$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$





Partant de $u_0 = 5,5$:

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \cdots$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**
et **diverge** vers $+\infty$

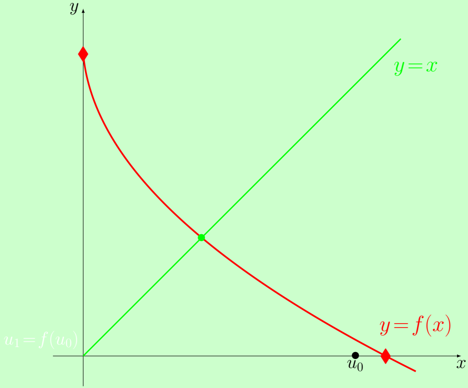
Partant de $u_0 = 4,5$:

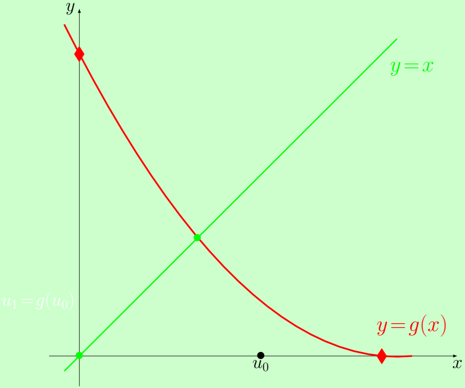
$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > \ell$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**
et **converge** vers $\ell = 0$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right)$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$

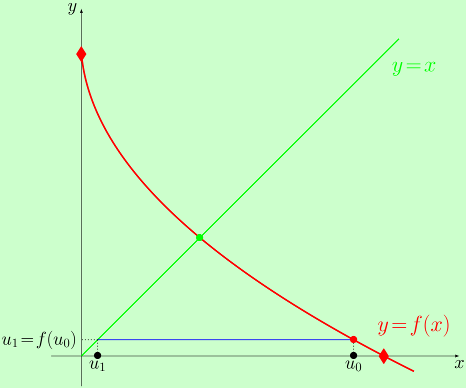


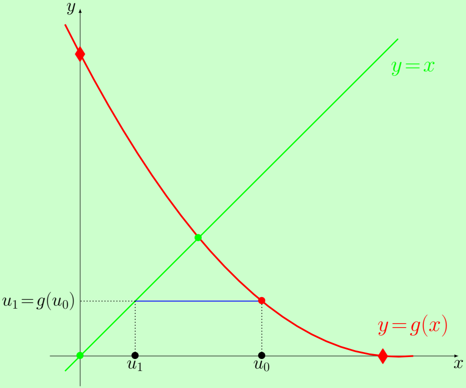


Partant de $u_0 = 9$: $\qquad$ **Partant de $u_0 = 6$:**

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right)$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$

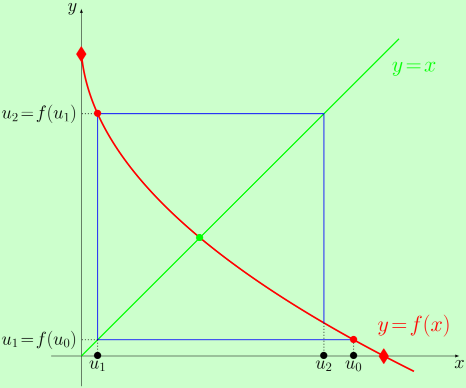


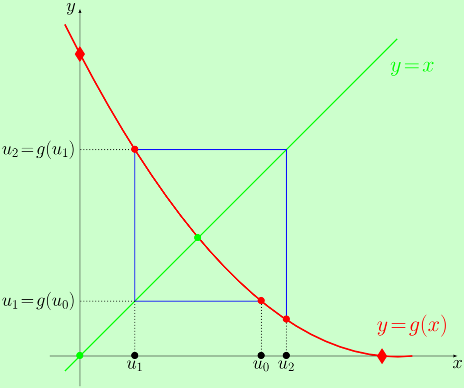


Partant de $u_0 = 9$: $\qquad$ **Partant de $u_0 = 6$:**

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right)$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$





Partant de $u_0 = 9$:

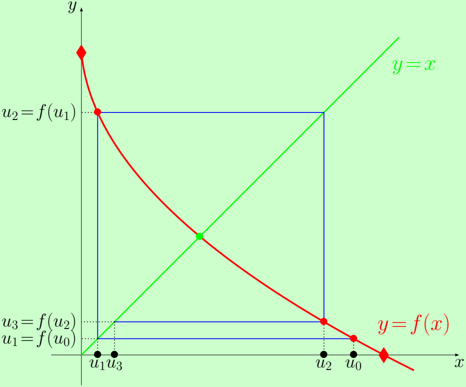
$u_0 > u_2$

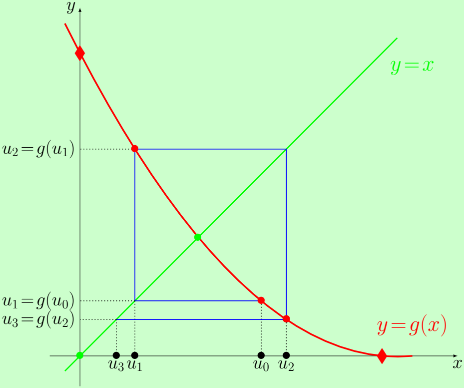
Partant de $u_0 = 6$:

$u_0 < u_2$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\right)$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$





Partant de $u_0 = 9$:

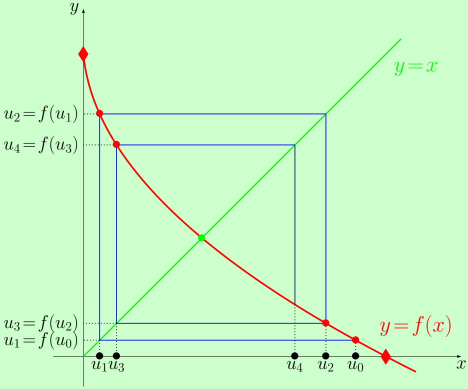
$u_0 > u_2$ $\qquad$ $u_1 < u_3$

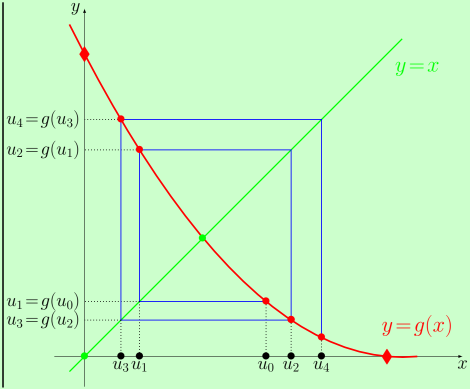
Partant de $u_0 = 6$:

$u_0 < u_2$ $\qquad$ $u_1 > u_3$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\right)$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$





Partant de $u_0 = 9$:

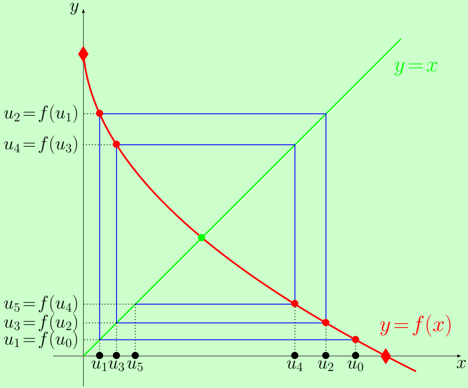
$u_0 > u_2 > u_4$ $\qquad$ $u_1 < u_3$

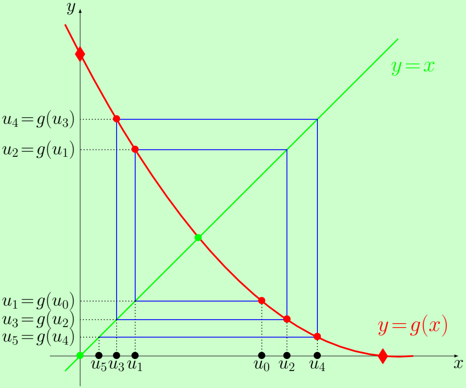
Partant de $u_0 = 6$:

$u_0 < u_2 < u_4$ $\qquad$ $u_1 > u_3$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right) \qquad g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$$





Partant de $u_0 = 9$:

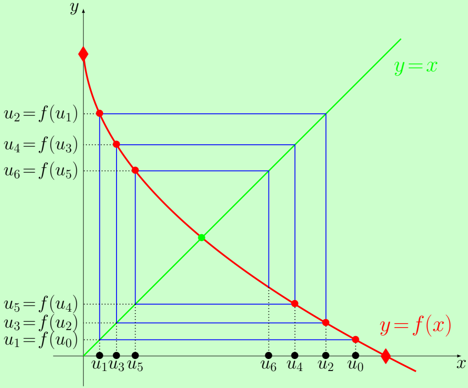
$u_0 > u_2 > u_4$ $\qquad$ $u_1 < u_3 < u_5$

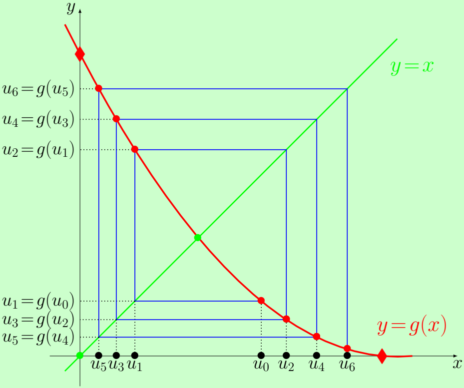
Partant de $u_0 = 6$:

$u_0 < u_2 < u_4$ $\qquad$ $u_1 > u_3 > u_5$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right) \qquad g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$$





Partant de $u_0 = 9$:

$u_0 > u_2 > u_4 > u_6$ $\qquad$ $u_1 < u_3 < u_5$

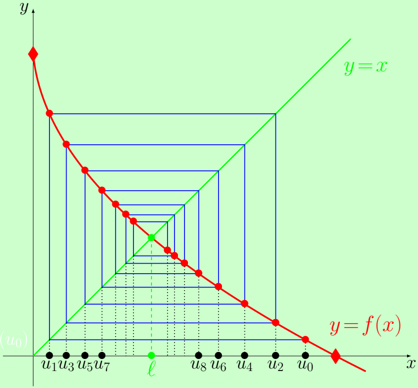
Partant de $u_0 = 6$:

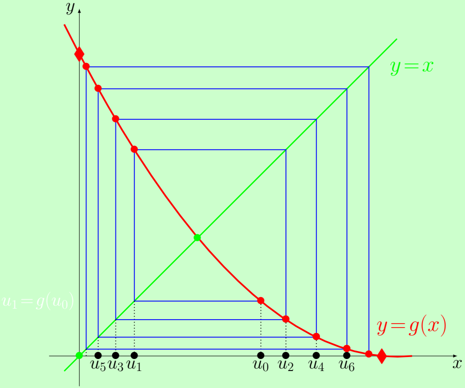
$u_0 < u_2 < u_4 < u_6$ $\qquad$ $u_1 > u_3 > u_5$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right)$

$g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$





Partant de $u_0 = 9$:

$u_0 > u_2 > u_4 > u_6 > \cdots \qquad u_1 < u_3 < u_5 < \cdots$

La suite $(u_n)_{2n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**

La suite $(u_n)_{2n+1\in\mathbb{N}}$ est **croissante**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell = 16 - \sqrt{146}$

Partant de $u_0 = 6$:

$u_0 < u_2 < u_4 < u_6 < \cdots \qquad u_1 > u_3 > u_5 > \cdots$

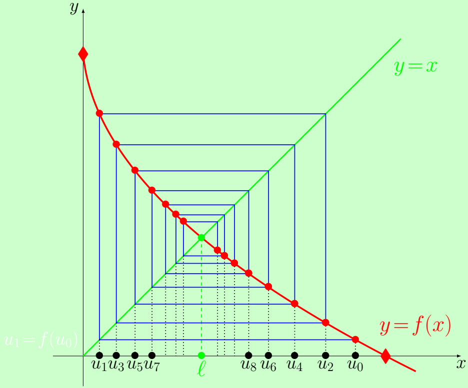
La suite $(u_n)_{2n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 1**

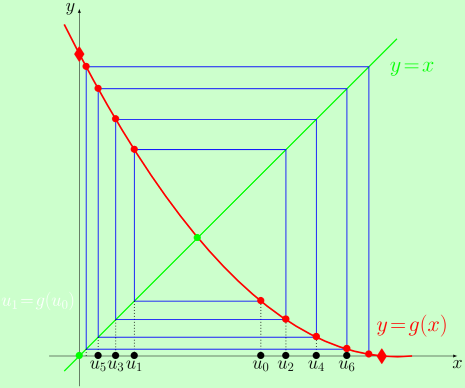
La suite $(u_n)_{2n+1\in\mathbb{N}}$ **converge vers 0**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge**

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\,\right) \qquad g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$$





Remarque : on a

- $f(0) = 10$ et $f(10) = 0$ ce qui entraîne que 0 et 10 sont des **points fixes** de $f \circ f$...
- $g(0) = 10$ et $g(10) = 0$ ce qui entraîne que 0 et 10 sont des **points fixes** de $g \circ g$...
- $g = f^{-1}$ sur $[0, 10]$ ce qui entraîne que f et g ont les mêmes **points fixes**...

Sommaire

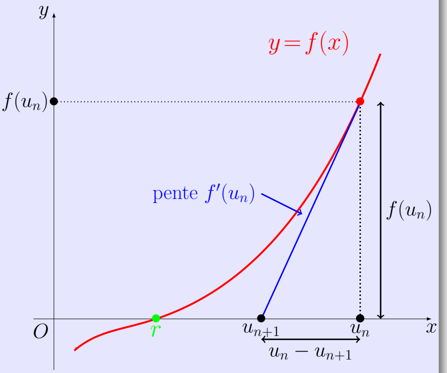
On considère une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

On cherche alors à approcher une éventuelle solution r de cette équation (appelée un **zéro de *f***) à l'aide d'une suite récurrente que l'on construit de la manière suivante :

On considère une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

On cherche alors à approcher une éventuelle solution r de cette équation (appelée un **zéro de f**) à l'aide d'une suite récurrente que l'on construit de la manière suivante :

On fixe $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_{n+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox) de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n.



$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

6. Méthode de Newton

a) Principe de la méthode

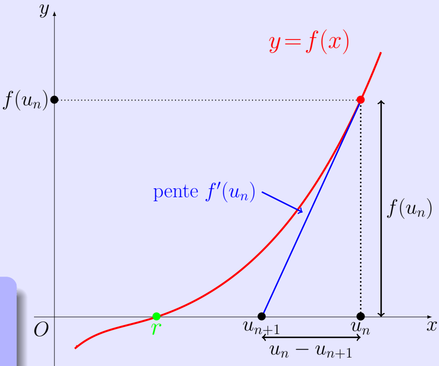
On considère une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

On cherche alors à approcher une éventuelle solution r de cette équation (appelée un **zéro de f**) à l'aide d'une suite récurrente que l'on construit de la manière suivante :

On fixe $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_{n+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox) de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n.

Pour que cette construction itérative fonctionne, il faut faire des hypothèses sur la fonction f :

- H_1 : f est **dérivable** sur $[a, b]$;
- H_2 : f' **ne s'annule pas** sur $[a, b]$;
- H_3 : pour tout $x \in [a, b]$, $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \in [a, b]$.



$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Une fois la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie avec les hypothèses sur f, il reste à s'assurer que cette suite converge bien vers un zéro de la fonction f. Là encore, il va falloir des hypothèses supplémentaires :

Une fois la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie avec les hypothèses sur f, il reste à s'assurer que cette suite converge bien vers un zéro de la fonction f. Là encore, il va falloir des hypothèses supplémentaires :

Théorème 6.1 (Méthode de Newton)

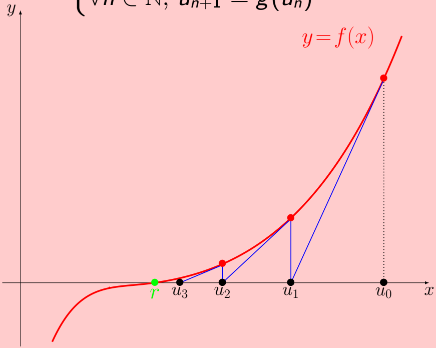
- *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les hypothèses* H_1, H_2, H_3.
- *Soit* $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *la fonction définie par* $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite récurrente définie par :* $\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

Une fois la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie avec les hypothèses sur f, il reste à s'assurer que cette suite converge bien vers un zéro de la fonction f. Là encore, il va falloir des hypothèses supplémentaires :

Théorème 6.1 (Méthode de Newton)

- *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les hypothèses* H_1, H_2, H_3.
- *Soit* $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *la fonction définie par* $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite récurrente définie par :* $\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

Si la fonction g est ***contractante*** *sur $[a,b]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers l'unique point fixe de g, qui est aussi l'****unique zéro*** *de f sur $[a,b]$.*



Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^{e} itération de la méthode de Newton et le zéro de f. En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^{e} itération de la méthode de Newton et le zéro de f. En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Théorème 6.2 (Approximation quadratique)

- *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les hypothèses* H_1, H_2, H_3.
- *Supposons de plus* f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a,b]$.

Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^{e} itération de la méthode de Newton et le zéro de f. En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Théorème 6.2 (Approximation quadratique)

- *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les hypothèses* H_1, H_2, H_3.
- *Supposons de plus* f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a, b]$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite construite par la méthode de Newton pour approcher un zéro* r, *alors il existe une constante* C *(qui dépend de* f*) telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r| \leqslant \frac{1}{C}\left(C|u_0 - r|\right)^{2^n}.$$

Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^{e} itération de la méthode de Newton et le zéro de f. En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Théorème 6.2 (Approximation quadratique)

- *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les hypothèses* H_1, H_2, H_3.
- *Supposons de plus* f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a, b]$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite construite par la méthode de Newton pour approcher un zéro* r*, alors il existe une constante* C *(qui dépend de* f*) telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r| \leqslant \frac{1}{C}\left(C|u_0 - r|\right)^{2^n}.$$

Plus précisément, on peut choisir $C = \dfrac{M}{2m}$ *où* $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ *et* $m = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$.

Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^e itération de la méthode de Newton et le zéro de f. En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Théorème 6.2 (Approximation quadratique)

- *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses* H_1, H_2, H_3.
- *Supposons de plus f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite construite par la méthode de Newton pour approcher un zéro r, alors il existe une constante C (qui dépend de f) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r| \leqslant \frac{1}{C}\left(C|u_0 - r|\right)^{2^n}.$$

Plus précisément, on peut choisir $C = \dfrac{M}{2m}$ où $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$.

Ce qu'il faut surtout retenir de cette inégalité, c'est que la convergence de la méthode de Newton peut être très rapide, et que si $C|u_0 - r| < 1$ (c'est-à-dire qu'on démarre la méthode suffisamment proche de r), la convergence est **quadratique**, autrement dit, le nombre de décimales exactes **double** approximativement à chaque étape.

Et pour aller plus loin...

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Suites récurrentes

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Série de Riemann

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Les sucres du Grand Khong

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/les_sucres_du_grand_Khong.pdf

Notions à retenir

- Suites numériques
  - ⋆ Notion de convergence des suites réelles ou complexes ; cas de la convergence monotone
  - ⋆ Suites extraites
  - ⋆ Suites adjacentes
  - ⋆ Suites récurrentes : cas d'une fonction itérative monotone ; théorème du point fixe
  - ⋆ Méthode de Newton