INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Réduction des endomorphismes

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Prologue

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie n.
Pour toute base de E, on sait écrire la matrice de f dans cette base.

Question : peut-on trouver une base de E dans laquelle la matrice de f serait **diagonale** ?

Si une telle base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ existe et que la matrice de f dans cette base est $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, c'est que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on doit avoir $f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$.

Le problème revient donc à chercher une base de vecteurs de E où chaque vecteur est **colinéaire** à son image par f.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

Définition 2.1 (Valeur/vecteur propre)

*Un **vecteur propre** de f est un vecteur $\vec{u}$ **non nul** de E tel qu'il existe un nombre λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.*

*Un tel nombre λ de $\mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul de E tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ est appelé une **valeur propre** de f.*

Remarque 2.2

Lorsque $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$, on dit que $\vec{u}$ est un vecteur propre **associé** à la valeur propre λ ou encore que λ est la valeur propre **associée** au vecteur propre $\vec{u}$.

Ainsi, plusieurs vecteurs propres peuvent être associés à la même valeur propre mais il n'y a qu'une valeur propre associée à un vecteur propre donné.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ le sev de E formé des vecteurs $\vec{u}$ solutions de l'équation $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

Remarque 2.3

$E_\lambda(f)$ peut être réduit à $\{\vec{0}_E\}$, ce qui signifie dans ce cas qu'il n'y a aucun vecteur propre de f associé au réel λ (qui n'est par conséquent pas une valeur propre de f).

Sinon, $E_\lambda(f)$ est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.

Proposition 2.4

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de $f \iff E_\lambda(f) \neq \{\vec{0}_E\} \iff f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Définition 2.5 (Sous-espace propre)

*Si λ est une valeur propre de f alors $E_\lambda(f)$ est appelé **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ.*

Définition 2.6 (Somme directe de plusieurs s.e.v.)

Soit un entier $p \geqslant 2$ et $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de s.e.v. de E.
*On dit que les s.e.v. $F_1, \dots, F_p$ sont **en somme directe** si tout vecteur $\vec{u}$ du s.e.v. $F = F_1 + \dots + F_p$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_p$ avec, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\vec{u}_i \in F_i$. On note alors $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ou $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.*

Théorème 2.7 (Somme directe des sous-espaces propres)

*Des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ en nombre fini, associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ **distinctes**, sont toujours en **somme directe.***

Corollaire 2.8 (Valeurs propres distinctes)

*Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux **distinctes** d'un endomorphisme est toujours **libre.***

Exemple 2.9 (Famille d'exponentielles)

Considérons dans l'espace vectoriel $\mathscr{D}$ des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ l'endomorphisme « dérivation » D : pour tout $u \in \mathscr{D}$, $D(u) = u'$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'équation $D(u) = \lambda u$ admet pour solutions la droite vectorielle de $\mathscr{D}$ engendrée par la fonction $e_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Ainsi $\mathscr{D}$ admet une **infinité de valeurs propres** (tous les réels).
On en déduit que, pour tous réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la famille $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ est **libre.**

En général, même en considérant tous les sous-espaces propres de f, cette somme directe **ne** donne **pas** l'espace E tout entier. D'où la définition suivante.

Définition 2.10 (Endomorphisme diagonalisable)

*L' endomorphisme f est dit **diagonalisable** lorsque E est **somme directe** d'un nombre fini de sous-espaces propres de f.*

On a alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id}_E)$, et donc il existerait une base de E constituée de vecteurs propres de f (une telle base s'appelle une **base de diagonalisation** pour f).

Étant donnée notre motivation de départ, l'objectif est donc de pouvoir dire si un endomorphisme est **diagonalisable** ou pas.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension finie n**.

Proposition 3.1 (Valeur propre et déterminant)

λ est une valeur propre de $f \iff \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = 0$.

Définition 3.2 (Polynôme caractéristique)

*$\det(f - X.\mathrm{Id}_E)$ est un polynôme de la variable X de degré n appelé **polynôme caractéristique** de f que l'on notera P_f.*

En pratique, on détermine donc les valeurs propres éventuelles de f en cherchant les racines de son polynôme caractéristique.

Définition 3.3 (Multiplicité)

*On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de f, sa multiplicité en tant que racine de P_f.*

Il reste à déterminer une base de E constituée de vecteurs propres associés aux éventuelles valeurs propres de f qu'on a déterminées. Mais cela n'est possible que sous certaines conditions.

Théorème 3.4 (Valeur propre et multiplicité)

Soit λ une valeur propre de f de multiplicité μ. Alors :

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant \mu.$$

Théorème 3.5 (CNS de diagonalisabilité)

*L'endomorphisme f est **diagonalisable** ssi son polynôme caractéristique P_f a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$ (on dit alors qu'il est **scindé** sur $\mathbb{K}$) **et si**, pour chaque valeur propre, la **multiplicité** est égale à la **dimension** du sous-espace propre associé.*

Corollaire 3.6 (CS de diagonalisabilité)

*Si le polynôme caractéristique P_f n'a que des **racines simples toutes dans** $\mathbb{K}$ alors l'endomorphisme f est **diagonalisable.***

Dans ce paragraphe, A désigne une matrice carrée d'**ordre n** : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 4.1 (Éléments propres d'une matrice)

1. *On appelle* ***polynôme caractéristique*** *de A le polynôme de degré n en X* $\det(A - X.I_n)$. *On le note P_A.*
2. *On dit que λ est une* ***valeur propre*** *de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$* ***non nul*** *tel que $A.X = \lambda X$. Alors X est dit* ***vecteur propre*** *de la matrice A associé à la valeur propre λ.*
3. *On note* $\operatorname{Ker}(A - \lambda.I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$

Théorème 4.2 (Polynôme caractéristique et valeur propre)

1. $P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + \det(A)$.
En particulier, lorsque $n = 2$: $P_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.
2. $$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff \det(A - \lambda.I_n) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est une racine de } P_A \end{aligned}$$

Définition 4.3 (Matrice diagonalisable)

La matrice A est dite ***diagonalisable*** *si elle est* ***semblable à une matrice diagonale,*** *c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :*

$$D = P^{-1}AP \text{ ou encore } A = PDP^{-1}.$$

Théorème 4.4 (CNS de diagonalisabilité)

La matrice A est ***diagonalisable*** *ssi son polynôme caractéristique P_A a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$* ***et si*** *la* ***multiplicité*** *de chaque valeur propre de A est égale à la* ***dimension*** *du sous-espace propre associé.*

En particulier, si P_A n'a que des racines ***simples*** *toutes dans $\mathbb{K}$ alors A est* ***diagonalisable.***

Remarque 4.5 (Coefficients diagonaux et valeurs propres)

Lorsque A est **diagonalisable,** les **coefficients diagonaux** de la matrice D diagonale qui lui est semblable sont exactement les **valeurs propres** de A comptées avec leur **multiplicité.**

Enfin, si $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors A et f ont les mêmes valeurs propres, et A est **diagonalisable** ssi f est **diagonalisable**.

Exemple 4.6 (Diagonalisation)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On se place dans l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^2$.

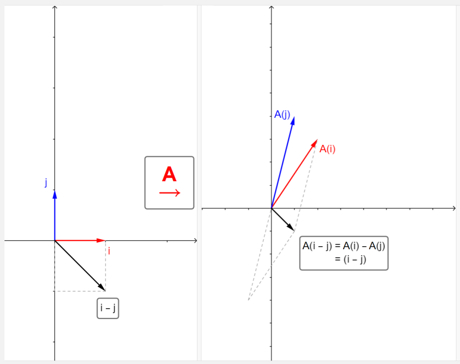
1. **Valeurs propres :** on a $\operatorname{tr}(A) = 6$ et $\det(A) = 5$, donc son polynôme caractéristique est $P_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = (X-1)(X-5)$ ce qui fournit deux valeurs propres **simples** : 1 et 5.
2. **Vecteurs propres :**
   - Le sous-espace propre associé à 1 est l'ensemble des matrices-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $x + y = 0$. C'est la **droite vectorielle** de base $((1,-1))$.
   - Le sous-espace propre associé à 5 est l'ensemble des matrices-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $3x - y = 0$. C'est la **droite vectorielle** de base $((1,3))$.

Diagonalisation : P_A ayant **toutes ses racines** dans $\mathbb{R}$ et celles-ci étant **simples,** la matrice A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.6 (Diagonalisation)

3. **Illustration :**



$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

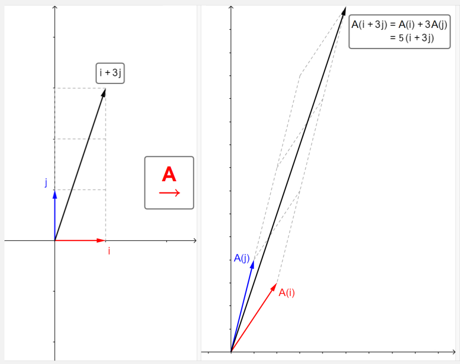
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En général :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple 4.6 (Diagonalisation)

3. **Illustration :**



$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En général :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple 4.7 (Diagonalisation)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On se place dans l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$.

1. **Valeurs propres :** son polynôme caractéristique est $P_A = (5-X)(2-X)^2$ ce qui fournit deux valeurs propres : la valeur propre **simple** 5 et la valeur propre **double** 2.
2. **Vecteurs propres :**
   - Le sous-espace propre associé à 5 est l'ensemble des matrices-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant $x = y = z$. C'est la **droite vectorielle** de base $((1,1,1))$.
   - Le sous-espace propre associé à 2 est l'ensemble des matrices-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant $x + y + z = 0$. C'est le **plan vectoriel** de base $((1,-1,0),(0,1,-1))$.
3. **Diagonalisation:** P_A ayant **toutes ses racines** dans $\mathbb{R}$ et les **dimensions** des sous-espaces propres coïncidant avec les **multiplicités** des valeurs propres, la matrice A est diagonalisable:

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.8 (Système de suites récurrentes)

Considérons le **système de suites récurrentes** $(\mathscr{S})$ d'inconnues les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases},\ n \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases}$$

1. Introduisons la matrice A du système $(\mathscr{S})$ décrite dans l'exemple 4.7 ainsi que la matrice-colonne inconnue $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Le système $(\mathscr{S})$ se réécrit selon $U_{n+1} = AU_n$.
Il s'agit d'une **suite géométrique matricielle** dont la solution est donnée par $U_n = A^n U_0$.
2. Cette solution nécessite le calcul de la **puissance** n^e de la matrice A qui peut se calculer facilement à l'aide de la forme diagonalisée $A = PDP^{-1}$:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

3. D'où la **solution** $U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} \\ 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n \end{pmatrix}$ soit $u_n = \dfrac{5^n + 2^{n+1}}{3}$, $v_n = w_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3}$.

Exemple 4.9 (Système différentiel)

Considérons le **système différentiel** $(\mathscr{S})$ d'inconnues les fonctions x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

1. Introduisons la matrice A de $(\mathscr{S})$ décrite dans l'ex. 4.7 ainsi que la matrice-colonne inconnue $U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Le système $(\mathscr{S})$ se réécrit $U'(t) = AU(t)$. Il s'agit d'une **équation différentielle matricielle** linéaire du 1[er] ordre à **coefficient matriciel** constant.
2. La forme diagonalisée $A = PDP^{-1}$ permet, grâce à un changement de fonctions inconnues, d'obtenir un système différentiel diagonal facile à résoudre : on pose $U(t) = P\tilde{U}(t)$ avec $\tilde{U}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$. Le système $(\mathscr{S})$ est équivalent à $\tilde{U}'(t) = D\tilde{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ et $\tilde{U}(0) = P^{-1}U(0)$, soit

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = 5\tilde{x}(t) \\ \tilde{y}'(t) = 2\tilde{y}(t) \\ \tilde{z}'(t) = 2\tilde{z}(t) \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{x}(0) = \frac{1}{3} \\ \tilde{y}(0) = \frac{2}{3} \\ \tilde{z}(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. D'où la **solution** $\tilde{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{5t} \\ \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$ soit $x(t) = \dfrac{e^{5t} + 2e^{2t}}{3}$, $y(t) = z(t) = \dfrac{e^{5t} - e^{2t}}{3}$.

Exemple 4.10 (Quadrique (facultatif))

Considérons la **quadrique** $(\mathscr{S})$ d'équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

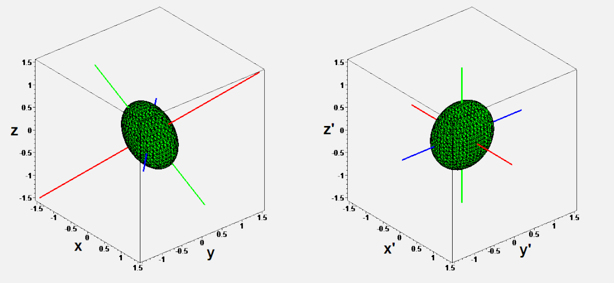
$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$$

1. Introduisons la matrice A de $(\mathscr{S})$ décrite dans l'ex. 4.7 ainsi que la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. L'équation de $(\mathscr{S})$ se réécrit selon ${}^tXAX = 1$.
2. La forme diagonalisée $A = QDQ^{-1}$ avec la nouvelle matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ qui est **orthogonale** (i.e. ${}^tQQ = I_3$ ou encore $Q^{-1} = {}^tQ$, elle représente un changement de **bases orthonormales** $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) \longrightarrow (\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$) permet, grâce à un changement de variables, d'obtenir une équation cartésienne ne comportant que des carrés : on pose $X = QX'$ avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. L'équation de $(\mathscr{S})$ est équivalente à ${}^tX'AX' = 1$, soit dans le repère $(O,\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$:

$$5x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2 = 1$$

3. Il s'agit d'un **ellipsoïde de révolution** de centre O d'axes principaux de vecteurs directeurs $\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'$, d'axe de révolution dirigé par $\vec{\imath}'$, de demi-axes de longueurs $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exemple 4.10 (Quadrique (facultatif))



Théorème 4.11 (Réduction des matrices symétriques réelles (facultatif))

Toute matrice ***symétrique réelle*** *A est* ***diagonalisable*** *via une matrice de passage* ***orthogonale*** *P : $A = PD\,{}^tP$ avec ${}^tPP = I_n$ (soit $P^{-1} = {}^tP$).*

Exemple 4.12 (Cas des matrices 2×2 symétriques réelles (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. On se place dans l'espace canonique $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique supposée orthonormale.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$.
Notons δ^2 son discriminant avec $\delta = \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$.

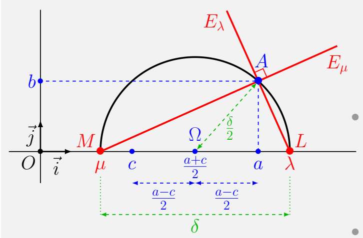
1. **Cas** $b = 0$. La matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Elle est **diagonale.**
2. **Cas** $b \neq 0$.
   - **Valeurs propres :**
     on a $\delta > 0$. La matrice A admet donc deux valeurs propres **réelles distinctes** $\lambda = \frac{1}{2}(a+c+\delta)$ et $\mu = \frac{1}{2}(a+c-\delta)$, elle est **diagonalisable.**
   - **Sous-espaces propres :**
     les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont les droites vectorielles de bases respectives $\big((2b, a-c-\delta)\big)$ et $\big((2b, a-c+\delta)\big)$.
     Notons que leur produit scalaire est **nul,** donc ces droites sont **orthogonales.**
   - **Diagonalisation :**
     les valeurs propres étant **simples,** la matrice A est **diagonalisable :** $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a-c+\delta & a-c-\delta \\ 2b & 2b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{4b\delta}\begin{pmatrix} 2b & c-a+\delta \\ -2b & a-c+\delta \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.12 (Cas des matrices 2×2 symétriques réelles (facultatif))

Une construction géométrique

On peut construire de manière géométrique les valeurs propres λ, μ ainsi que les sous-espaces propres E_λ, E_μ à l'aide d'un cercle appelé **« cercle de Mohr ».**



- Supposons $c < a$. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on place sur l'axe $O\vec{i}$ les points d'abscisses a et c ainsi que leur milieu Ω (d'abscisse $\frac{a+c}{2}$), puis dans le plan le point A de coordonnées (a, b).
- On trace le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}\delta = \Omega A$. L'intersection de ce cercle avec l'axe $O\vec{i}$ fournit deux points L et M d'abscisses respectives λ et μ.
- On trace les droites (orthogonales) $E_\lambda = LA$ et $E_\mu = MA$.

http ://math.univ-lyon1.fr/ alachal/serveurPC/ signal_binaire.pdf

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/ les_grains_de_ble_du_grand_Khong.pdf

Notions à retenir

- Réduction des matrices et endomorphismes
  - ⋆ Polynôme caractéristique
  - ⋆ Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres
  - ⋆ Matrices, endomorphismes diagonalisables
  - ⋆ Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité
  - ⋆ Technique de diagonalisation
  - ⋆ Application de la diagonalisation des matrices aux systèmes différentiels et systèmes de suites récurrentes