INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Calcul vectoriel

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1er cycle, 1re année

Sommaire

Vecteurs

Un vecteur du plan ou de l'espace est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** (ou **norme**).

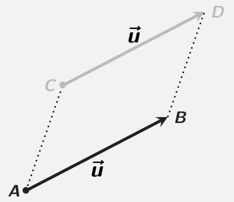
Une **base** du plan est la donnée de deux vecteurs **non colinéaires**.
Une **base** de l'espace est la donnée de trois vecteurs **non coplanaires**.
Elle permet de repérer n'importe quel vecteur du plan ou de l'espace à l'aide de ses **composantes** (on dit aussi parfois **coordonnées**).

Composantes/bases dans l'espace : diverses notations

- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ signifie : $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$
  $\hookrightarrow$ notation simple en dimension 2 ou 3.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ signifie : $\vec{u}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$
  $\hookrightarrow$ notation généralisable en dimension supérieure (cf. cours de Mathématiques).
- $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ signifie : $\vec{u}=u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y+u_z\vec{e}_z$
  $\hookrightarrow$ notation utile pour les changements de systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques... Cf. cours d'OMNI).

Vecteurs et points

Un vecteur du plan ou de l'espace est géométriquement représenté par un **bipoint** (A,B) surmonté d'une flèche indiquant le sens : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
Il est ainsi représenté par un segment de droite orienté. Deux segments de droites orientés parallèles, de même longueur et de même sens représentent le même vecteur (règle du parallélogramme).



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\iff ABDC$ est un parallélogramme

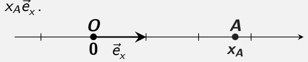
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Coordonnées/repères

Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O et d'une **base** $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, on l'écrit $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. Il permet de repérer n'importe quel point de l'espace à l'aide de ses **coordonnées**.

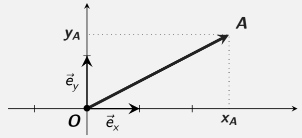
Repérage sur une droite

Dans un **repère** $(O;\vec{e}_x)$, un point quelconque A de la droite est repéré par son **abscisse** x_A : $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{e}_x$.



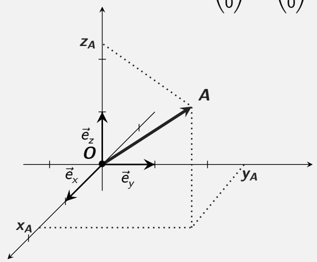
Repérage dans un plan

Dans un **repère** $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y)$, un point quelconque A du plan est repéré par son **abscisse** x_A et son **ordonnée** y_A : $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{e}_x+y_A\vec{e}_y$.



Repérage dans l'espace

Dans un **repère** $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, un point quelconque A de l'espace est repéré par son **abscisse** x_A, son **ordonnée** y_A et sa **cote** z_A : $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{e}_x+y_A\vec{e}_y+z_A\vec{e}_z$.
On note usuellement les **coordonnées** d'un point en ligne, les **composantes** d'un vecteur en colonne : $O(0,0,0)$, $A(x_A,y_A,z_A)$ et $\vec{e}_x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$.



Remarque : on parle parfois de coordonnées d'un vecteur, et on les écrit parfois en ligne : $\overrightarrow{OA}(x_A,y_A,z_A)$.

Vecteurs et points

Si (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B) sont les **coordonnées** de A et B dans le **repère** $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, on écrit $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$. On a

$$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{e}_x+y_A\vec{e}_y+z_A\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB}=x_B\vec{e}_x+y_B\vec{e}_y+z_B\vec{e}_z$$

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ a pour **composantes** dans la **base** $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$: $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$. On écrit usuellement en colonne : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.

Remarque : on note parfois les composantes en ligne : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$.

On écrit aussi parfois $\overrightarrow{AB}=B-A$ en cohérence avec la relation entre **coordonnées** de A et B et **composantes** de $\overrightarrow{AB}$ décrite ci-dessus.

Attention : il existe plusieurs produits scalaires (cf. cours de Mathématiques de 2e année). On parle ici du produit scalaire « usuel » (***euclidien***...)

Définition 2.1 (Produit scalaire/norme)

1. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Leur **produit scalaire** est **le réel***

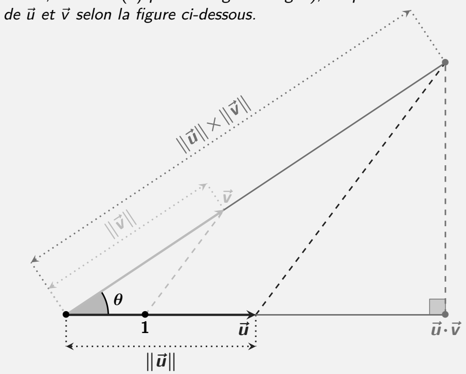
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

où $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Remarque : *l'angle n'est pas nécessairement orienté.*

2. *La **norme** se déduit inversement du carré scalaire : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.*
*Un vecteur est dit **normé** ou **unitaire** lorsque sa norme vaut 1.*

Propriété 2.2 (Visualisation du produit scalaire)

À l'aide du théorème de Thalès et de la trigonométrie dans un triangle rectangle, en notant $\theta=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (attention, l'angle θ peut être aigu ou obtus, donc $\cos(\theta)$ peut changer de signe), on peut visualiser le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ selon la figure ci-dessous.



Propriété 2.3 (Bilinéarité)

1. *Le produit scalaire est* ***symétrique*** : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
2. *Le produit scalaire est* ***bilinéaire*** : $\begin{cases}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\\ \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) \quad =\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\end{cases}$

   (où λ est un réel).
3. *Le produit scalaire est* ***défini positif*** : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2>0$ *pour* $\vec{u}\neq\vec{0}$.

Propriété 2.4 (Expression analytique)

Soit une base ***orthonormée*** *de l'espace et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives* $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ *dans cette base.*

Le ***produit scalaire*** *et la* ***norme*** *s'expriment alors en réel selon :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$$

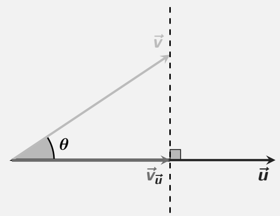
Remarque 2.5 (Vecteur unitaire)

Pour tout vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est un vecteur **unitaire de mêmes sens et direction** que $\vec{u}$.

Propriété 2.6 (Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre)

Le ***projeté orthogonal*** $\vec{v}_{\vec{u}}$ *d'un vecteur* $\vec{v}$ *sur un vecteur* ***non nul*** $\vec{u}$ *s'exprime selon*

$$\boxed{\vec{v}_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}}$$



Si l'on note $\overline{v_{\vec{u}}}$ *la* ***mesure algébrique*** *de* $\vec{v}_{\vec{u}}$ *sur l'axe* ***orienté*** *par* $\vec{u}$, *alors on a :* $\overline{v_{\vec{u}}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|}$. *En conséquence,* $\overline{v_{\vec{u}}}$ *et* $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *ont* ***même signe***.

Cas particulier : *lorsque $\vec{u}$ est un vecteur* ***unitaire***, *la formule se simplifie selon*

$$\boxed{\vec{v}_{\vec{u}}=(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{u}}$$

Démonstration de la projection (cf. propriété 2.6)

Par trigonométrie dans un triangle rectangle, $\overline{v_{\vec{u}}}=\|\vec{v}\|\times\cos\theta$ où $\theta=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par ailleurs, on a $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$, donc $\overline{v_{\vec{u}}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|}$.

On obtient alors le vecteur $\vec{v}_{\vec{u}}$ le long de la droite dirigée par le vecteur **unitaire** $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ selon $\vec{v}_{\vec{u}}=\overline{v_{\vec{u}}}\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right)=\frac{\overline{v_{\vec{u}}}}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ d'où $\vec{v}_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

Exemple 2.7 (Projections sur une base orthonormée)

Soit $\vec{u}$ un vecteur de composantes $\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ dans la base **orthonormée** $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ de l'espace, c'est-à-dire $\vec{u}=u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y+u_z\vec{e}_z$.

On peut obtenir ses composantes grâce aux produits scalaires (**projections** sur les vecteurs de la base) selon $\begin{cases}u_x=\vec{u}\cdot\vec{e}_x\\u_y=\vec{u}\cdot\vec{e}_y\\u_z=\vec{u}\cdot\vec{e}_z\end{cases}$

Démonstration de l'addition (cf. propriété 2.3)

Partant des projetés de $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\vec{v}_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ et $\vec{w}_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$

on obtient $\vec{v}_{\vec{u}}+\vec{w}_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

D'autre part, le projeté de $\vec{v}+\vec{w}$ est donné par $(\vec{v}+\vec{w})_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

On a l'égalité des projections : $(\vec{v}+\vec{w})_{\vec{u}}=\vec{v}_{\vec{u}}+\vec{w}_{\vec{u}}$
d'où par identification : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

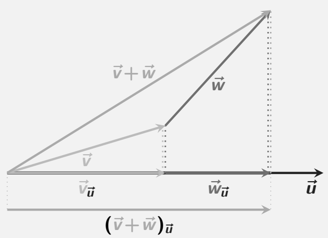


Illustration pour trois vecteurs coplanaires

Applications géométriques

- Tester l'**orthogonalité** de deux vecteurs :

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** $\iff$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- Tester la **colinéarité** de deux vecteurs :

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\iff$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\pm\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

  Les vecteurs sont alors **de même sens** si le produit scalaire est **positif**.

Exemple 2.8 (Plan orthogonal à un vecteur)

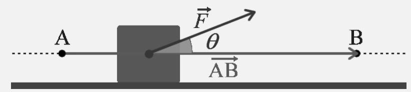
On se place dans une base **orthonormée** de l'espace.

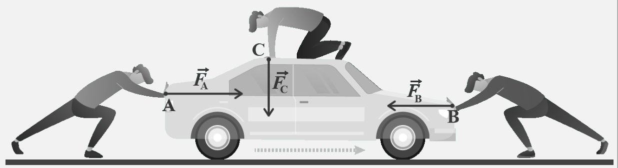
Soit a,b,c trois réels non nuls et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur fixé.

Alors l'ensemble des vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{u}$ sont caractérisés par la relation $ax+by+cz=0$. Il s'agit d'une **équation cartésienne** du **plan vectoriel orthogonal à $\vec{v}$.**

Applications physiques

- En mécanique, le **travail** de la force constante $\vec{F}$ qui déplace en ligne droite son point d'application de A à B est le produit scalaire $\vec{F}\cdot\vec{AB}$.





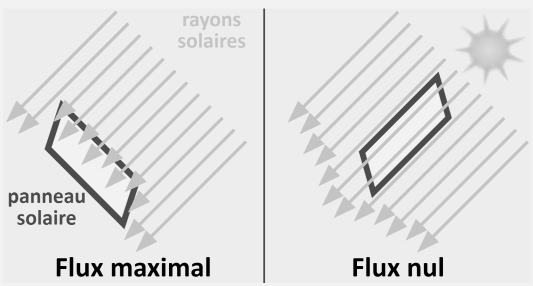
Travail de $\vec{F_A}$: **positif maximal**

Travail de $\vec{F_B}$: **négatif minimal**

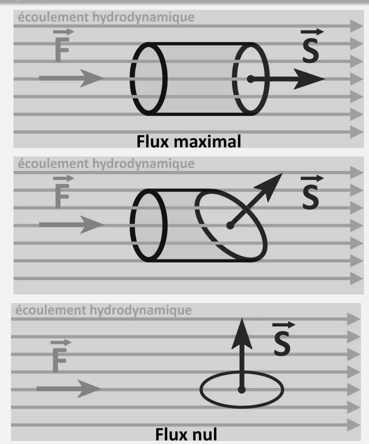
Travail de $\vec{F_C}$: **nul**

Applications physiques

- Dans divers domaines de la physique (mécanique des fluides, électromagnétisme, thermodynamique, acoustique, etc.) le **flux** d'un champ de vecteurs $\vec{F}$ à travers une surface orientée Σ est donné par l'intégrale de surface d'un produit scalaire $\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{dS}$ où $\vec{dS}$ représente un vecteur normal « élémentaire » à la surface Σ.



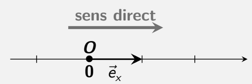
Applications physiques



Orientation d'une droite

Pour **orienter** une droite, on choisit une origine O et un sens de parcours sur la droite (2 **orientations** possibles).

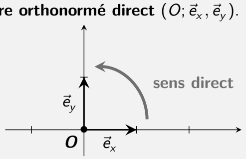
Le vecteur **unitaire** choisi $\vec{e}_x$ donne l'orientation choisie. On définit ainsi un **repère normé orienté** $(O;\vec{e}_x)$.



Orientation d'un plan

On choisit un axe de repère normé $(O;\vec{e}_x)$ puis un deuxième axe passant par O de repère normé $(O;\vec{e}_y)$, perpendiculaire au premier. On choisit un sens de rotation pour passer des vecteurs **unitaires** $\vec{e}_x$ à $\vec{e}_y$, c'est le **sens direct** ou **trigonométrique**.

On obtient ainsi un **repère orthonormé direct** $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y)$.

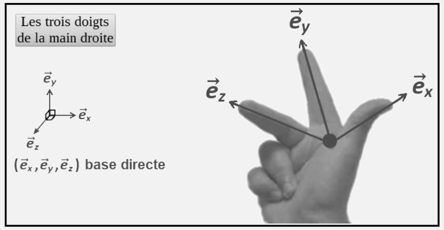


Orientation de l'espace

Une fois un plan de l'espace muni d'un repère **orthonormé** $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y)$, il y a deux choix possibles (opposés) du dernier vecteur **unitaire** $\vec{e}_z$ **orthogonal** aux deux premiers, pour **orienter** l'espace.

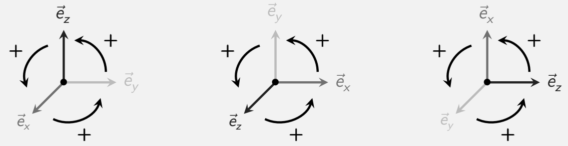
En physique, le **sens direct** du repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ correspond à la **règle des trois doigts de la main droite :**

pouce : $\vec{e}_x$ ***index :*** $\vec{e}_y$ ***majeur :*** $\vec{e}_z$



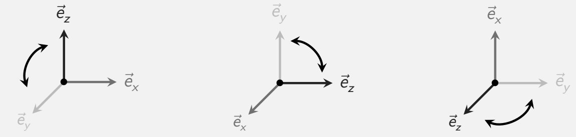
On obtient un repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, dans lequel les trois vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont **unitaires** et **orthogonaux** deux à deux, **orienté** selon la règle précédente.
On dit que c'est un **repère orthonormé direct**.

Orientation et permutations



$(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ **directe** $(\vec{e}_z,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ **directe** $(\vec{e}_y,\vec{e}_z,\vec{e}_x)$ **directe**

Une permutation **circulaire conserve** l'orientation



$(\vec{e}_y,\vec{e}_x,\vec{e}_z)$ **indirecte** $(\vec{e}_x,\vec{e}_z,\vec{e}_y)$ **indirecte** $(\vec{e}_z,\vec{e}_y,\vec{e}_x)$ **indirecte**

Une permutation **de deux vecteurs inverse** l'orientation

Orientation d'une base quelconque de l'espace

Considérons une base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace **non orthogonale**.

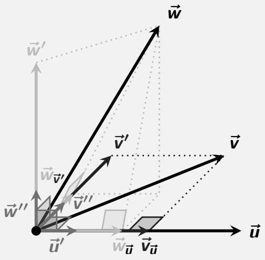
- On introduit les vecteurs

  $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}$ et $\vec{w}\,' = \vec{w} - \vec{w}_{\vec{u}} - \vec{w}_{\vec{v}\,'}$

  où $\vec{v}_{\vec{u}}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$, et $\vec{w}_{\vec{v}}$ et $\vec{w}_{\vec{v}\,'}$ sont respectivement les projetés orthogonaux de $\vec{w}$ sur $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$.
  On construit ainsi une base **orthogonale** $(\vec{u},\vec{v}\,',\vec{w}\,')$ de l'espace.
- On norme ensuite les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}\,'$, $\vec{w}\,'$ en posant :

  $\vec{u}\,' = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}$ $\quad \vec{v}\,'' = \dfrac{1}{\|\vec{v}\,'\|}$ $\quad \vec{w}\,'' = \dfrac{1}{\|\vec{w}\,'\|}$

  On construit ainsi une base **orthonormée** $(\vec{u}\,',\vec{v}\,'',\vec{w}\,'')$ de l'espace.

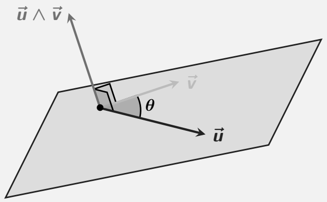


On définit alors l'**orientation** de la base quelconque $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ comme étant celle de la base **orthonormée** $(\vec{u}\,',\vec{v}\,'',\vec{w}\,'')$.

Définition 4.1 (Produit vectoriel)

*Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace **orienté**. Leur produit vectoriel est le **vecteur** $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini par :*

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou que l'un des deux est nul, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont ni nuls ni colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est l'unique vecteur dont les caractéristiques sont :*
  - ***direction :** $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est **orthogonal** à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
  - ***sens :** la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est **directe** ;*
  - ***longueur :** $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$.*



Attention : le produit vectoriel de deux vecteurs n'existe qu'en dimension **3** !

Propriété 4.2 (Bilinéarité)

1. *Le produit vectoriel est **antisymétrique** : $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$.*
2. *Le produit vectoriel est **bilinéaire**, c'est-à-dire **linéaire** par rapport à chaque variable :*

$$\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} &= \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}\\ (\lambda\vec{u})\wedge\vec{v} &= \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}\\ \vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) &= \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})\end{cases}$$

3. *Dans une **base orthonormée directe** de l'espace $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$.*
   Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour composantes :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}u_yv_z-u_zv_y\\-(u_xv_z-u_zv_x)\\u_xv_y-u_yv_x\end{pmatrix}$$

   En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan de base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ donc de composantes respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\0\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_xv_y-u_yv_x)\vec{e}_z$.

Composantes : procédé mnémotechnique

Retenir les expressions des composantes d'un produit vectoriel étant difficile, il est pratique de procéder comme suit :

1. on écrit les composantes des vecteurs sous forme de matrices-colonnes ;
2. on recopie les deux premières composantes de chaque colonne en dessous ;
3. on note l'emplacement des « produits en croix » et l'on effectue les différences des produits en croix :

$$\begin{array}{ccc}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} & \wedge & \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\\ u_x & & v_x\\ u_y & & v_y\end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix}u_yv_z-u_zv_y\\u_zv_x-u_xv_z\\u_xv_y-u_yv_x\end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer les composantes d'un produit vectoriel à l'aide d'un déterminant.
En posant $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix} = ad-bc$ (**déterminant d'ordre 2**) et en « développant » par rapport à la 3e colonne :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}u_x&v_x&\vec{e}_x\\u_y&v_y&\vec{e}_y\\u_z&v_z&\vec{e}_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}u_y&v_y\\u_z&v_z\end{vmatrix}\vec{e}_x - \begin{vmatrix}u_x&v_x\\u_z&v_z\end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix}u_x&v_x\\u_y&v_y\end{vmatrix}\vec{e}_z$$
$$= (u_yv_z-u_zv_y)\vec{e}_x - (u_xv_z-u_zv_x)\vec{e}_y + (u_xv_y-u_yv_x)\vec{e}_z$$

Remarque 4.3

Dans toute **base orthonormée directe** de l'espace $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, on a

$$\vec{e}_x\wedge\vec{e}_y = -\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x = \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_y\wedge\vec{e}_z = -\vec{e}_z\wedge\vec{e}_y = \vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z\wedge\vec{e}_x = -\vec{e}_x\wedge\vec{e}_z = \vec{e}_y$$

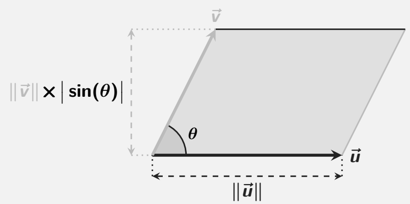
Démonstration de l'expression analytique (cf. propriété 4.2)

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= (u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y+u_z\vec{e}_z)\wedge(v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z)\\ &= (u_x\vec{e}_x)\wedge(v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z)+u_y\vec{e}_y\wedge(v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z)\\ &\quad + u_z\vec{e}_z\wedge(v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z) \text{ par linéarité par rapport à la 1}^{\text{re}}\text{ variable}\\ &= (u_x\vec{e}_x)\wedge(v_x\vec{e}_x)+(u_x\vec{e}_x)\wedge(v_y\vec{e}_y)+(u_x\vec{e}_x)\wedge(v_z\vec{e}_z)\\ &\quad +(u_y\vec{e}_y)\wedge(v_x\vec{e}_x)+(u_y\vec{e}_y)\wedge(v_y\vec{e}_y)+(u_y\vec{e}_y)\wedge(v_z\vec{e}_z)\\ &\quad +(u_z\vec{e}_z)\wedge(v_x\vec{e}_x)+(u_z\vec{e}_z)\wedge(v_y\vec{e}_y)+(u_z\vec{e}_z)\wedge(v_z\vec{e}_z)\end{aligned}$$

On simplifie tout ceci en utilisant $\vec{e}_x\wedge\vec{e}_x=\vec{0}$, $\vec{e}_x\wedge\vec{e}_y=\vec{e}_z$, $\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x=-\vec{e}_z$, etc.
On obtient $\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_yv_z-u_zv_y)\vec{e}_x+(u_zv_x-u_xv_z)\vec{e}_y+(u_xv_y-u_yv_x)\vec{e}_z$.

Applications géométriques

- **Calcul d'aire :** l'aire du **parallélogramme** construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

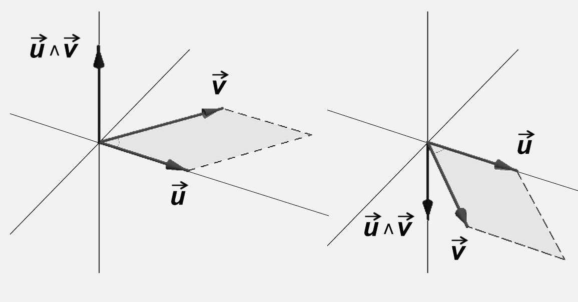


aire = base $(\|\vec{u}\|)\times$ hauteur $\left(\|\vec{v}\|\times|\sin(\theta)|\right) = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$

Remarque : dans le plan **orienté,**
- $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\theta)|$ représente l'aire **géométrique** (positive) du parallélogramme ;
- $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin(\theta)$ représente l'aire **algébrique** (avec un éventuel signe) du parallélogramme.

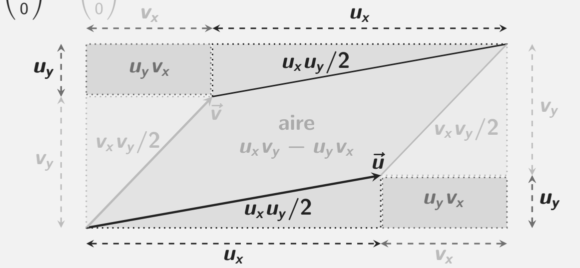
Applications géométriques

- **Calcul d'aire :** l'aire du **parallélogramme** construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.



Démonstration de l'aire d'un parallélogramme (cf. propriété 4.2)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ de composantes respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\0\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_x v_y - u_y v_x)\vec{e}_z$.



aire du parallélogramme = aire du grand rectangle
− aire des 2 triangles sur $\vec{u}$ − aire des 2 triangles sur $\vec{v}$
− aire des deux petits rectangles

$$(u_x + v_x)(u_y + v_y) - 2\times u_x u_y/2 - 2\times v_x v_y/2 - 2\,u_y v_x = u_x v_y - u_y v_x$$

Démonstration de l'addition (cf. propriété 4.2)

Lorsque les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** il est aisé de vérifier géométriquement la bilinéarité :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$$

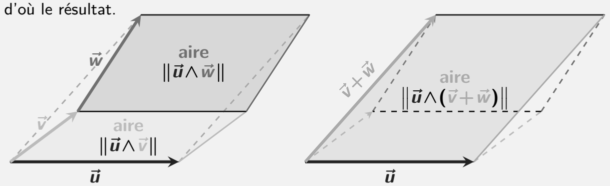
En effet, en notant $\vec{n}$ le vecteur unitaire orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ et $(\vec{u},\vec{w},\vec{n})$ soient des bases directes :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\vec{n} \qquad \vec{u}\wedge\vec{w} = \|\vec{u}\wedge\vec{w}\|\vec{n} \qquad \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \|\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})\|\vec{n}$$

Le schéma ci-dessous indique que

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| + \|\vec{u}\wedge\vec{w}\| = \|\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})\|$$

d'où le résultat.



aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$
+ aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{w}$
= aire du parallélogramme construit sur $\vec{v}+\vec{w}$

Applications géométriques

- Tester la **colinéarité** de deux vecteurs :

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\iff$ $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

- Tester l'**orthogonalité** de deux vecteurs :

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** $\iff$ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

- Tester la **coplanarité** de trois vecteurs :

  $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** $\iff$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = 0$
  $\iff$ $\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u}) = 0$
  $\iff$ $\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$

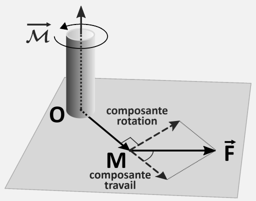
  Remarque : la quantité $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ s'appelle **produit mixte** des trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, ce produit est noté $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big)$ (cf. paragraphe 5.1).
  Il se trouve que les trois nombres $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u})$, $\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$ coïncident...
- Calcul d'un vecteur **orthogonal** à deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ non colinéaires : $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
- Calcul d'un vecteur **normal** à un plan défini par trois points A, B, C : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

Applications physiques

- Le **moment** d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point M par rapport à un autre point O est défini par

  $$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$$

  C'est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point, souvent appelé pivot.
  Il s'exprime en N · m (Newton mètre).

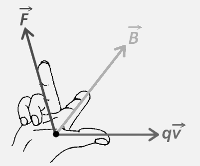


- La **relation de Lorentz** exprime la force magnétique exercée sur une particule de charge électrique, animée d'une vitesse dans un champ magnétique :

  $$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

  La force de Lorentz a toujours une puissance nulle car elle est constamment perpendiculaire au vecteur vitesse de la particule :

  $$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$$

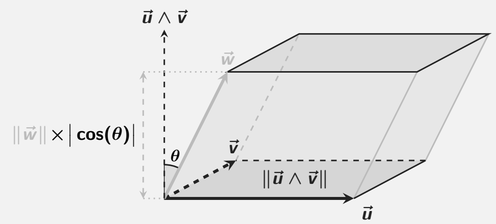


Définition 5.1 (Produit mixte)

*Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté. Le **produit mixte** de ces trois vecteurs est **le réel** $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$. Il est également noté $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.*

Interprétation géométrique

Le volume du **parallélépipède** construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par $\big|\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big)\big|$.



volume = base $(\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|)\times$ hauteur $(\|\vec{w}\|\times|\cos(\theta)|) = \big|\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big)\big|$

Propriété 5.2 (Permutations, trilinéarité)

1. *De l'interprétation du produit vectoriel en tant que volume d'un parallélépipède, on déduit l'invariance ou anti-invariance par permutations de $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big)$.*
   De manière plus précise :
   - a. *Le **produit mixte** est **antisymétrique** : si on échange 2 vecteurs (côte à côte), le résultat est multiplié par -1.*

     $$\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = -\big((\vec{v},\vec{u},\vec{w})\big) = -\big((\vec{u},\vec{w},\vec{v})\big) = -\big((\vec{w},\vec{v},\vec{u})\big)$$

   - b. *Le **produit mixte** est **invariant par permutations circulaires** :*

     $$\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = \big((\vec{v},\vec{w},\vec{u})\big) = \big((\vec{w},\vec{u},\vec{v})\big)$$

     Par exemple, la première égalité s'écrit $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$.
2. *Le **produit mixte** de trois vecteurs dont **deux sont colinéaires** est **nul**.*
3. *Le **produit mixte** est **trilinéaire**, c'est-à-dire **linéaire** par rapport à chaque variable :*

   $$\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{w}')\big) = \big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) + \big((\vec{u},\vec{v},\vec{w}')\big)$$
   $$\big((\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w})\big) = \lambda\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big)$$

   et de même avec les deux autres variables.

Propriété 5.3 (Expression analytique)

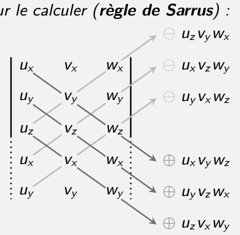
*On se place dans une **base orthonormée directe** $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ de l'espace.*

*Le **produit mixte** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}$ vaut :*

$$\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x - u_y v_x w_z - u_x v_z w_y$$

*Le **produit mixte** de trois vecteurs est en fait **un déterminant** de matrice (cf. cours de Mathématiques de 2e année). On le note alors de la manière suivante, et l'on dispose d'une méthode mnémotechnique pour le calculer (**règle de Sarrus**) :*

$$\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$



Applications géométriques

On peut
- tester la **coplanarité** de 3 vecteurs :
  $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont **coplanaires** $\iff$ $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = 0$
- tester l'**orientation** de 3 vecteurs :
  $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ forment une **base directe** $\iff$ $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) > 0$

Démonstration du test de coplanarité

1. ***Sens direct (⇒) :*** supposons $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ **coplanaires.**
   Alors l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des deux autres, par exemple $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ pour des réels a et b.
   Dans ce cas, par **trilinéarité** (cf. propriété 5.2) :
   $$\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = \big((\vec{u},\vec{v},a\vec{u}+b\vec{v})\big) = a\big((\vec{u},\vec{v},\vec{u})\big) + b\big((\vec{u},\vec{v},\vec{v})\big)$$
   Or, toujours d'après 5.2, $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{u})\big) = \big((\vec{u},\vec{v},\vec{v})\big) = 0$. D'où $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = 0$.
2. ***Sens réciproque (⇐) :*** supposons $\big((\vec{u},\vec{v},\vec{w})\big) = 0$.
   - a. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires,** alors $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires.
   - b. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non colinéaires.**
     D'après la définition 5.1 du produit mixte, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$.
     Or, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire l'ensemble des **combinaisons linéaires** $a\vec{u}+b\vec{v}$, $a,b\in\mathbb{R}$.
     Donc $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D'où $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont **coplanaires.**

Applications géométriques : équation d'un plan

Cas particulier : soit a, b, c trois réels non nuls et $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$.
Déterminons l'équation du plan $(\mathcal{P})$ défini par les trois points A, B, C.

Soit $M(x,y,z)$ un point générique de l'espace. On a :

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{P} &\iff \text{les 4 points } A,B,C,M \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \text{les 3 vecteurs } \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \big((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big) = 0 \end{aligned}$$

- **Premier calcul :** partant de $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}$:

  $$\big((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big) = \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = bc(x-a) + acy + abz$$

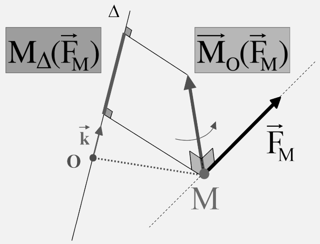
- **Deuxième calcul :** partant de $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$:

  $$\big((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big) = \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = bc(x-a) + acy + abz$$

En égalant alors $\big((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big)$ à 0, on tire l'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Application physique : moment d'une force par rapport à un axe

- Le **moment** d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M par rapport à un axe Δ orienté de vecteur directeur unitaire $\vec{k}$ passant par un point O est défini par
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{k} = ((\overrightarrow{OM}, \vec{F}, \vec{k}))$$
C'est une grandeur physique scalaire traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de cet axe.
Elle s'exprime en N · m (Newton mètre).



Remarque : cette quantité ne dépend pas du point O sur l'axe Δ.

Définition 6.1 (Barycentre de deux points)

Soit (A_1, m_1) et (A_2, m_2) deux points pondérés de l'espace tels que $A_1 \neq A_2$ et l'un des réels m_1,m_2 soit non nul.
*Un **barycentre** de $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$ est un point G de l'espace vérifiant*
$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}.$$

Analyse

Supposons qu'un tel G existe. Soit M un point quelconque de l'espace.
Avec la relation de Chasles :
$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0} \iff m_1(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_1}) + m_2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_2}) = \vec{0}$$
$$\iff (m_1 + m_2)\overrightarrow{MG} = m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2}$$
Disjonction de cas :

- si $m_1 + m_2 \neq 0$, alors, en prenant pour M l'origine O d'un repère, on obtient
$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OA_2}$$
Donc G existe et est défini de manière unique ;
- si $m_1 + m_2 = 0$, on obtient $m_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}) = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$ puisque $m_1 \neq 0$.
Cela donne $A_1 = A_2$, qui est absurde : G n'existe pas.

Ce qui démontre la propriété suivante :

Propriété 6.2 (Formule du barycentre)

- *Les points pondérés (A_1, m_1) et (A_2, m_2) de l'espace admettent un barycentre si et seulement si $m_1 + m_2 \neq 0$.*
- *Le barycentre, lorsqu'il existe, est **unique.***
- *Lorsque $m_1 + m_2 \neq 0$, si G est le barycentre de (A_1, m_1) et (A_2, m_2), pour tout point M de l'espace :*
$$\overrightarrow{MG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{MA_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{MA_2}.$$
En particulier, si O est l'origine d'un repère de l'espace alors :
$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OA_2}.$$
Si de plus $m_1 = m_2$, alors
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_2}.$$
*Dans ce cas, G est le **milieu** du segment $[A_1, A_2]$.*

Propriété 6.3 (Position relative du barycentre)

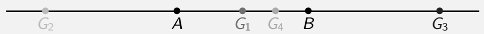
Soit G le barycentre des points pondérés $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$ de l'espace. Alors :

- *G appartient à la droite (A_1A_2),*
- *G appartient au segment $[A_1A_2]$ si et seulement si $m_1m_2 > 0$*
- *G est le plus près du point A_i dont la pondération m_i est la plus grande en valeur absolue : $|m_i| = \max(|m_1|, |m_2|)$,*
- *si $m_1 = m_2$ alors G est le milieu de $[A_1A_2]$. On l'appelle **isobarycentre** de A_1 et A_2.*

Exemple 6.4 (Position relative du barycentre)

Soit A, B deux points. Sur la figure ci-dessous, on a placé les barycentres

1. G_1 de $(A, 2), (B, 2)$:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \implies \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{cases}$$
2. G_2 de $(A, -2), (B, 1)$:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OG_2} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\ \implies \overrightarrow{AG_2} = -\overrightarrow{AB} \end{cases}$$
3. G_3 de $(A, 1), (B, -2)$:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OG_3} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \\ \implies \overrightarrow{AG_3} = 2\overrightarrow{AB} \end{cases}$$
4. G_4 de $(A, -1), (B, -3)$:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} \\ \implies \overrightarrow{AG_4} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \end{cases}$$



Définition 6.5 (Barycentre de n points)

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n points distincts de l'espace et soit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ n réels non tous nuls.
*Un **barycentre** des points pondérés (A_i, m_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$ est un point G de l'espace vérifiant*
$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$
*Lorsque tous les m_i sont égaux, on parle d'**isobarycentre**.*

On peut facilement généraliser les propriétés du barycentre de 2 points :

Propriété 6.6 (Formule du barycentre)

*Le barycentre des n points pondérés (A_i, m_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$ **existe et est unique** si et seulement si $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$.*
Dans ce cas, en notant G le barycentre, on a pour tout point M de l'espace :
$$\boxed{\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\mathcal{M}}\overrightarrow{MA_i}}$$
*$\mathcal{M}$ est la **masse totale** du système de points pondérés.*

Remarque 6.7 (Proportionnalité des poids)

Ce qui détermine un barycentre n'est pas le poids m_i en lui-même mais le **rapport** $\frac{m_i}{\mathcal{M}}$.

En effet, le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas si on multiplie tous les poids par un **même nombre.**

En d'autres termes, pour tout $\alpha \neq 0$, les systèmes de points pondérés
$$(A_i, m_i),\ i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } (A_i, \alpha m_i),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$
ont **même barycentre.**

Lorsque tous les poids m_i coïncident, l'**isobarycentre** G des n points est donné par
$$\boxed{\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}}$$

Propriété 6.8 (Coordonnées d'un barycentre)

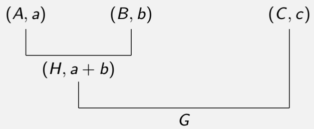
Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si G est barycentre de n points pondérés $(A_i, m_i), i \in \{1, \ldots, n\}$, la relation vectorielle $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\mathcal{M}}\overrightarrow{OA_i}$ permet de donner les coordonnées de G en fonction de celles des A_i :
$$(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{\mathcal{M}}\sum_{i=1}^{n} m_i x_{A_i}, \frac{1}{\mathcal{M}}\sum_{i=1}^{n} m_i y_{A_i}, \frac{1}{\mathcal{M}}\sum_{i=1}^{n} m_i z_{A_i}\right)$$
*Dans le cas d'un **isobarycentre** (c'est-à-dire lorsque tous les m_i sont identiques) :*
$$(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{A_i}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{A_i}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{A_i}\right)$$
Dans le plan les relations ci-dessus sont analogues, il suffit de supprimer la 3e coordonnée en z.

Exemple 6.9 (Coordonnées d'un barycentre)

Les coordonnées du barycentre de 2 points $((A, a), (B, b))$ avec $a + b \neq 0$ dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ sont $(x_G, y_G) = \left(\frac{ax_A + bx_B}{a + b}, \frac{ay_A + by_B}{a + b}\right)$.

Théorème 6.10 (Associativité des barycentres, cas de 3 points)

*Dans l'espace, si G est le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ avec $a + b + c \neq 0$, et si H est le barycentre de $(A, a), (B, b)$ avec $a + b \neq 0$, alors G est le barycentre de $(H, a + b)$ et (C, c). H est appelé **barycentre partiel.***



En d'autres termes :
$$\text{Barycentre}\big((A, a), (B, b), (C, c)\big)$$
$$= \text{Barycentre}\Big(\big(\text{Barycentre}((A, a), (B, b)), a + b\big), (C, c)\Big)$$

Démonstration de l'associativité (cf. théorème 6.10)

Soit G le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ et H le barycentre de $(A, a), (B, b)$.
Ils existent car $a + b \neq 0$ et $a + b + c \neq 0$.
On a pour tout point M de l'espace :
$$(a + b + c)\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad (a + b)\overrightarrow{MH} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}.$$
En remplaçant, on obtient $(a + b + c)\overrightarrow{MG} = (a + b)\overrightarrow{MH} + c\overrightarrow{MC}$ donc
$$\overrightarrow{MG} = \frac{a + b}{a + b + c}\overrightarrow{MH} + \frac{c}{a + b + c}\overrightarrow{MC}$$
ce qui prouve que G est le barycentre du $(H, a + b), (C, c)$.

Théorème 6.11 (Associativité du barycentre, cas de n points)

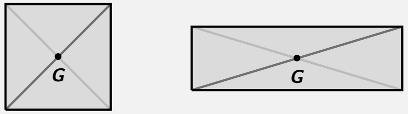
Dans l'espace, si :

- *G_A est le barycentre de p points pondérés $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, p\}$,*
- *G_B est le barycentre de q points pondérés $(B_j, n_j), j \in \{1, \dots, q\}$,*
- *G est le barycentre des $p+q$ points pondérés $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, p\}$ et $(B_j, n_j), j \in \{1, \dots, q\}$,*

alors, sous réserve que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i + \sum_{j=1}^{q} n_j \neq 0$, G est aussi le barycentre des deux points pondérés $\left(G_A, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i\right)$ et $\left(G_B, \displaystyle\sum_{j=1}^{q} n_j\right)$.

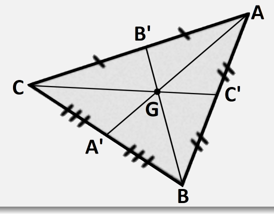
Barycentre et centre d'inertie

- Le **centre d'inertie** de n masses ponctuelles est le **barycentre** des points affectés de leur masse.
- Le **centre d'inertie** d'une plaque homogène ayant un centre de symétrie est précisément ce **centre de symétrie.**



- Le **centre d'inertie** d'une tige homogène est son **milieu**.
- Le **centre d'inertie** d'une plaque triangulaire homogène ABC est l'**isobarycentre** des points A, B, C.

  C'est le **point de concours** des **médianes** du triangle ABC.



Notions à retenir

- Produit scalaire
  - Maîtrise du calcul analytique et géométrique
  - Calcul de projections
  - Utilisation en physique
- Produit vectoriel
  - Visualisation de l'orientation
  - Maîtrise du calcul analytique et géométrique
  - Utilisation en physique
- Barycentres
  - Maîtrise du calcul
  - Utilisation en physique

Annexes

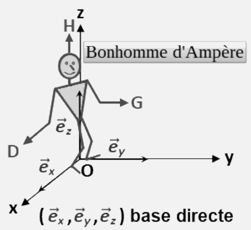
- Autres règles d'orientation
- Applications des produits scalaire, vectoriel et mixte
- Applications des barycentres

Orientation de l'espace

En physique, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

- **Règle du bonhomme d'ampère**

  *bras **droit** : $\vec{e}_x$*
  *bras **gauche** : $\vec{e}_y$*
  ***de bas en haut** : $\vec{e}_z$*



- **Règle de la rotation de la Terre**

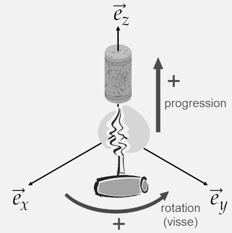
  La Terre tourne
  autour de son axe polaire
  orienté du Sud au Nord
  de l'Ouest vers l'Est.

Orientation de l'espace

En physique, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

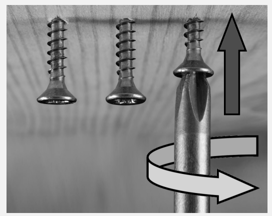
- **Règle du tire-bouchon**

  Un tire-bouchon
  *tenu dans la **main droite***
  que l'on tourne dans le sens
  *qui amène le **pouce** vers l'**index***
  ***visse** dans le bouchon.*



- **Règle du tourne-vis**

  Un tourne-vis
  *tenu dans la **main droite***
  que l'on tourne dans le sens
  *qui amène le **pouce** vers l'**index***
  ***visse** dans le support.*

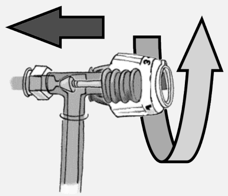


Orientation de l'espace

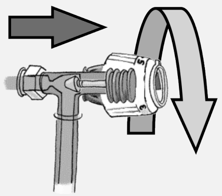
En physique, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

- **Règle du robinet**

  *Un bouton de robinet pris dans la **main droite***
  *que l'on tourne dans le sens qui amène le **pouce** vers l'**index***
  ***ferme** la canalisation.*



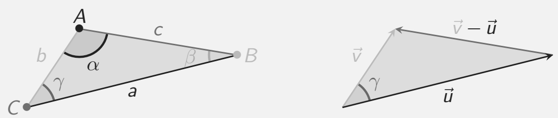
En tournant le robinet dans le sens DIRECT on FERME la canalisation



En tournant le robinet dans le sens INDIRECT on OUVRE la canalisation

Application trigonométrique : loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi)

On considère un triangle quelconque ABC de côtés $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ et d'angles (non orientés) $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$.
La **loi des cosinus** permet d'exprimer chacun des angles α, β, γ en fonction des côtés a, b, c du triangle.



Notons $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$.
On a alors $\overrightarrow{BA} = \vec{v} - \vec{u}$, $\|\vec{u}\| = a$, $\|\vec{v}\| = b$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = c$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab\cos(\gamma)$.
D'autre part, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

d'où l'on tire $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}}$

ou encore $\boxed{\cos(\gamma) = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$

Exercice B.1 (Projection plane)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On se donne :

- $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $ax + by + cz = d$ $(a, b, c, d$ non nuls$)$;
- $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $(\mathcal{P})$;
- $M(x_M, y_M, z_M)$ un point quelconque de l'espace ;
- $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de l'espace.

1. Donner un vecteur $\vec{n}$ unitaire normal à $(\mathcal{P})$. On note $(\mathcal{D})$ la droite passant A orthogonale à $\mathcal{P}$. Elle est alors déterminée par A et $\vec{n}$.
2. **Aspect vectoriel**
   a. Déterminer le projeté de $\overrightarrow{V}$ sur $(\mathcal{D})$. Donner son expression en fonction de $\vec{n}$ puis donner ses composantes.
   b. En déduire le projeté de $\overrightarrow{V}$ sur le plan $(\mathcal{P})$ en fonction de vecteurs déjà déterminés. Puis donner ses composantes.
3. **Aspect ponctuel**
   Déterminer les projetés de M sur $(\mathcal{D})$ et sur $(\mathcal{P})$ en fonction de vecteurs déterminés précédemment. Expliquer comment obtenir leurs coordonnées.

Solution (Projection plane)

❶ Le plan $(\mathcal{P})$ est caractérisé par les trois points $A(\frac{d}{a},0,0)$, $B(0,\frac{d}{b},0)$, $C(0,0,\frac{d}{c})$, soit encore par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{d}{a}\\ \frac{d}{b}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{d}{a}\\ 0\\ \frac{d}{c}\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires aux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}$.

Un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$ ssi il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui donne $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.

D'où les équations $b\alpha-a\beta=0$ et $c\alpha-a\gamma=0$. On a $\beta=\frac{b}{a}\alpha$ et $\gamma=\frac{c}{a}\alpha$.

En choisissant par exemple $\alpha=a$, on obtient le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

(Remarque : il suffit de supposer a,b,c non tous nuls.)

Solution (Projection plane)

❶ ***Autre méthode.***

Comme $A\in(\mathcal{P})$, on a $ax_A+by_A+cz_A=d$.

Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace et $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Le point M appartient à $(\mathcal{P})$ ssi $ax+by+cz=d$
ou encore ssi $ax+by+cz=ax_A+by_A+cz_A$
qui s'écrit aussi $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.
Or l'expression $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)$ n'est autre que le produit scalaire $\vec{N}\cdot\overrightarrow{AM}$.

Ainsi, $M\in(\mathcal{P})$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ étant un vecteur générique de la direction du plan $(\mathcal{P})$, on a trouvé un vecteur $\vec{N}$ orthogonal à $(\mathcal{P})$.

Solution (Projection plane)

❷ ⓐ On a $\vec{V}_{\mathcal{D}}=\vec{V}_{\vec{n}}=\dfrac{\vec{V}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}=\dfrac{av_x+bv_y+cv_z}{a^2+b^2+c^2}\vec{n}$.

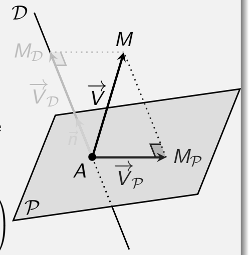
Composantes :

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2v_x+abv_y+acv_z\\ abv_x+b^2v_y+bcv_z\\ acv_x+bcv_y+c^2v_z\end{pmatrix}$$

ⓑ L'autre projection s'obtient en remarquant que $\vec{V}=\vec{V}_{\mathcal{P}}+\vec{V}_{\mathcal{D}}$ donc $\vec{V}_{\mathcal{P}}=\vec{V}-\vec{V}_{\mathcal{D}}$.

Composantes :

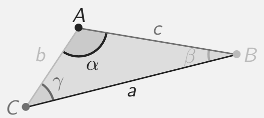
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}(b^2+c^2)v_x-abv_y-acv_z\\ -abv_x+(a^2+c^2)v_y-bcv_z\\ -acv_x-bcv_y+(a^2+b^2)v_z\end{pmatrix}$$



❸ En choisissant $\vec{V}=\overrightarrow{AM}$, on trouve $\overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}}=\vec{V}_{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}}=\vec{V}_{\mathcal{P}}$, donc $M_{\mathcal{D}}=A+\vec{V}_{\mathcal{D}}$ et $M_{\mathcal{P}}=A+\vec{V}_{\mathcal{P}}$.
On peut ainsi obtenir les coordonnées de $M_{\mathcal{D}}$ et $M_{\mathcal{P}}$ à l'aide des composantes de $\vec{V}_{\mathcal{D}}$ et $\vec{V}_{\mathcal{P}}$ en changeant les composantes v_x,v_y,v_z en $x-x_A, y-y_A, z-z_A$.

Applications trigonométriques : loi des sinus

On considère un triangle quelconque ABC de côtés $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ et d'angles (non orientés) $\alpha=\widehat{A}$, $\beta=\widehat{B}$, $\gamma=\widehat{C}$.
La **loi des sinus** permet d'exprimer une relation entre les rapports des sinus de chacun des angles α,β,γ par leur côté opposé relatif a,b,c du triangle.



En calculant l'aire du triangle à l'aide du produit vectoriel de plusieurs façons :

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\|$$

on tire

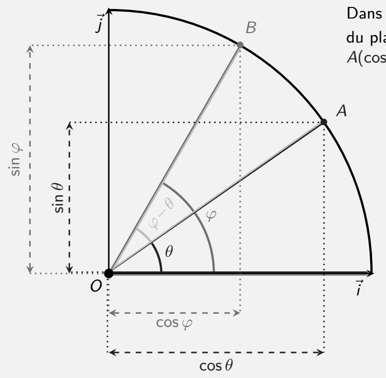
$$bc\sin(\alpha)=ac\sin(\beta)=ab\sin(\gamma)$$

soit, après division par abc :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}}$$

Applications trigonométriques : formulaire

- **Formule trigonométrique :** $\boxed{\cos(\varphi-\theta)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi}$



Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, soit les points $A(\cos\theta,\sin\theta)$ et $B(\cos\varphi,\sin\varphi)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\\ \overrightarrow{OB}=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}\end{cases}$$

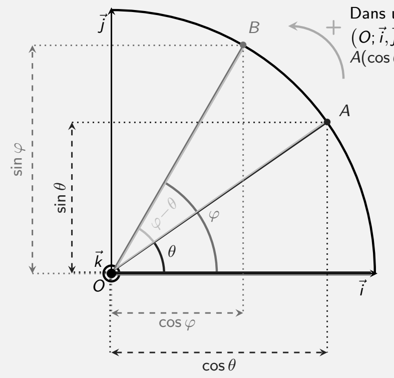
Produit scalaire

1. *Calcul analytique :*
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$
$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi$

2. *Calcul géométrique :*
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$
$\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$
$=\cos(\varphi-\theta)$

Applications trigonométriques : formulaire

- **Formule trigonométrique :** $\boxed{\sin(\varphi-\theta)=\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi}$



Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit les points $A(\cos\theta,\sin\theta,0)$ et $B(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\\ \overrightarrow{OB}=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}\end{cases}$$

Produit vectoriel

1. *Calcul analytique :*
$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=$
$(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)\,\vec{k}$

2. *Calcul géométrique :*
$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=$
$\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\vec{k}$
$=\sin(\varphi-\theta)\vec{k}$

Applications géométriques : distance dans l'espace

- **Distance d'un point à un plan :** soit $(\mathcal{P})$ un plan et M un point de l'espace. On cherche à calculer la distance du point M au plan $(\mathcal{P})$.

  - ***Approche géométrique***

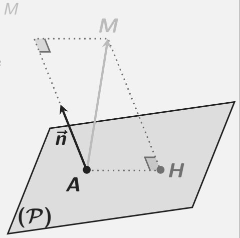
    $(\mathcal{P})$ est défini par le point A et le vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathcal{P})$.

    Notons H la projection orthogonale du point M sur le plan $(\mathcal{P})$.

    La distance du point M au plan $(\mathcal{P})$ coïncide avec la distance entre les points M et H : $d(M,\mathcal{P})=MH$.

    C'est aussi le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur le vecteur $\vec{n}$ qui est donnée par la propriété 2.6. Ainsi :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P})=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$



Applications géométriques : distance dans l'espace

- **Distance d'un point à un plan :** soit $(\mathcal{P})$ un plan et M un point de l'espace. On cherche à calculer la distance du point M au plan $(\mathcal{P})$.

  - ***Approche analytique***

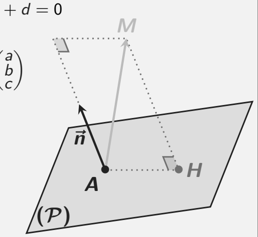
    L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

    $(\mathcal{P})$ est défini par l'équation $ax+by+cz+d=0$ (a,b,c non tous nuls) et $M(x,y,z)$.

    Un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est donné par $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (cf. exercice B.1).

    D'après l'approche précédente :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P})=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



Applications géométriques : distance dans l'espace

- **Distance d'un point à un plan : exemple numérique**

  Soit le point $M(6,3,4)$ et $(\mathcal{P})$ le plan défini par les points $A(1,1,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(0,1,1)$. On cherche la distance de M à $(\mathcal{P})$.
  C'est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AC}$ avec les vecteurs $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. On a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

  Un point $P(x,y,z)$ quelconque de l'espace appartient à $(\mathcal{P})$ ssi $\overrightarrow{AP}$ est orthogonal à $\vec{n}$, i.e. $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$, d'où l'équation $x+z=1$.

  Autre méthode : on recherche une équation de $(\mathcal{P})$ de la forme $ax+by+cz+d=0$.
  En traduisant $A,B,C\in(\mathcal{P})$, on trouve le système $a+b+d=0, c+d=0, b+c+d=0$, d'où l'on tire $a=c=-d$ et $b=0$.
  Ainsi $(\mathcal{P})$ est caractérisé par l'équation $x+z-1=0$.
  Enfin, la distance du point M au plan $(\mathcal{P})$ est donnée par

$$d(M,\mathcal{P})=\frac{|1\times6+0\times3+1\times4-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

C. Applications du produit vectoriel — c) Rotation dans l'espace

Applications géométriques : rotation dans l'espace

- **Rotation dans l'espace**
  Soit $(\mathcal{D})$ une droite orientée de vecteur unitaire $\vec{n}$ dans l'espace orienté et A un point de $(\mathcal{D})$.

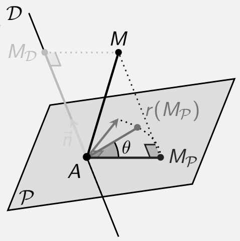
  Introduisons $(\mathcal{P})$ le plan orthogonal à $(\mathcal{D})$ passant par A.

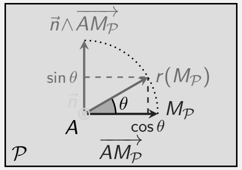
  Pour tout point de l'espace M, notons $M_{\mathcal{D}}$ et $M_{\mathcal{P}}$ ses projections orthogonales sur $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$. On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}} + \overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}}$.
  On dispose alors d'un repère **orthogonal direct** $(A; \overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}}, \vec{n}\wedge\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}}, \vec{n})$ de l'espace.

  Soit θ un angle. Considérons dans le plan $(\mathcal{P})$ la rotation r de centre A et d'angle θ.

  En se plaçant dans le repère orthogonal direct $(A; \overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}}, \vec{n}\wedge\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}})$ du plan $(\mathcal{P})$, on voit que l'image $r(M)$ de M par r est caractérisée par

$$\overrightarrow{Ar(M_{\mathcal{P}})} = (\cos\theta)\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}} + (\sin\theta)(\vec{n}\wedge\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}}).$$





C. Applications du produit vectoriel — c) Rotation dans l'espace

Applications géométriques : rotation dans l'espace

- **Rotation dans l'espace**
  On définit ensuite dans l'espace R la rotation de centre A, d'axe $(\mathcal{D})$ et d'angle θ selon

$$\overrightarrow{AR(M)} = \overrightarrow{Ar(M_{\mathcal{P}})} + \overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}}$$

  Or $\overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}} = (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n})\vec{n}$, donc
  $\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}} = \overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n})\vec{n}$.

  Puis $\vec{n}\wedge\overrightarrow{AM_{\mathcal{P}}} = \vec{n}\wedge(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}}) = \vec{n}\wedge\overrightarrow{AM}$ puisque $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}}$ sont colinéaires.

  En conséquence, on trouve

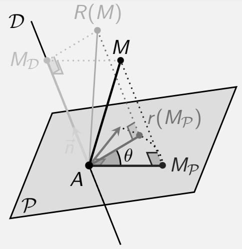
$$\overrightarrow{AR(M)} = (\cos\theta)\left[\overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] + (\sin\theta)(\vec{n}\wedge\overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n})\vec{n}$$

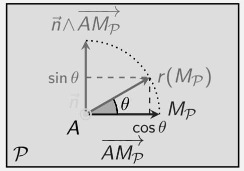
  c'est-à-dire :

$$\boxed{\overrightarrow{AR(M)} = (\cos\theta)\overrightarrow{AM} + (\sin\theta)(\vec{n}\wedge\overrightarrow{AM}) + (1-\cos\theta)(\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n})\vec{n}}$$

  Cas particulier : rotation d'**angle droit** $(\theta = \frac{\pi}{2})$

$$\overrightarrow{AR(M)} = \vec{n}\wedge\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n})\vec{n}$$





D. Applications du produit mixte — a) Équation d'un plan

Applications géométriques : équation d'un plan

Cas général : soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $u\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}, v\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

Déterminons l'équation du plan $(\mathcal{P})$ défini par le points A et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

Soit $M(x, y, z)$ un point générique de l'espace. On a :

$$M \in \mathcal{P} \iff \text{les 3 vecteurs } \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ sont coplanaires}$$
$$\iff ((\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = 0$$

Notons a, b, c les composantes du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

$$a = \begin{vmatrix}u_y & v_y\\u_z & v_z\end{vmatrix} = u_y v_z - u_z v_y, \quad b = -\begin{vmatrix}u_x & v_x\\u_z & v_z\end{vmatrix} = u_z v_x - u_x v_z, \quad c = \begin{vmatrix}u_x & v_x\\u_y & v_y\end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

- **Premier calcul :**
$$((\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = \overrightarrow{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$
- **Deuxième calcul :**
$$((\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = \begin{vmatrix}x - x_A & u_x & v_x\\y - y_A & u_y & v_y\\z - z_A & u_z & v_z\end{vmatrix} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$

Notons enfin $d = ax_A + by_A + cz_A$.

En égalant alors $((\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}))$ à 0, on tire l'équation $ax + by + cz = d$.

D. Applications du produit mixte — a) Équation d'un plan

Exercice D.1

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On donne $\vec{v}_1\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2\begin{pmatrix}4\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3\begin{pmatrix}x\\13\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer y et z pour que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ soient **colinéaires.**
   Réponse : *on a* $\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2\begin{pmatrix}-5y\\30-3z\\3y\end{pmatrix}$.
   *Donc : $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont **colinéaires** ssi $\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2 = \vec{0}$ ssi $y = 0$ et $z = 10$.*
2. Déterminer x pour que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ soient **orthogonaux.**
   Réponse : *on a* $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 = 2x + 6$.
   *Donc : $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ sont **orthogonaux** ssi $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 = 0$ ssi $x = -3$.*
3. Avec la valeur de x obtenue en question 2, quelle condition doivent vérifier y et z pour que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ soient **coplanaires ?**
   Qu'observe-t-on lorsque y et z prennent les valeurs obtenues en question 1 ?
   Réponse : $((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)) = \begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\0 & y & 13\\3 & z & 2\end{vmatrix} = 13y - 26z + 156 = 13(y - 2z + 12)$.
   *Donc : $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont **coplanaires** ssi $((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)) = 0$ ssi $y - 2z + 12 = 0$.*
   *On observe que cette condition est satisfaite en particulier pour $y = 0$ et $z = 6$, ce qui était prévisible puisque dans ce cas, les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont **colinéaires.***

D. Applications du produit mixte — b) Distance dans l'espace

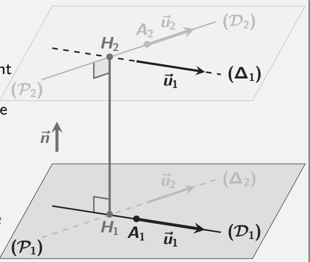
Applications géométriques : distance entre deux droites de l'espace

- Soit $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites de l'espace **non parallèles non sécantes**.
  La droite $(\mathcal{D}_1)$ est définie par un point A_1 et un vecteur $\vec{u}_1$, et la droite $(\mathcal{D}_2)$ est définie par un point A_2 et un vecteur $\vec{u}_2$.
  On cherche à calculer la distance entre $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.

  * Notons $\vec{n} = \vec{u}_1\wedge\vec{u}_2$. $\vec{n}$ est un vecteur normal aux droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.
    Introduisons :
    * $(\mathcal{P}_1)$ le plan orthogonal à $\vec{n}$ contenant la droite $(\mathcal{D}_1)$;
    * (Δ_2) la droite projection orthogonale de $(\mathcal{D}_2)$ sur $(\mathcal{P}_1)$;
    * H_1 le point d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ et (Δ_2).

    On introduit de même les objets géométriques similaires $(\mathcal{P}_2)$, (Δ_1), H_2 relatifs à la droite $(\mathcal{D}_2)$.

    La droite (H_1H_2) est la **perpendiculaire commune** à $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.

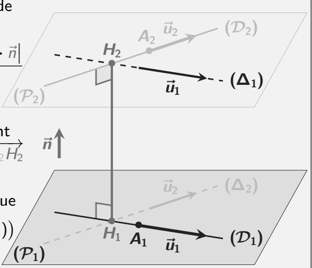


D. Applications du produit mixte — b) Distance dans l'espace

Applications géométriques : distance entre deux droites de l'espace

- Soit $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites de l'espace **non parallèles non sécantes**.
  La droite $(\mathcal{D}_1)$ est définie par un point A_1 et un vecteur $\vec{u}_1$, et la droite $(\mathcal{D}_2)$ est définie par un point A_2 et un vecteur $\vec{u}_2$.
  On cherche à calculer la distance entre $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.

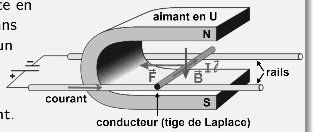
  * La distance entre $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ coïncide avec la distance entre H_1 et H_2 :
$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = H_1H_2 = \|\overrightarrow{H_1H_2}\| = \frac{|\overrightarrow{H_1H_2}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$
    En décomposant ensuite $\overrightarrow{H_1H_2}$ selon $\overrightarrow{H_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2H_2}$ et en remarquant que $\overrightarrow{A_1H_1}$ est colinéaire à $\vec{u}_1$ et que $\overrightarrow{A_2H_2}$ est colinéaire à $\vec{u}_2$, donc que $\overrightarrow{A_1H_1}$ et $\overrightarrow{A_2H_2}$ sont orthogonaux à $\vec{n}$, on voit que $\overrightarrow{H_1H_2}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\vec{n} = ((\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2))$
    Ainsi :
$$\boxed{d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|((\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2))|}{\|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\|}}$$

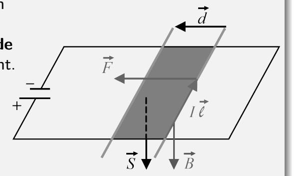


D. Applications du produit mixte — c) Force de Laplace

Application physique : force de Laplace

- Le dispositif des **rails de Laplace** consiste en deux rails métalliques parallèles situés dans l'entrefer d'un aimant en U engendrant un champ magnétique $\vec{B}$.
  On y dépose une tige de longueur ℓ susceptible de se déplacer sans frottement.
  Si on relie les deux rails à un générateur, un courant continu d'intensité I circule dans le circuit, et provoque une force $\vec{F}$ dite **force de Laplace** sur la tige la mettant en mouvement.
  La force $\vec{F}$ s'exprime selon la relation
$$\vec{F} = I\,\vec{\ell}\wedge\vec{B}$$
  le vecteur $\vec{\ell}$ étant dirigé le long de la tige dans le sens du courant.





Le travail de $\vec{F}$ pendant un déplacement $\vec{d}$ de la tige le long des rails se calcule, en notant $\vec{S} = \vec{d}\wedge\vec{\ell}$ et Φ le flux coupé à travers la surface balayée par la tige, selon

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = I(\vec{\ell}\wedge\vec{B})\cdot\vec{d} = I((\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{d}))$$
$$= I((\vec{d}, \vec{\ell}, \vec{B})) = I(\vec{d}\wedge\vec{\ell})\cdot\vec{B} = I\vec{B}\cdot\vec{S} = I\Phi$$

E. Applications des barycentres — a) Moyennes statistiques

Barycentre et moyennes multiples

On considère un groupe de n élèves passant m épreuves.
Pour $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant m$, notons N_{ij} la note obtenue à la je épreuve par l'élève n° i.

épreuve / élève	n° 1 coef. α_1	n° 2 coef. α_2	$\cdots$	n° m coef. α_m	moyenne élève
n° 1	N_{11}	N_{12}	$\cdots$	N_{1m}	$\boldsymbol{M''_1}$
n° 2	N_{21}	N_{22}	$\cdots$	N_{2m}	$\boldsymbol{M''_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n° n	N_{n1}	N_{n2}	$\cdots$	N_{nm}	$\boldsymbol{M''_n}$
moyenne épreuve	$\boldsymbol{M'_1}$	$\boldsymbol{M'_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{M'_m}$	$\boldsymbol{M}$

- $\boldsymbol{M'_j} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} N_{ij}$ est la moyenne (arithmétique) du groupe à la je épreuve
- $\boldsymbol{M''_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\alpha_j N_{ij} / \sum_{j=1}^{m}\alpha_j$ est la moyenne (pondérée) de toutes les épreuves de l'élève n° i

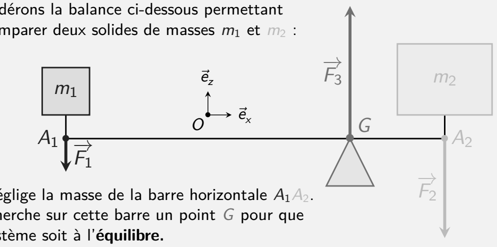
Le théorème de composition des barycentres permet de calculer la moyenne générale de toutes les épreuves du groupe et se traduit par l'identité entre les « moyennes des moyennes » :

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{n}N_{ij} / \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{n} = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\boldsymbol{M'_j} / \sum_{j=1}^{m}\alpha_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M''_i}$$

E. Applications des barycentres — b) Centre d'inertie

Barycentre et centre d'inertie (balance)

Considérons la balance ci-dessous permettant de comparer deux solides de masses m_1 et m_2 :



On néglige la masse de la barre horizontale A_1A_2.
On cherche sur cette barre un point G pour que ce système soit à l'**équilibre.**

Bilan des forces :

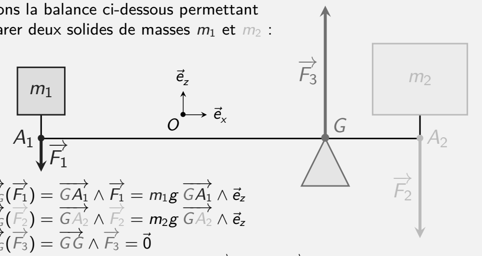
- poids du solide de masse m_1 : $\vec{F_1} = -m_1 g\,\vec{e}_z$, appliqué en A_1 ;
- poids du solide de masse m_2 : $\vec{F_2} = -m_2 g\,\vec{e}_z$, appliqué en A_2 ;
- réaction du support : $\vec{F_3} = F_3\vec{e}_z$, appliquée en G.

Les objets étant immobiles, d'après la relation fondamentale de la statique, la somme des forces et la somme des moments (en n'importe quel point) sont nulles :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0} \quad et \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F_2}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F_3}) = \vec{0}$$

Barycentre et centre d'inertie (balance)

Considérons la balance ci-dessous permettant de comparer deux solides de masses m_1 et m_2 :



Or $\begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F_1}) = \overrightarrow{GA_1} \wedge \vec{F_1} = m_1 g\, \overrightarrow{GA_1} \wedge \vec{e}_z \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F_2}) = \overrightarrow{GA_2} \wedge \vec{F_2} = m_2 g\, \overrightarrow{GA_2} \wedge \vec{e}_z \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F_3}) = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{F_3} = \vec{0} \end{cases}$

L'équation des moments donne $g(m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2}) \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$.

Comme $g \neq 0$ et $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2}$ est colinéaire à $\vec{e}_x$, on en déduit l'équation :

$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$$

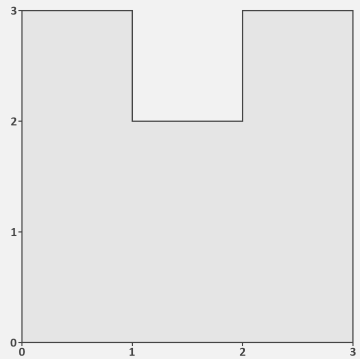
Ainsi, le **point d'équilibre** G n'est autre que le **barycentre** de $A_1(m_1)$ et $A_2(m_2)$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{OA_2}$$

Par exemple, en choisissant $O = A_1$: $\overrightarrow{A_1G} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{A_1A_2}$.

Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

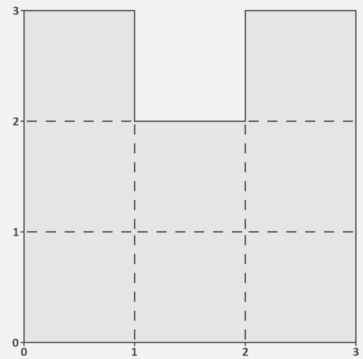


Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Première méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.



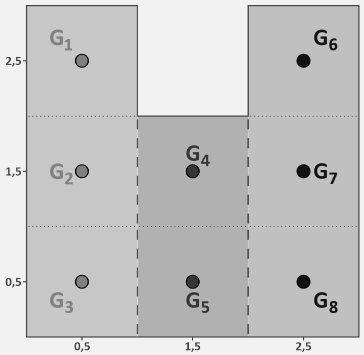
Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Première méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{OG_k}$$



Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

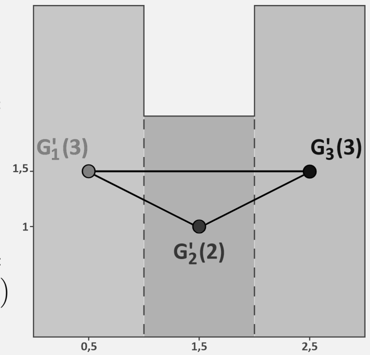
Première méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{OG_k}$$

- Il coïncide avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de 3 bandes de base 1u et de hauteurs 2u et 3u pondérés par les aires relatives :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\left(3\overrightarrow{OG'_1} + 2\overrightarrow{OG'_2} + 3\overrightarrow{OG'_3}\right)$$



Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Première méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

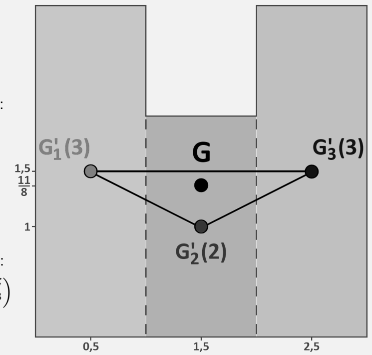
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{OG_k}$$

- Il coïncide avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de 3 bandes de base 1u et de hauteurs 2u et 3u pondérés par les aires relatives :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\left(3\overrightarrow{OG'_1} + 2\overrightarrow{OG'_2} + 3\overrightarrow{OG'_3}\right)$$

- En choisissant $O = G'_2$:

$$\overrightarrow{G'_2G} = \frac{3}{8}\left(\overrightarrow{G'_2G'_1} + \overrightarrow{G'_2G'_3}\right)$$

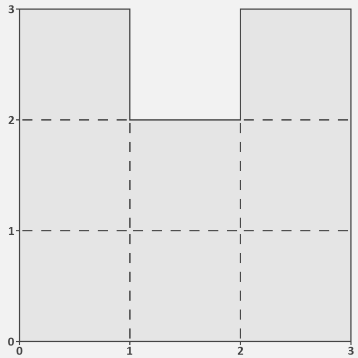


Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Deuxième méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.



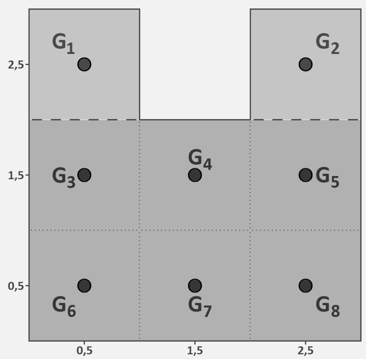
Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Deuxième méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{OG_k}$$



Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

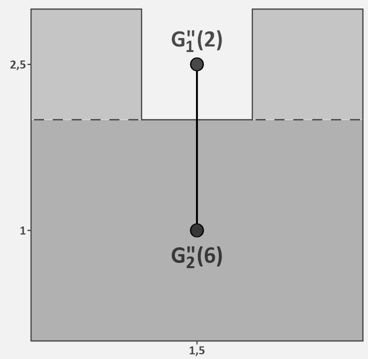
Deuxième méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{OG_k}$$

- Il coïncide aussi avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de deux carrés de côté 1u et d'un rectangle de côtés 2u et 3u, pondérés par les aires relatives :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\left(2\overrightarrow{OG''_1} + 6\overrightarrow{OG''_2}\right)$$

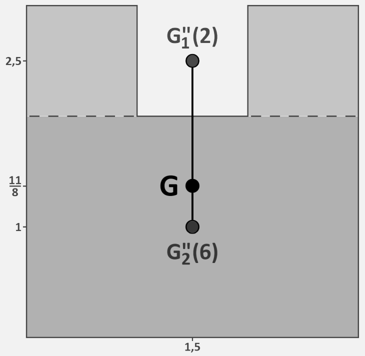


Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Deuxième méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :
  $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{OG_k}$$
- Il coïncide aussi avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de deux carrés de côté 1u et d'un rectangle de côtés 2u et 3u, pondérés par les aires relatives :
  $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\left(2\overrightarrow{OG_1''} + 6\overrightarrow{OG_2''}\right)$$
- En choisissant $O = G_2''$:
  $$\overrightarrow{G_2''G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_2''G_1''}$$

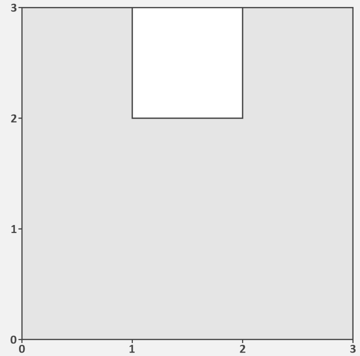


Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Troisième méthode

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.

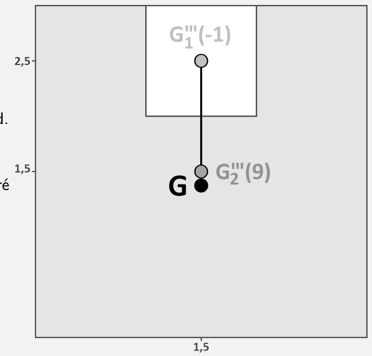


Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Troisième méthode

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.
- Partant de la plaque complète de **centre d'inertie** G_2''' (de masse 9 fois celle d'un carré de côté 1u) :
  $$\overrightarrow{OG_2'''} = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OG_1'''} + 8\overrightarrow{OG}\right)$$

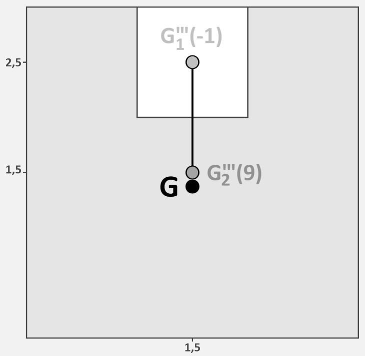


Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Troisième méthode

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.
- Partant de la plaque complète de **centre d'inertie** G_2''' (de masse 9 fois celle d'un carré de côté 1u) :
  $$\overrightarrow{OG_2'''} = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OG_1'''} + 8\overrightarrow{OG}\right)$$
  d'où l'on tire
  $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\left(9\overrightarrow{OG_2'''} - \overrightarrow{OG_1'''}\right)$$



Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Troisième méthode

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.
- Partant de la plaque complète de **centre d'inertie** G_2''' (de masse 9 fois celle d'un carré de côté 1u) :
  $$\overrightarrow{OG_2'''} = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OG_1'''} + 8\overrightarrow{OG}\right)$$
  d'où l'on tire
  $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\left(9\overrightarrow{OG_2'''} - \overrightarrow{OG_1'''}\right)$$
- En choisissant $O = G_2'''$:
  $$\overrightarrow{G_2'''G} = \frac{1}{8}\overrightarrow{G_1'''G_2'''}$$