INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Déterminants

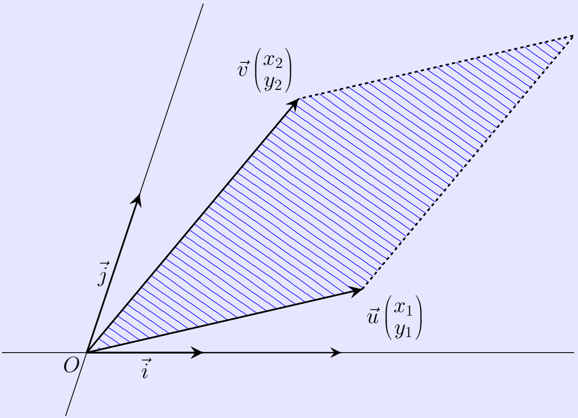
Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

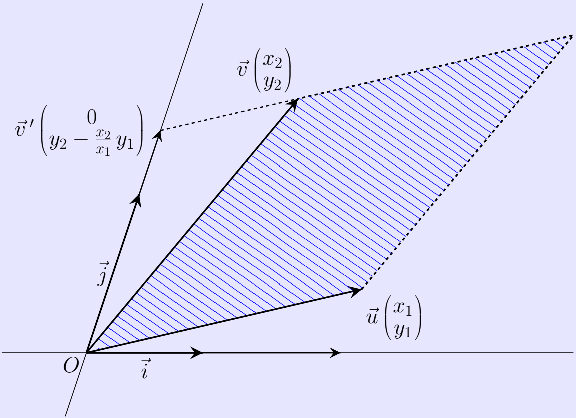
Sommaire

Sommaire

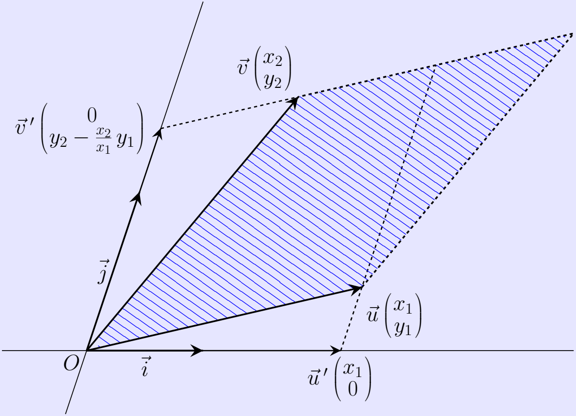
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



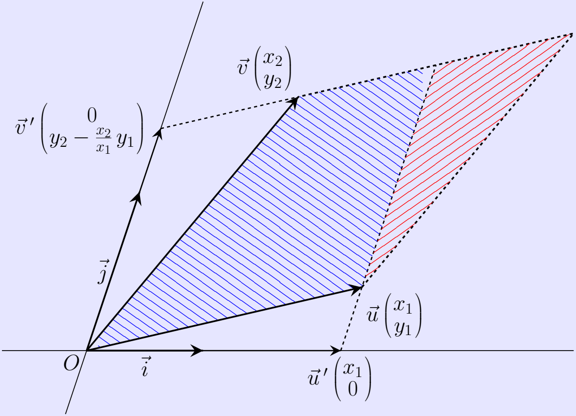
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



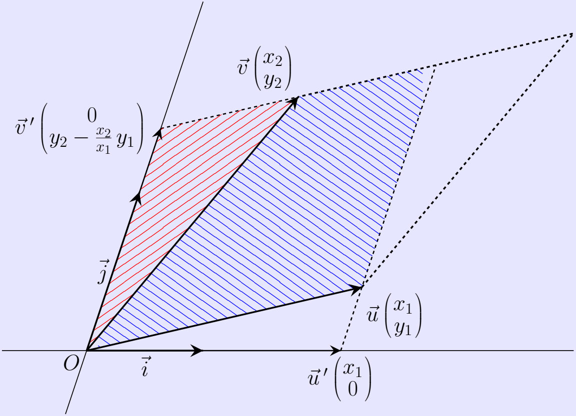
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



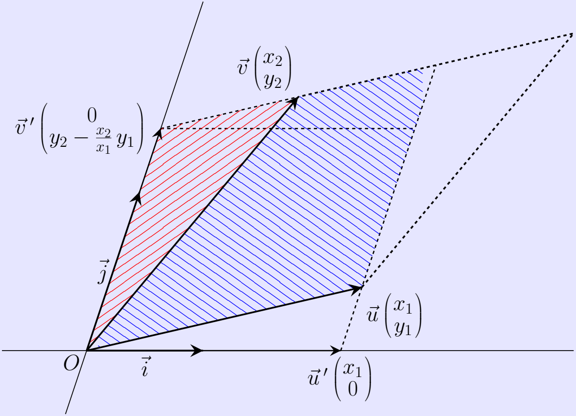
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



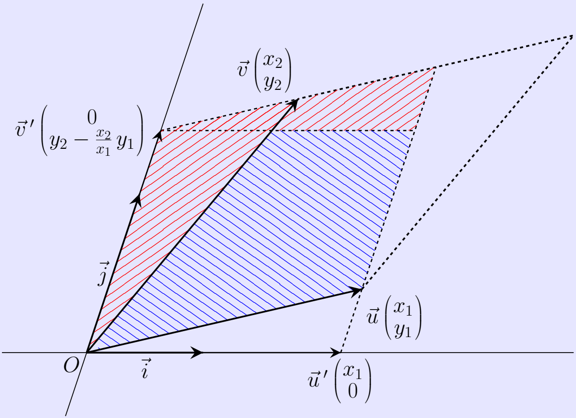
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



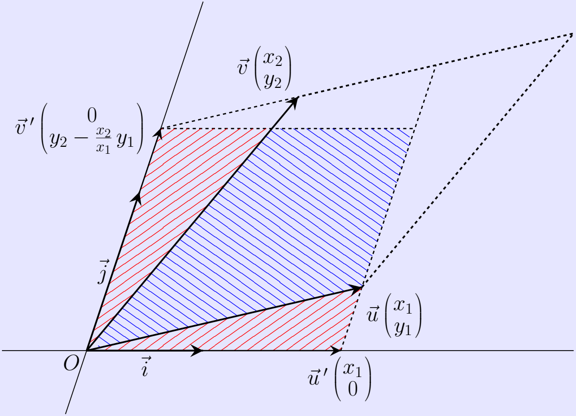
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



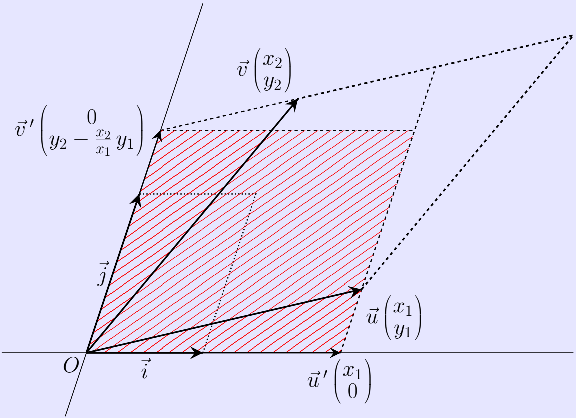
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



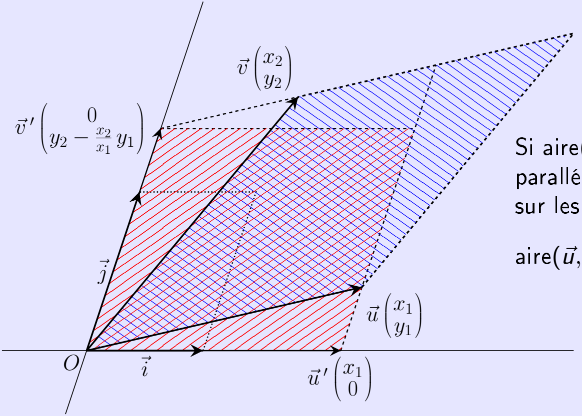
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



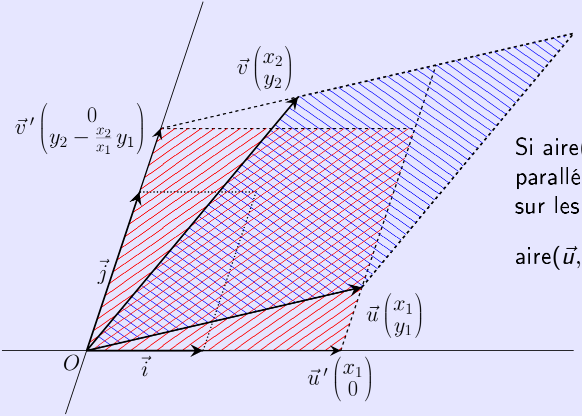
Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



Si aire$(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\vec{u}, \vec{v}) &= \text{aire}(\vec{u'}, \vec{v'}) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \text{aire}(\vec{i}, \vec{j}) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



Si $\text{aire}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\vec{u}, \vec{v}) &= \text{aire}(\vec{u'}, \vec{v'}) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \text{aire}(\vec{i}, \vec{j}) \end{aligned}$$

En prenant $\text{aire}(\vec{i}, \vec{j})$ comme unité d'aire, on trouverait dans le cas général :

$$\text{aire}(\vec{u}, \vec{v}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 2 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
*On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$**, le nombre :*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad \text{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 2 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
*On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$**, le nombre :*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad \textit{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une **forme bilinéaire** sur $E \times E$, c'est-à-dire :*
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$

   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$$

   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$

   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 2 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$****, le nombre :*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad \textit{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme bilinéaire*** *sur $E \times E$, c'est-à-dire :*
$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$
$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$$
$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$
$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$
2. $\forall \vec{u} \in E$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}) = 0$.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 2 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
*On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$**, le nombre :*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad \text{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une **forme bilinéaire** sur $E \times E$, c'est-à-dire :*
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$
   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$$
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$
   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$
2. $\forall \vec{u} \in E, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}) = 0.$
3. $\forall \vec{u} \in E, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ *(**forme alternée**).*

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 2 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
*On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$**, le nombre :*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad \textit{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une **forme bilinéaire** sur $E \times E$, c'est-à-dire :*
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$
   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$$
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$
   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$
2. $\forall \vec{u} \in E, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}) = 0.$
3. $\forall \vec{u} \in E, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ *(**forme alternée**).*
4. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{u})$ *(**forme antisymétrique**).*

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 2 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$****, le nombre :*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad \textit{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme bilinéaire*** *sur $E \times E$, c'est-à-dire :*
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$
   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$$
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$
   $$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$
2. $\forall \vec{u} \in E, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}) = 0.$
3. $\forall \vec{u} \in E, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ *(**forme alternée**).*
4. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{u})$ *(**forme antisymétrique**).*
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u} + \lambda \vec{v}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda \vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}).$

Proposition 1.3 (Déterminant et colinéarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E.

$$\text{La famille } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est } \textbf{libre} \text{ (et donc une } \textbf{base} \text{ de } E \text{) ssi } \operatorname{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0.$$

Autrement dit, la nullité du déterminant de deux vecteurs traduit leur colinéarité (soit encore la proportionnalité de leurs coordonnées).

Si $\mathscr{C}$ est une autre base de E alors $\operatorname{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$.

Proposition 1.3 (Déterminant et colinéarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E.

La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est ***libre*** *(et donc une* ***base*** *de E) ssi $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.*

Autrement dit, la nullité du déterminant de deux vecteurs traduit leur colinéarité (soit encore la proportionnalité de leurs coordonnées).

Si $\mathscr{C}$ est une autre base de E alors $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$.

En fait, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ nous indique si les deux bases sont orientées dans le même sens ou non selon la définition suivante :

Définition 1.4 (Orientation)

On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2 ont la ***même orientation*** *lorsque $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) > 0$).*
*Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'****orientations opposées.***

Proposition 1.3 (Déterminant et colinéarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E.

*La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est **libre** (et donc une **base** de E) ssi $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.*

Autrement dit, la nullité du déterminant de deux vecteurs traduit leur colinéarité (soit encore la proportionnalité de leurs coordonnées).

Si $\mathscr{C}$ est une autre base de E alors $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$.

En fait, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ nous indique si les deux bases sont orientées dans le même sens ou non selon la définition suivante :

Définition 1.4 (Orientation)

*On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2 ont la **même orientation** lorsque $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) > 0$).*
*Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées**.*

Proposition 1.5 (Changement de base)

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Alors

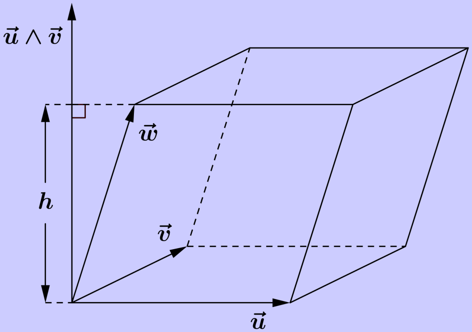
$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \times \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Définition 2.1 (Produit mixte/vectoriel)

Dans l'espace muni du produit scalaire usuel, le ***produit vectoriel*** *de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par*

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de norme $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$, et tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ « tourne dans le sens direct » (règle des trois doigts).*

Le ***produit mixte*** *de trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est le nombre $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.*



Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est :

$$\begin{aligned} volume(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= h \times ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une **base orthonormée** de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs se décomposant selon $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.

Ces vecteurs ont pour composantes $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ et

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 .\end{aligned}$$

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une **base orthonormée** de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs se décomposant selon $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.

Ces vecteurs ont pour composantes $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ et

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 .\end{aligned}$$

Remarque 2.2

On peut montrer que le résultat ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle les coordonnées sont exprimées.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 3 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.

Définition 2.3 (Déterminant de trois vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ trois vecteurs de E.

*On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $\mathscr{B}$** le nombre*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad \textit{noté} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension 3 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.

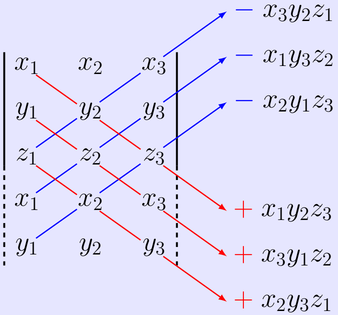
Définition 2.3 (Déterminant de trois vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ trois vecteurs de E.

*On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $\mathscr{B}$** le nombre*

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad \textit{noté} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Calcul pratique : **règle de Sarrus**



On a les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension 2 :

Proposition 2.4 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme trilinéaire*** *sur* $E \times E \times E$.

On a les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension 2 :

Proposition 2.4 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme trilinéaire*** *sur* $E \times E \times E$.
2. $\forall\,(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, 0) = 0$.

On a les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension 2 :

Proposition 2.4 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme trilinéaire*** *sur* $E \times E \times E$.
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, 0) = 0$.
3. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0$.

On a les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension 2 :

Proposition 2.4 (Propriétés immédiates)

1. $\text{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme trilinéaire*** *sur* $E \times E \times E$.
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\text{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, 0) = 0.$
3. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0.$
4. $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$, $$\begin{aligned} \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= -\text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\text{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \end{aligned}$$

On a les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension 2 :

Proposition 2.4 (Propriétés immédiates)

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}$ *est une* ***forme trilinéaire*** *sur* $E \times E \times E$.
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(0, \vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, 0, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, 0) = 0$.
3. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0$.
4. $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$, $$\begin{aligned}\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= -\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})\end{aligned}$$
5. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$, $$\begin{cases} \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}, \vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \end{cases}$$

Proposition 2.5 (Déterminant et coplanarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de E.

*La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **libre** (et donc une **base** de E) ssi* $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

*Autrement dit, la nullité du déterminant caractérise la **coplanarité** de trois vecteurs de l'espace.*

Proposition 2.5 (Déterminant et coplanarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de E.

*La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **libre** (et donc une **base** de E) ssi $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.*

*Autrement dit, la nullité du déterminant caractérise la **coplanarité** de trois vecteurs de l'espace.*

Comme en dimension 2, on peut définir une **orientation** dans un espace vectoriel réel :

Définition 2.6 (Orientation)

*On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3 ont la **même orientation** lorsque $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) > 0$).*
*Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées.***

Proposition 2.5 (Déterminant et coplanarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de E.

*La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **libre** (et donc une **base** de E) ssi $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.*

*Autrement dit, la nullité du déterminant caractérise la **coplanarité** de trois vecteurs de l'espace.*

Comme en dimension 2, on peut définir une **orientation** dans un espace vectoriel réel :

Définition 2.6 (Orientation)

*On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3 ont la **même orientation** lorsque $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) > 0$).*
*Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées.***

Proposition 2.7 (Changement de base)

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Alors

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3,\ \mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \times \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Sommaire

Définition 3.1 (Ordres 2 et 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n = 2$ *ou* $n = 3$.
On appelle ***déterminant*** *de* A, *noté* $\det(A)$, *le déterminant dans la base canonique de* $\mathbb{K}^n$ *des deux ou trois vecteurs colonnes de la matrice* A.

Définition 3.1 (Ordres 2 et 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n = 2$ *ou* $n = 3$.
On appelle ***déterminant*** *de* A, *noté* $\det(A)$, *le déterminant dans la base canonique de* $\mathbb{K}^n$ *des deux ou trois vecteurs colonnes de la matrice* A.

Puis, on définit le déterminant d'une matrice d'ordre n quelconque, par un **procédé récurrent** :

Définition 3.2 (Ordre général)

Soit n *un entier naturel non nul et* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le déterminant de A *est le nombre noté* $\det(A)$ *tel que :*

- *si* $n = 1$ *(i.e.* $A = (a)$*) alors* $\det(A) = a$;
- *si* $n \geqslant 2$, *alors* $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$ *où* A_{i1} *est la matrice d'ordre* $n-1$ *construite à partir de* A *en supprimant la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $1^{\text{ère}}$ *colonne.*

On note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****),* $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice **triangulaire** (et en particulier **diagonale**),* $\det(A)$ *est égal au **produit des coefficients diagonaux** de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont **identiques** ou qu'une colonne est une **combinaison linéaire** d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****),* $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une colonne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une* ***combinaison linéaire*** *des autres colonnes.*

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****),* $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une colonne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une* ***combinaison linéaire*** *des autres colonnes.*
4. $\det(A)$ ***change de signe*** *lorsqu'on* ***intervertit*** *deux colonnes de A.*

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****),* $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une colonne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une* ***combinaison linéaire*** *des autres colonnes.*
4. $\det(A)$ ***change de signe*** *lorsqu'on* ***intervertit*** *deux colonnes de A.*
5. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****),* $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une colonne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une* ***combinaison linéaire*** *des autres colonnes.*
4. $\det(A)$ ***change de signe*** *lorsqu'on* ***intervertit*** *deux colonnes de A.*
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
6. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det({}^t A) = \det(A)$.
   En conséquence, les propriétés 2, 3, 4 relatives aux colonnes s'appliquent également sur les lignes :

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice **triangulaire** (et en particulier **diagonale**),* $\det(A)$ *est égal au **produit des coefficients diagonaux** de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont **identiques** ou qu'une colonne est une **combinaison linéaire** d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une **combinaison linéaire** des autres colonnes.*
4. $\det(A)$ ***change de signe** lorsqu'on **intervertit** deux colonnes de A.*
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
6. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^t\!A) = \det(A)$.
   En conséquence, les propriétés 2, 3, 4 relatives aux colonnes s'appliquent également sur les lignes :
7. *Si deux lignes de A sont **identiques** ou qu'une ligne est une **combinaison linéaire** d'autres lignes alors* $\det(A) = 0$.

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****),* $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une colonne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une* ***combinaison linéaire*** *des autres colonnes.*
4. $\det(A)$ ***change de signe*** *lorsqu'on* ***intervertit*** *deux colonnes de A.*
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
6. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^tA) = \det(A)$.
   En conséquence, les propriétés 2, 3, 4 relatives aux colonnes s'appliquent également sur les lignes :
7. *Si deux lignes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une ligne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres lignes alors* $\det(A) = 0$.
8. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une ligne une* ***combinaison linéaire*** *des autres lignes.*

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

1. *Si A est une matrice* ***triangulaire*** *(et en particulier* ***diagonale****)*, $\det(A)$ *est égal au* ***produit des coefficients diagonaux*** *de A. En particulier,* $\det(I_n) = 1$.
2. *Si deux colonnes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une colonne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres colonnes alors* $\det(A) = 0$.
3. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une colonne une* ***combinaison linéaire*** *des autres colonnes.*
4. $\det(A)$ ***change de signe*** *lorsqu'on* ***intervertit*** *deux colonnes de A.*
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
6. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^tA) = \det(A)$.
   En conséquence, les propriétés 2, 3, 4 relatives aux colonnes s'appliquent également sur les lignes :
7. *Si deux lignes de A sont* ***identiques*** *ou qu'une ligne est une* ***combinaison linéaire*** *d'autres lignes alors* $\det(A) = 0$.
8. *On ne change pas* $\det(A)$ *si on ajoute à une ligne une* ***combinaison linéaire*** *des autres lignes.*
9. $\det(A)$ ***change de signe*** *lorsqu'on* ***intervertit*** *deux lignes de A.*

Remarque 3.4

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire ! En général, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

Remarque 3.4

L'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire ! En général, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

On a encore d'autres propriétés :

Proposition 3.5 (Autres propriétés)

1. $\det(I_n) = 1$.

Remarque 3.4

L'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire ! En général, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

On a encore d'autres propriétés :

Proposition 3.5 (Autres propriétés)

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Remarque 3.4

L'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire ! En général, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

On a encore d'autres propriétés :

Proposition 3.5 (Autres propriétés)

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
3. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.

Remarque 3.4

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire ! En général, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

On a encore d'autres propriétés :

Proposition 3.5 (Autres propriétés)

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
3. $\forall p \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *($A$ est inversible* $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$*) et* $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on commence par effectuer des **opérations sur les lignes et/ou colonnes** de la matrice pour obtenir une ligne ou une colonne contenant un maximum de coefficients nuls, puis on effectue un **développement par rapport à cette ligne ou colonne** en vertu du théorème suivant :

En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on commence par effectuer des **opérations sur les lignes et/ou colonnes** de la matrice pour obtenir une ligne ou une colonne contenant un maximum de coefficients nuls, puis on effectue un **développement par rapport à cette ligne ou colonne** en vertu du théorème suivant :

Théorème 3.6 (Développement d'un déterminant)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

   (développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne)

En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on commence par effectuer des **opérations sur les lignes et/ou colonnes** de la matrice pour obtenir une ligne ou une colonne contenant un maximum de coefficients nuls, puis on effectue un **développement par rapport à cette ligne ou colonne** en vertu du théorème suivant :

Théorème 3.6 (Développement d'un déterminant)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

   (développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne)

2. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

   (développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne)

où A_{ij} est la matrice d'ordre $n-1$ construite à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Considérons la matrice carrée d'ordre 3

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant : $D(a_1, a_2, a_3) = \det V(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \end{array}.$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Considérons la matrice carrée d'ordre 3

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant : $D(a_1, a_2, a_3) = \det V(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \end{array}.$

En effectuant les transformations sur les colonnes $C_1 \leftarrow C_1$, $C_2 \leftarrow C_2 - a_1 C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - a_1 C_2$, puis en développant le résultat par rapport à la 1re ligne, on obtient :

$$D(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 - a_1 C_1 & C_3 - a_1 C_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} \end{array}$$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Considérons la matrice carrée d'ordre 3

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant : $D(a_1, a_2, a_3) = \det V(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \end{array}.$

En effectuant les transformations sur les colonnes $C_1 \leftarrow C_1$, $C_2 \leftarrow C_2 - a_1 C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - a_1 C_2$, puis en développant le résultat par rapport à la 1re ligne, on obtient :

$$D(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 - a_1 C_1 & C_3 - a_1 C_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}$$

soit

$$D(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_2).$$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Considérons la matrice carrée d'ordre 3

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant : $D(a_1, a_2, a_3) = \det V(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \end{array}.$

En effectuant les transformations sur les colonnes $C_1 \leftarrow C_1$, $C_2 \leftarrow C_2 - a_1 C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - a_1 C_2$, puis en développant le résultat par rapport à la 1re ligne, on obtient :

$$D(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 - a_1 C_1 & C_3 - a_1 C_2 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}$$

soit

$$D(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_2).$$

La matrice $V(a_1, a_2, a_3)$ est **inversible** ssi $D(a_1, a_2, a_3) \neq 0$, i.e. ssi a_1, a_2, a_3 sont des nombres **tous distincts**.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Généralisation

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matrice carrée d'ordre n appelée **« matrice de Vandermonde »** :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Généralisation

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matrice carrée d'ordre n appelée **« matrice de Vandermonde »** :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par une méthode similaire au cas $n = 3$, on peut calculer son déterminant (qui est invariant par **transposition**) :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{(i,j):1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Généralisation

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la matrice carrée d'ordre n appelée **« matrice de Vandermonde »** :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par une méthode similaire au cas $n = 3$, on peut calculer son déterminant (qui est invariant par **transposition**) :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{(i,j):1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Ainsi, la matrice $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ainsi que sa **transposée**) est **inversible** ssi les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont **tous distincts**.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Application

Donnons-nous $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres **tous distincts** et introduisons les fonctions

$$\varphi_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_1 x} \qquad \varphi_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_2 x} \qquad \ldots \qquad \varphi_n : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_n x}.$$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Application

Donnons-nous $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres **tous distincts** et introduisons les fonctions

$$\varphi_1 : x \longmapsto e^{a_1 x} \qquad \varphi_2 : x \longmapsto e^{a_2 x} \qquad \dots \qquad \varphi_n : x \longmapsto e^{a_n x}.$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres tels que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$.
On a de manière équivalente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{a_n x} = 0.$$

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Application

Donnons-nous $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres **tous distincts** et introduisons les fonctions

$$\varphi_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_1 x} \qquad \varphi_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_2 x} \qquad \dots \qquad \varphi_n : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_n x}.$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres tels que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_n\varphi_n = 0$.
On a de manière équivalente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{a_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{a_2 x} + \dots + \lambda_n \mathrm{e}^{a_n x} = 0.$$

En dérivant cette relation $(n-1)$ fois en 0, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda_1 + & \lambda_2 + \dots + & \lambda_n & = 0 \\ a_1\lambda_1 + & a_2\lambda_2 + \dots + & a_n\lambda_n & = 0 \\ a_1^2\lambda_1 + & a_2^2\lambda_2 + \dots + & a_n^2\lambda_n & = 0 \\ & & & \vdots \\ a_1^{n-1}\lambda_1 + & a_2^{n-1}\lambda_2 + \dots + & a_n^{n-1}\lambda_n & = 0 \end{array}\right.$$

qui s'écrit sous la forme matricielle ${}^{t}V(a_1, a_2, \dots, a_n)\Lambda = O$ avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Application

Donnons-nous $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres **tous distincts** et introduisons les fonctions

$$\varphi_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_1 x} \qquad \varphi_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_2 x} \qquad \dots \qquad \varphi_n : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_n x}.$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres tels que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$.
On a de manière équivalente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{a_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{a_n x} = 0.$$

En dérivant cette relation $(n-1)$ fois en 0, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda_1 + & \lambda_2 + \cdots + & \lambda_n & = 0 \\ a_1\lambda_1 + & a_2\lambda_2 + \cdots + & a_n\lambda_n & = 0 \\ a_1^2\lambda_1 + & a_2^2\lambda_2 + \cdots + & a_n^2\lambda_n & = 0 \\ & & & \vdots \\ a_1^{n-1}\lambda_1 + & a_2^{n-1}\lambda_2 + \cdots + & a_n^{n-1}\lambda_n & = 0 \end{array}\right.$$

qui s'écrit sous la forme matricielle ${}^{\mathrm{t}}V(a_1, a_2, \dots, a_n)\Lambda = O$ avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ étant **distincts**, la matrice ${}^{\mathrm{t}}V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est **inversible**, donc $\Lambda = O$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Application

Donnons-nous $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres **tous distincts** et introduisons les fonctions

$$\varphi_1 : x \longmapsto e^{a_1 x} \qquad \varphi_2 : x \longmapsto e^{a_2 x} \qquad \ldots \qquad \varphi_n : x \longmapsto e^{a_n x}.$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres tels que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$.
On a de manière équivalente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{a_n x} = 0.$$

En dérivant cette relation $(n-1)$ fois en 0, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda_1 + & \lambda_2 + \cdots + & \lambda_n & = 0 \\ a_1\lambda_1 + & a_2\lambda_2 + \cdots + & a_n\lambda_n & = 0 \\ a_1^2\lambda_1 + & a_2^2\lambda_2 + \cdots + & a_n^2\lambda_n & = 0 \\ & & & \vdots \\ a_1^{n-1}\lambda_1 + & a_2^{n-1}\lambda_2 + \cdots + & a_n^{n-1}\lambda_n & = 0 \end{array}\right.$$

qui s'écrit sous la forme matricielle ${}^t V(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Lambda = O$ avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant **distincts**, la matrice ${}^t V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est **inversible**, donc $\Lambda = O$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ainsi la famille de fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est **libre**.

Sommaire

Théorème-définition 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors toutes les matrices représentant f dans des bases de E ont le même déterminant. Ce nombre est appelé le ***déterminant*** *de f. Il se note $\det(f)$.*

Théorème-définition 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors toutes les matrices représentant f dans des bases de E ont le même déterminant. Ce nombre est appelé le ***déterminant*** *de f. Il se note $\det(f)$.*

Proposition 4.2 (Propriétés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E), \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

Théorème-définition 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors toutes les matrices représentant f dans des bases de E ont le même déterminant. Ce nombre est appelé le ***déterminant*** *de f. Il se note $\det(f)$.*

Proposition 4.2 (Propriétés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E), \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

On peut caractériser les automorphismes de E :

Proposition 4.3 (Déterminant et automorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$(f \text{ est un automorphisme} \iff \det(f) \neq 0) \text{ et } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Sommaire

Définition 5.1 (Déterminant de n vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Le déterminant d'une famille de n vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est défini par :

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{où } \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij}\vec{e}_i.$$

Définition 5.1 (Déterminant de n vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Le déterminant d'une famille de n vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est défini par :

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{où } \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} \vec{e}_i.$$

Proposition 5.2 (Déterminant et liberté)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ n vecteurs de E.
*La famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est **libre** (et donc une **base** de E) $\Longleftrightarrow \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \neq 0$.*

Définition 5.1 (Déterminant de n vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Le déterminant d'une famille de n vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est défini par :

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{où } \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} \vec{e}_i.$$

Proposition 5.2 (Déterminant et liberté)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n vecteurs de E.
*La famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est **libre** (et donc une **base** de E) $\Longleftrightarrow \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \neq 0$.*

Définition 5.3 (Orientation)

*On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie ont la **même orientation** lorsque $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) > 0$).*
*Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées**.*

Définition 5.1 (Déterminant de n vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Le déterminant d'une famille de n vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est défini par :

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{où } \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} \vec{e}_i.$$

Proposition 5.2 (Déterminant et liberté)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n vecteurs de E.
*La famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est **libre** (et donc une **base** de E) $\Longleftrightarrow \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \neq 0$.*

Définition 5.3 (Orientation)

*On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie ont la **même orientation** lorsque $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) > 0$).*
*Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées**.*

Proposition 5.4 (Changement de base)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension n et $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases de E.

$$\forall (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in E^n,\ \mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \mathrm{Det}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \times \mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n).$$

Sommaire

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire de n équations à n inconnues dans $\mathbb{K}$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire de n équations à n inconnues dans $\mathbb{K}$ de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Définition 6.1 (Système de Cramer)

*Si on note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice carrée associée au système $(\mathscr{S})$, on dit que $(\mathscr{S})$ est un **système de Cramer** lorsque* $\det(A) \neq 0$.

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire de n équations à n inconnues dans $\mathbb{K}$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Définition 6.1 (Système de Cramer)

Si on note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice carrée associée au système $(\mathscr{S})$, on dit que $(\mathscr{S})$ est un ***système de Cramer*** *lorsque* $\det(A) \neq 0$.

Proposition 6.2 (Solution)

Tout système de Cramer de n équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ de matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et de seconds membres $b_1, \dots, b_n$ admet une unique solution $(x_1, \dots, x_n)$ telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ x_j = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne des (b_i)).

Exemple 6.3 (Système 2×2)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Exemple 6.3 (Système 2×2)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Exemple 6.3 (Système 2×2)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de **Cramer** ssi $ab' - a'b \neq 0$.

Exemple 6.3 (Système 2×2)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de **Cramer** ssi $ab' - a'b \neq 0$.

Notons également Δ_x et Δ_y les déterminants **relatifs** aux inconnues x et y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c - bc' \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Exemple 6.3 (Système 2×2)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de **Cramer** ssi $ab' - a'b \neq 0$.

Notons également Δ_x et Δ_y les déterminants **relatifs** aux inconnues x et y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c - bc' \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Lorsque $\Delta \neq 0$, le système $(\mathscr{S})$ admet une **unique** solution donnée par

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right).$$

Exemple 6.4 (Système 3×3)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Exemple 6.4 (Système 3×3)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Exemple 6.4 (Système 3×3)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de **Cramer** ssi $\Delta \neq 0$.

Exemple 6.4 (Système 3×3)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de **Cramer** ssi $\Delta \neq 0$.

Notons également $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ les déterminants **relatifs** aux inconnues x, y, z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}.$$

Exemple 6.4 (Système 3×3)

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans $\mathbb{K}$ suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ associée au système $(\mathscr{S})$ et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de **Cramer** ssi $\Delta \neq 0$.

Notons également $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ les déterminants **relatifs** aux inconnues x, y, z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}.$$

Lorsque $\Delta \neq 0$, le système $(\mathscr{S})$ admet une **unique** solution donnée par

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right).$$

Notions à retenir

- Déterminants
  - ⋆ Interprétation géométrique en dimensions 2 et 3
  - ⋆ Propriétés de multilinéarité, techniques de calcul
  - ⋆ Lien avec les matrices et endomorphismes
  - ⋆ Lien avec les familles de vecteurs, caractérisation d'une base
  - ⋆ Lien avec les systèmes linéaires, résolution des systèmes de Cramer