

# Fonctions usuelles

*Aimé Lachal*

Cours de mathématiques  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

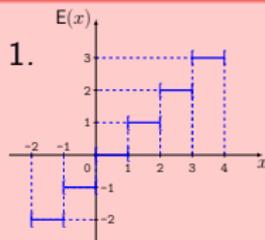
- 1 Fonction partie entière
- 2 Fonctions log/exp/puissances
  - Fonctions logarithmes
  - Fonctions exponentielles
  - Fonctions puissances
- 3 Fonctions trigonométriques
  - Fonction tangente
  - Fonction arcsin
  - Fonction arccos
  - Fonction arctan
  - Exemples
- 4 Fonctions hyperboliques
  - Définition/Variations
  - Graphes
  - Interprétation géométrique

- 1 Fonction partie entière
- 2 Fonctions log/exp/puissances
- 3 Fonctions trigonométriques
- 4 Fonctions hyperboliques

## Théorème-définition 1.1 (Partie entière)

Pour tout réel  $x$ , il existe un **unique entier**  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .

Cet entier est appelé **partie entière** du réel  $x$ , il est noté  $E(x)$  ou  $\lfloor x \rfloor$ . C'est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .



## Proposition 1.2 (Propriétés)

Soit  $x$  un nombre réel. On a :

- 1  $E(x) \leq x < E(x) + 1$  et  $x - 1 < E(x) \leq x$  ;
- 2  $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$  ;
- 3  $\forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$ .

## Exemple 1.3 (Partie entière et décimales (facultatif))

Soit  $x$  un réel **positif** et  $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  son **écriture décimale propre** ( $a_0$  étant un naturel et  $a_1, a_2, a_3, \dots$  des chiffres ne contenant pas de suite infinie de 9). Alors

- le nombre  $a_0$  est la **partie entière** de  $x$  :  $a_0 = E(x)$  ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $x$  s'obtient selon

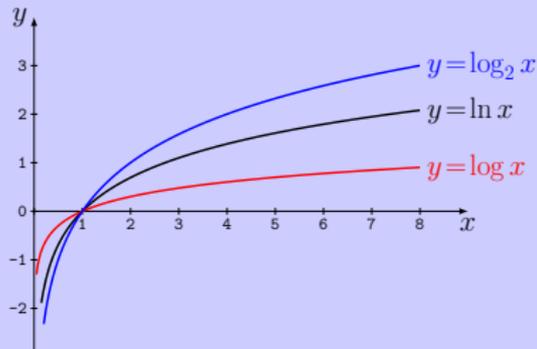
$$a_n = E(10^n x) - 10 E(10^{n-1} x).$$

- 1 Fonction partie entière
- 2 Fonctions log/exp/puissances
  - Fonctions logarithmes
  - Fonctions exponentielles
  - Fonctions puissances
- 3 Fonctions trigonométriques
- 4 Fonctions hyperboliques

### Définition 2.1 (Fonctions logarithmes)

Soit  $a$  et  $b$  des réels strictement positifs,  $b$  étant **différent de 1**.

On note  $\log_b(a)$  (et on lit : « log de  $a$  en base  $b$  ») le nombre  $\frac{\ln a}{\ln b}$ .



**Cas particuliers :**

- lorsque  $b = e$ ,  $\log_e$  est le logarithme **népérien** ;
- lorsque  $b = 2$ ,  $\log_2$  est appelé logarithme **binaire** (utilisé notamment en informatique, théorie de l'information...);
- lorsque  $b = 10$ ,  $\log_{10}$  est appelé logarithme **décimal** (noté simplement  $\log$ , utilisé notamment en chimie (pH), acoustique (décibel)...).

### Proposition 2.2 (Propriétés)

Pour tous réels  $a$  et  $a'$  strictement positifs, tout réel  $b$  strictement positif différent de 1 et tout entier relatif  $n$ , on a :

- $\log_b(aa') = \log_b a + \log_b a'$
- $\log_b\left(\frac{a}{a'}\right) = \log_b a - \log_b a'$
- $\log_b(a^n) = n \log_b a$

### Définition 2.3 (Exponentiation)

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $b$  un réel quelconque.

On note  $a^b$  (et on lit : «  $a$  exposant  $b$  ») le nombre positif  $e^{b \ln a}$ .

### Proposition 2.4 (Propriétés)

Pour tous réels  $a$  et  $a'$  strictement positifs et tous réels  $b$  et  $b'$ , on a :

- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$  et  $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$  et  $\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$  et  $a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$

En particulier, pour tout réel  $a$  strictement positif et tout entier naturel  $n$  non nul, on retrouve  $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ .

### Remarque 2.5 (Exponentiation en chaîne)

L'exponentiation n'est **ni commutative ni associative** :

en général on a  $a^b \neq b^a$  et  $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ .

**Définition 2.6 (Fonctions exponentielles)**

Soit  $a$  un réel strictement positif. On appelle **fonction exponentielle de base  $a$**  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ , notée  $\exp_a$ , définie par  $\exp_a(x) = a^x$ .

**Proposition 2.7 (Propriétés)**

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $\exp_a$  la fonction exponentielle de base  $a$ .

①  $\exp_a$  est **dérivable** sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\exp'_a : x \mapsto (\ln a)a^x$ .

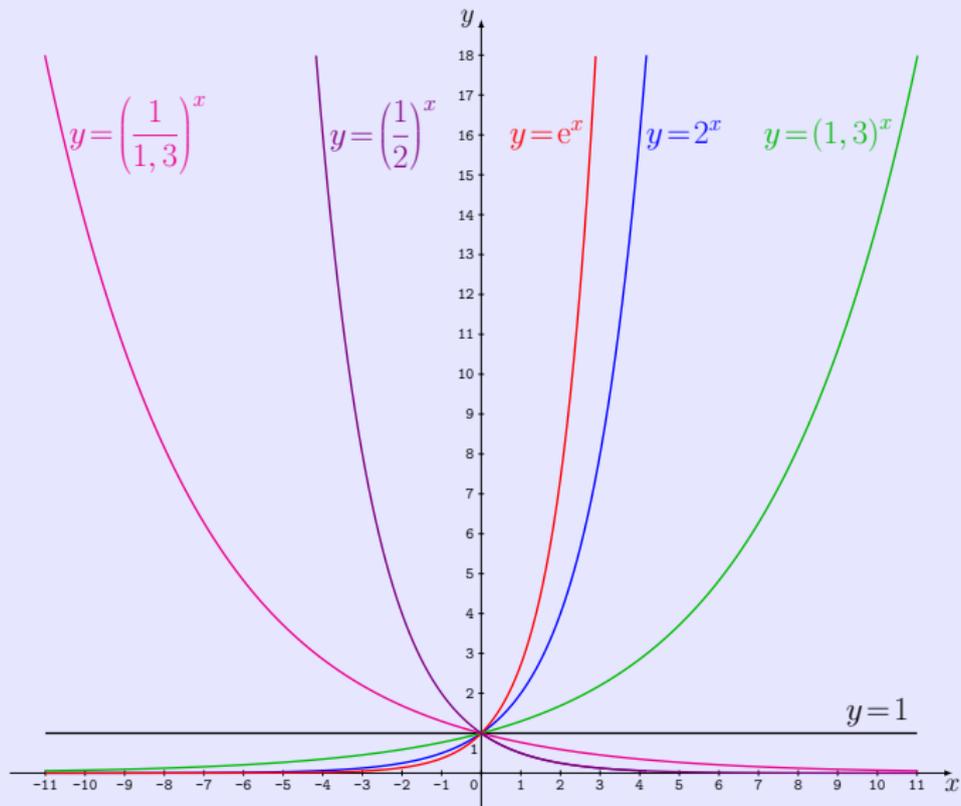
② Pour  $0 < a < 1$ ,  $\exp_a$  est **strictement décroissante** sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0.$$

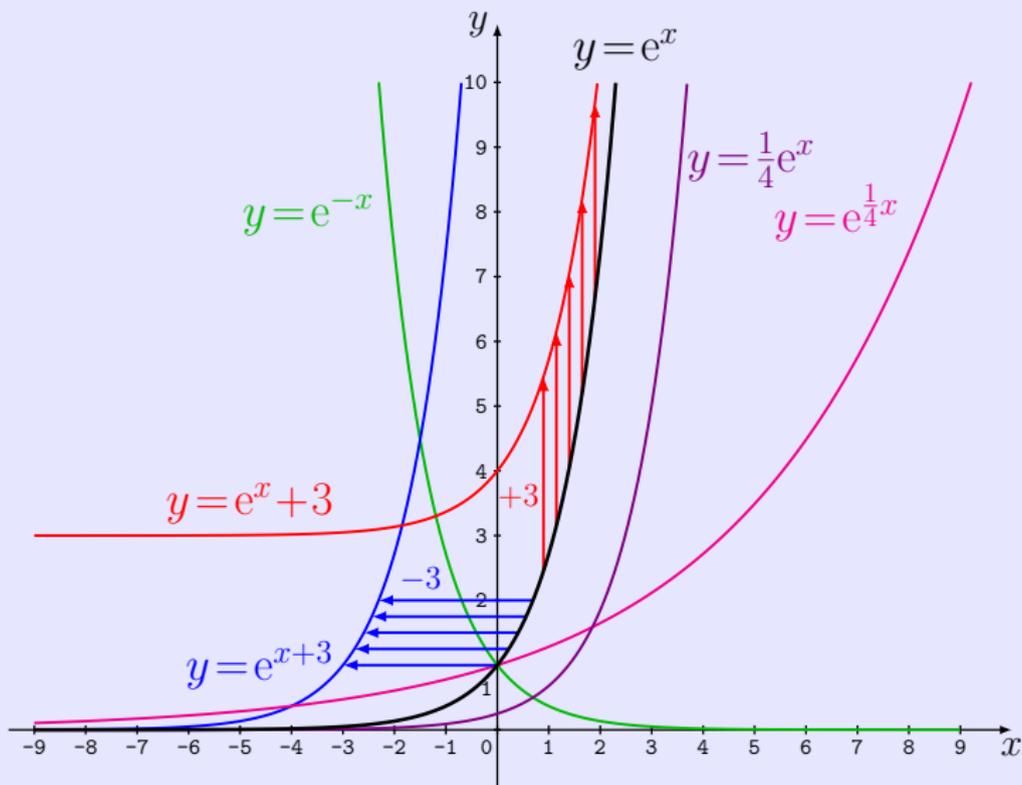
③ Pour  $a > 1$ ,  $\exp_a$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty.$$

④ Les courbes de  $\exp_a$  et  $\exp_{\frac{1}{a}}$  sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles

### Définition 2.8 (Fonctions puissances)

Soit  $a$  un réel quelconque. On appelle **fonction puissance d'exposant  $a$**  l'application de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$  qui à tout réel  $x > 0$  associe le réel  $x^a$ .

### Proposition 2.9 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant  $a$  est :

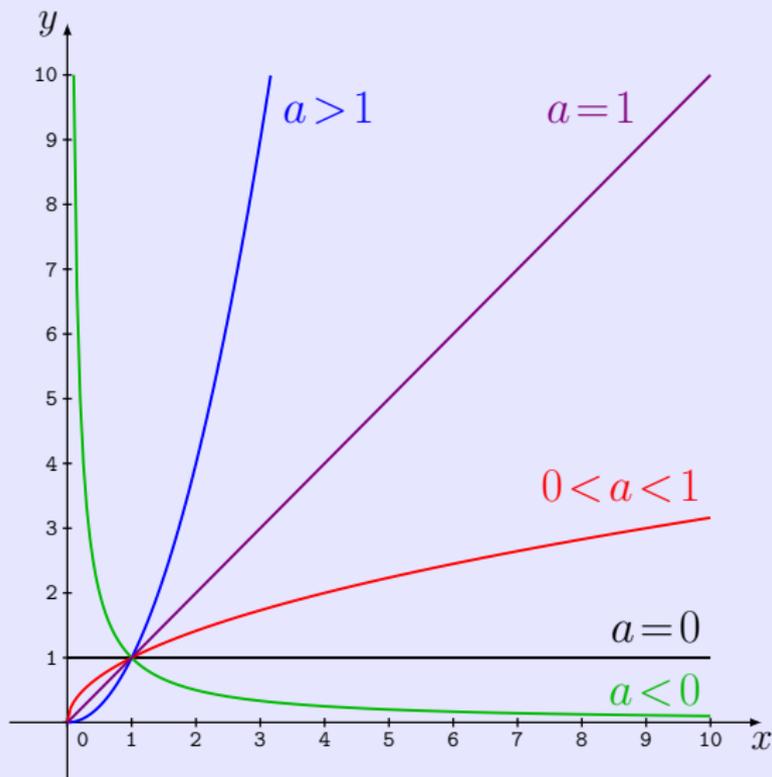
- ① **dérivable** sur  $]0, +\infty[$  de fonction dérivée  $x \mapsto ax^{a-1}$  ;
- ② **strictement croissante** sur  $]0, +\infty[$  **si  $a > 0$**  avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$  ;
- ③ **strictement décroissante** sur  $]0, +\infty[$  **si  $a < 0$**  avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$  ;
- ④ **bijective** lorsque  $a \neq 0$  de réciproque la fonction puissance d'exposant  $\frac{1}{a}$ .

### Remarque 2.10 (Extension (facultatif))

Pour tout entier **impair**  $n$ , la fonction puissance d'exposant  $n$  peut se prolonger en une bijection définie de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui permet de définir la fonction puissance d'exposant  $\frac{1}{n}$  sur  $\mathbb{R}$  comme réciproque. En particulier :  $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^{\frac{1}{n}} = -x^{\frac{1}{n}}$ .

Plus généralement, on peut définir pour tout rationnel de la forme  $\frac{p}{2q+1}$  où  $p$  et  $q$  sont deux entiers, la fonction puissance d'exposant  $\frac{p}{2q+1}$  selon

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^{\frac{p}{2q+1}} = \left(x^{\frac{1}{2q+1}}\right)^p.$$



Courbes représentatives de quelques fonctions puissances

- 1 Fonction partie entière
- 2 Fonctions log/exp/puissances
- 3 Fonctions trigonométriques
  - Fonction tangente
  - Fonction arcsin
  - Fonction arccos
  - Fonction arctan
  - Exemples
- 4 Fonctions hyperboliques

### Définition 3.1 (Fonction tangente)

La **fonction tangente** est l'application notée **tan** qui va de

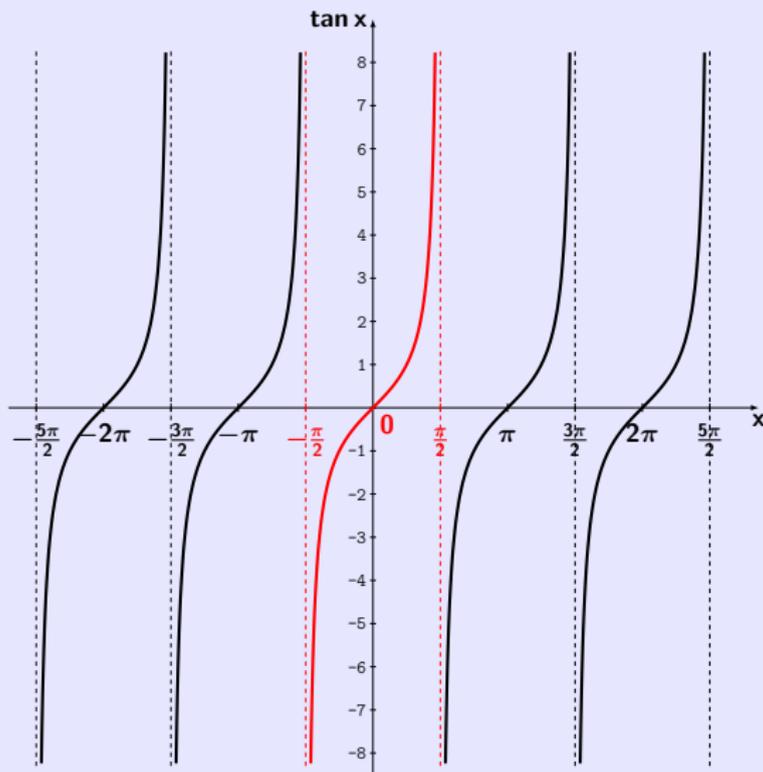
$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x \in D_{\tan}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

### Proposition 3.2 (Propriétés)

- 1 La fonction tan est **impaire** et  **$\pi$ -périodique**.
- 2 La fonction tan est **dérivable** sur  $D_{\tan}$ , de dérivée :

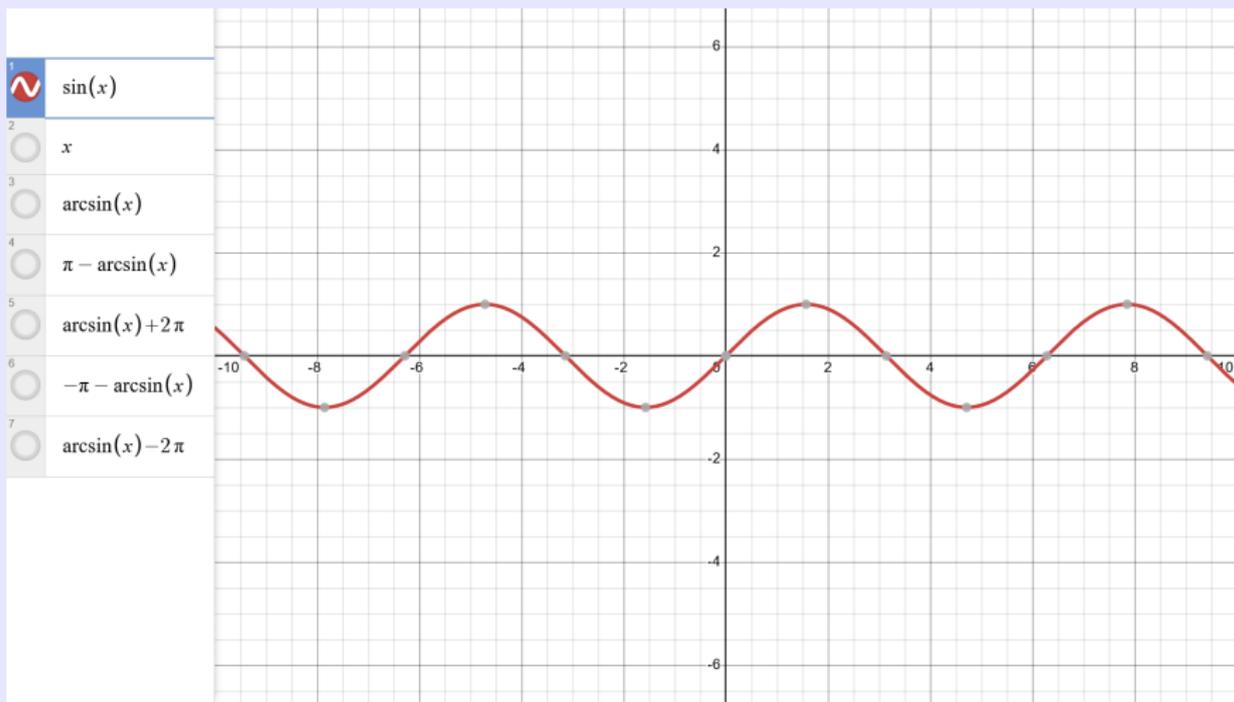
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- 3 La fonction tan est **strictement croissante** sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .
- 4  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ .

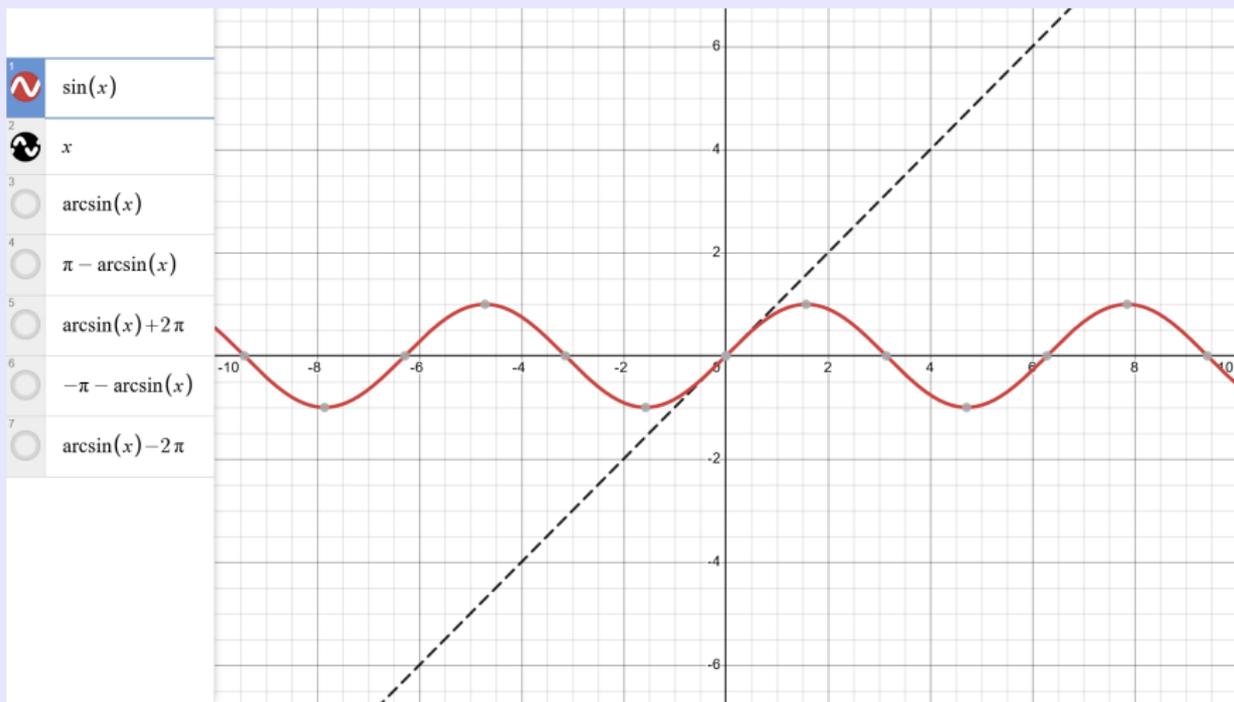


Courbe représentative de la fonction  $\tan$  sur l'intervalle  $]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$

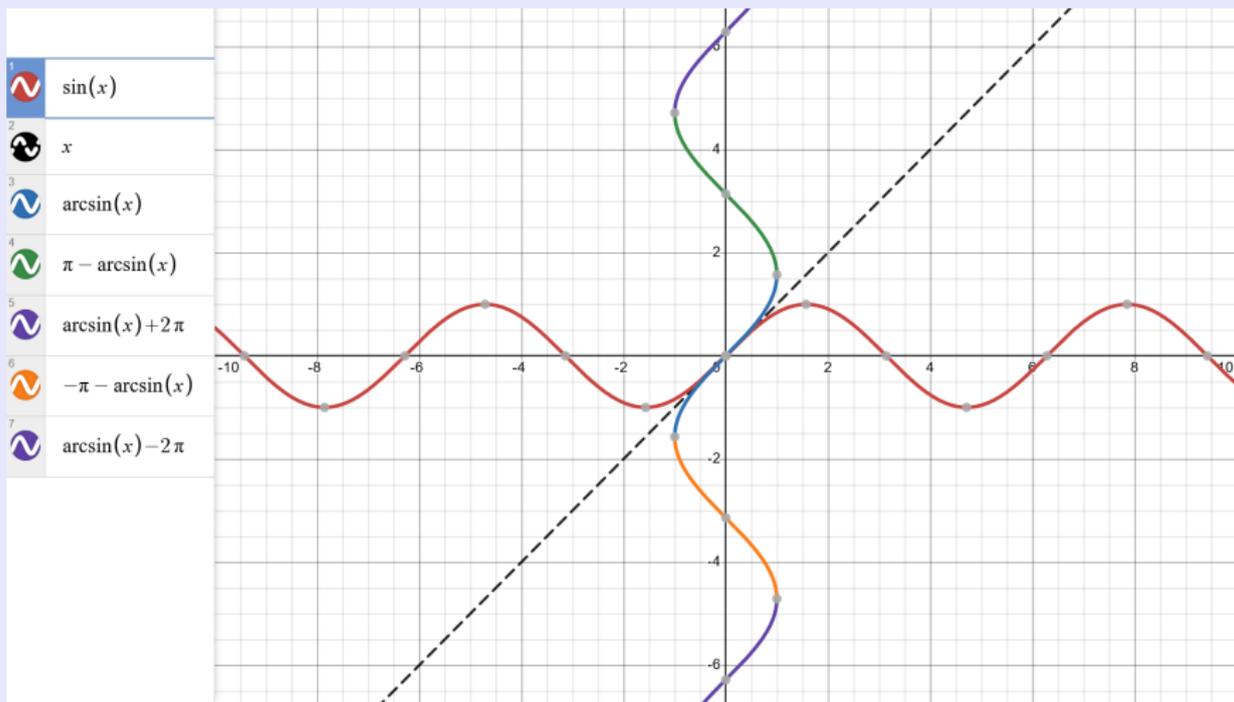
Prologue : à partir d'une sinusoïde horizontale...



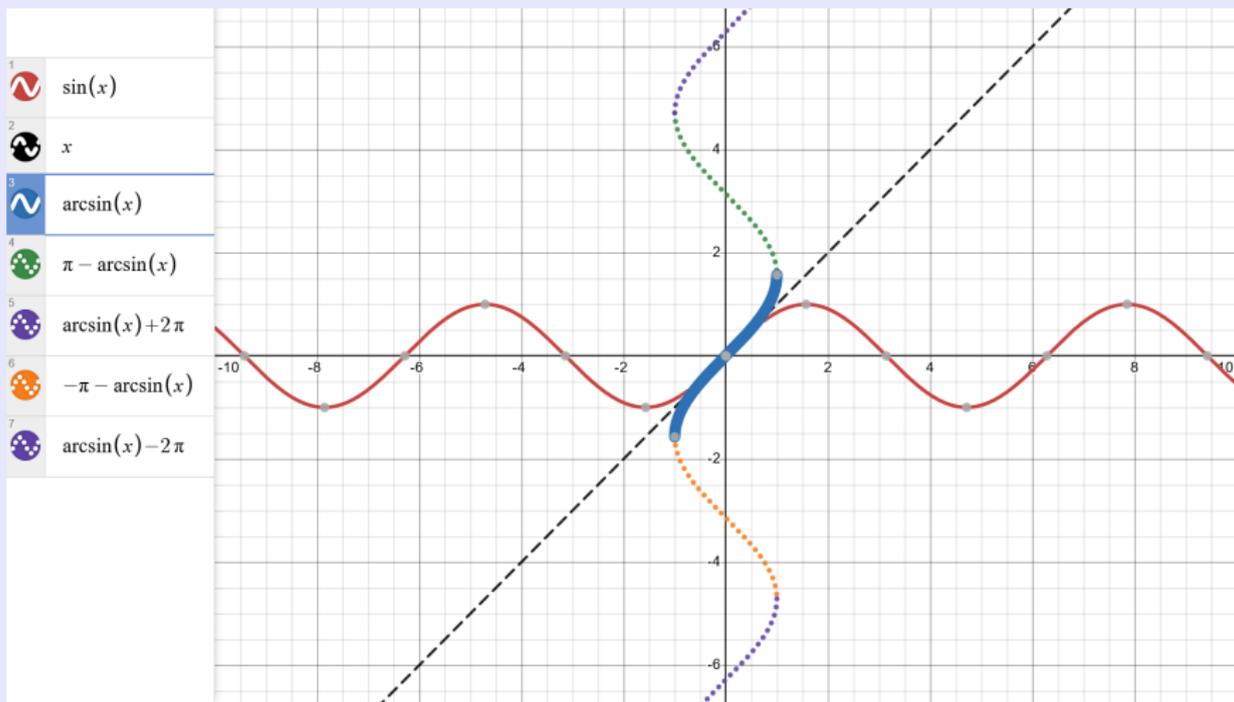
## Prologue : après une symétrie...



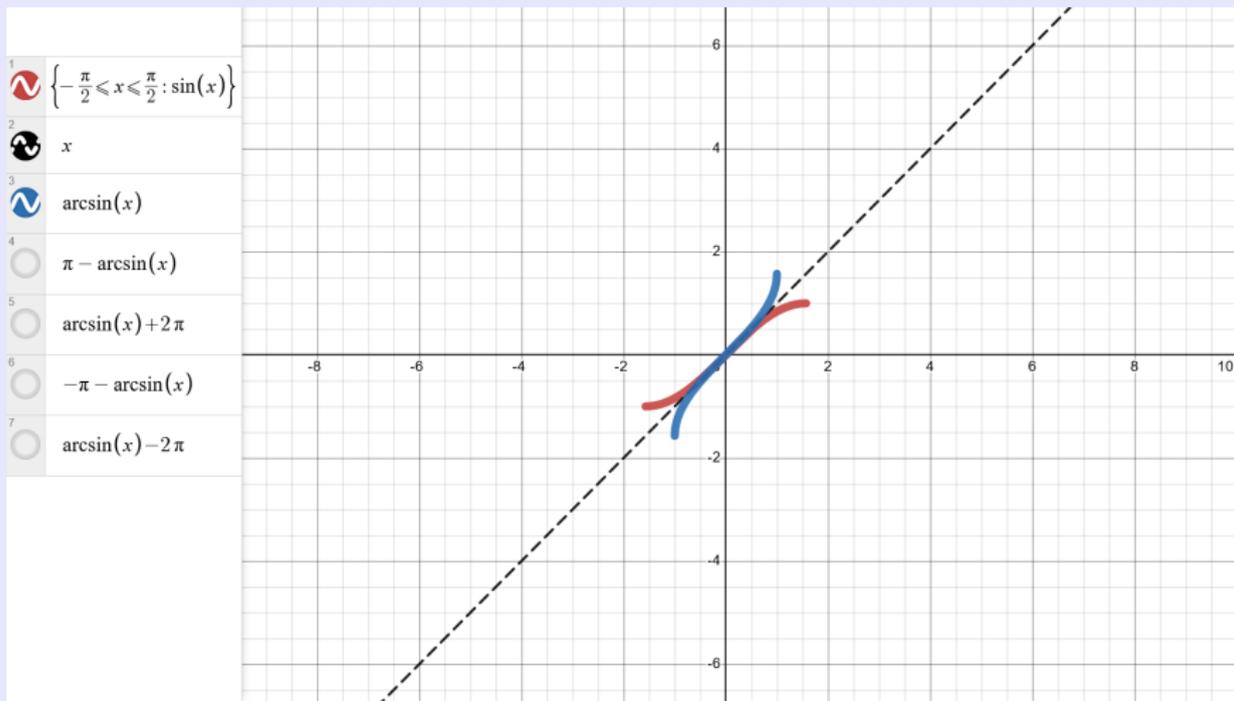
## Prologue : une sinusoïde verticale...



## Prologue : puis un extrait !



## Prologue : puis un extrait !

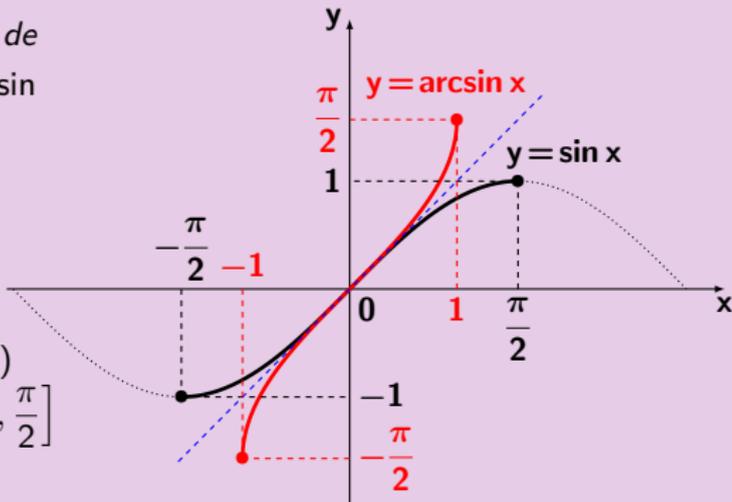


### Proposition 3.3 (Fonction arcsin)

La fonction sin réalise une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[-1, 1]$  et l'on note arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



### Proposition 3.4

① arcsin est **continue**, **strictement croissante** et **impaire** sur  $[-1, 1]$ .

② 
$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], & \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arcsin(\sin(x)) = x \end{cases}$$

③ arcsin est **dérivable** sur  $] -1, 1[$  et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

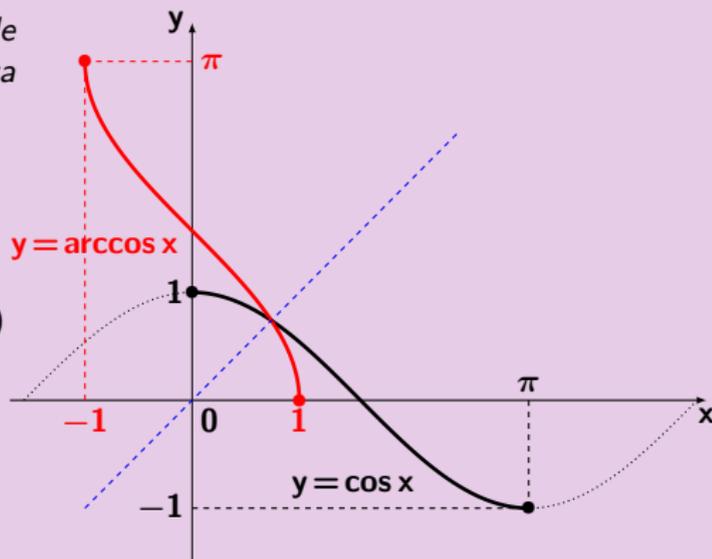
### Proposition 3.5 (Fonction arccos)

La fonction  $\cos$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$  et l'on note  $\arccos$  sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$x \longmapsto \arccos(x)$$

et 
$$\begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$



### Proposition 3.6

①  $\arccos$  est **continue, strictement décroissante** sur  $[-1, 1]$ .

② 
$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x \end{cases}$$

③  $\arccos$  est **dérivable** sur  $] -1, 1[$  et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

④  $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

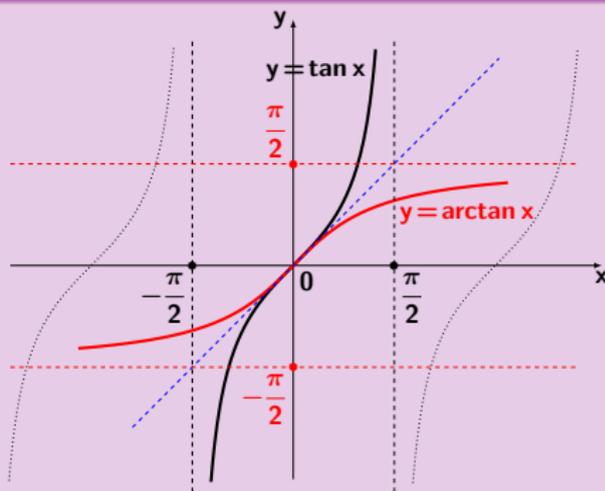
### Proposition 3.7 (Fonction arctan)

La fonction  $\tan$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on note  $\arctan$  sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$x \longmapsto \arctan(x)$$

et  $\begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$



### Proposition 3.8

①  $\arctan$  est **continue, strictement croissante et impaire** sur  $\mathbb{R}$ .

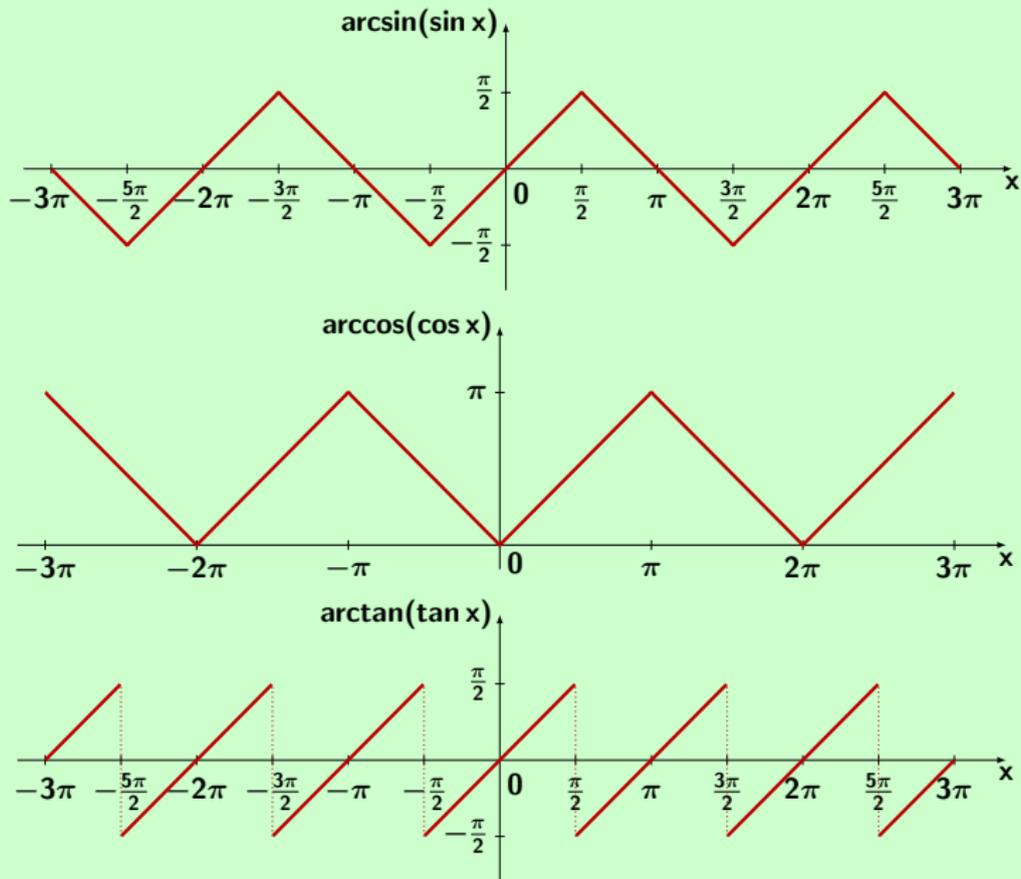
②  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , & \arctan(\tan(x)) = x \end{cases}$

③  $\arctan$  est **dérivable** sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

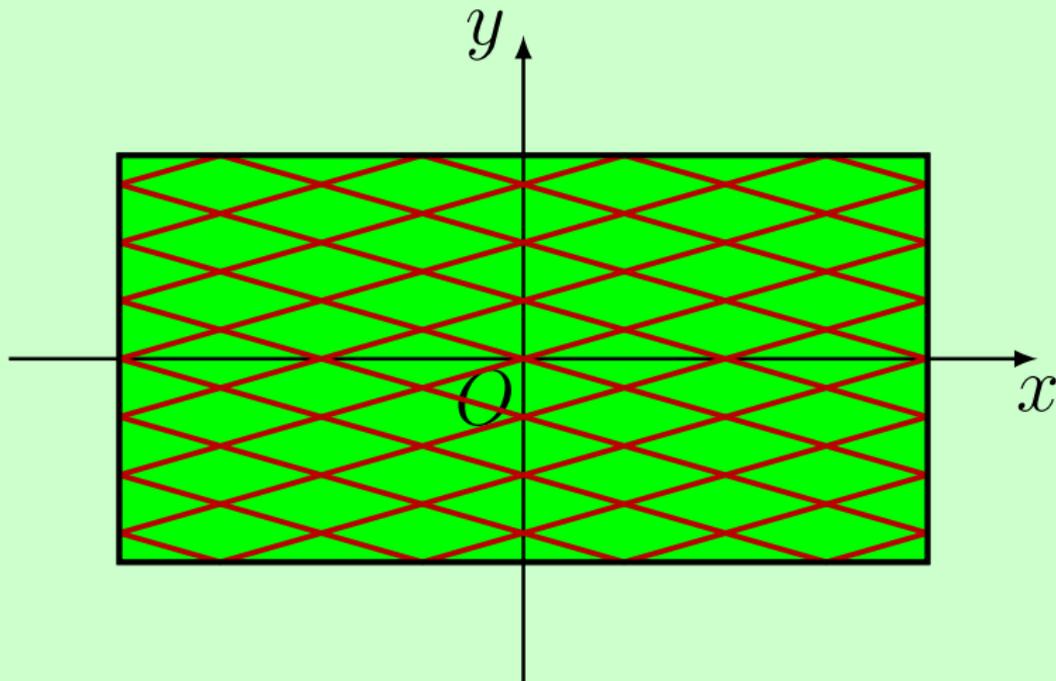
④  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

## Exemple 3.9 (Courbes en « dents de scie ») (facultatif)



## Exemple 3.10 (Billard rectangulaire (facultatif))

Courbe paramétrée  $\begin{cases} x(t) = 2 \arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



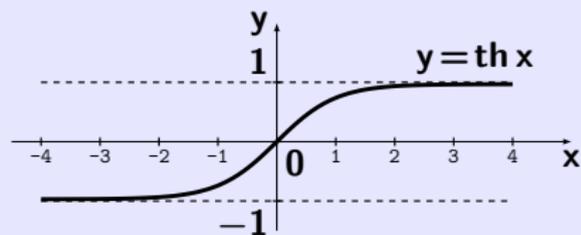
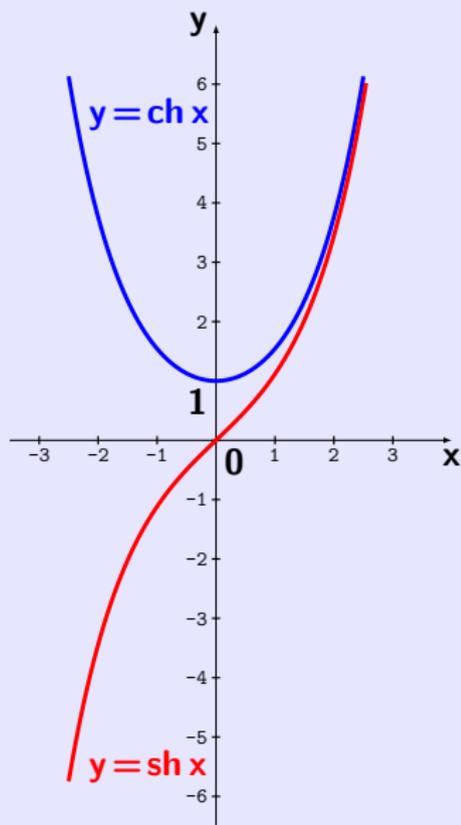
- 1 Fonction partie entière
- 2 Fonctions log/exp/puissances
- 3 Fonctions trigonométriques
- 4 Fonctions hyperboliques
  - Définition/Variations
  - Graphes
  - Interprétation géométrique

### Définition 4.1 (Fonctions hyperboliques)

- ① On appelle **fonction cosinus hyperbolique**, notée  $\text{ch}$  (ou  $\cosh$ ), l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $[1, +\infty[$  qui à tout réel  $x$  associe le réel  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
- ② On appelle **fonction sinus hyperbolique**, notée  $\text{sh}$  (ou  $\sinh$ ), l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout réel  $x$  associe le réel  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
- ③ On appelle **fonction tangente hyperbolique**, notée  $\text{th}$  (ou  $\tanh$ ), l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout réel  $x$  associe le réel  $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ .

### Proposition 4.2 (Parité/Variations)

- ① a La fonction  $\text{ch}$  est **paire** et **dérivable** sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\text{ch}' = \text{sh}$ .  
 b La fonction  $\text{sh}$  est **impaire** et **dérivable** sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\text{sh}' = \text{ch}$ .  
 c La fonction  $\text{th}$  est **impaire** et **dérivable** sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}$ .
- ② a La fonction  $\text{ch}$  est **strictement décroissante** sur  $\mathbb{R}_-$ , **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$ .  
 b La fonction  $\text{sh}$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$  avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ .  
 c La fonction  $\text{th}$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$  avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$ .



Courbes représentatives des fonctions ch, sh et th

### Proposition 4.3 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

- ① Pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$ .
- ② Pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$ .
- ③ Pour tout réel  $a$  :  $\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1$ .

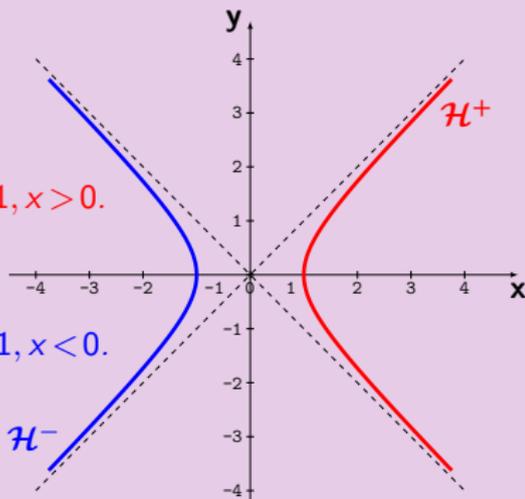
« Explication » : pour tout réel  $a$  :  $\operatorname{ch}(a) = \cos(ia)$  et  $\operatorname{sh}(a) = -i \sin(ia)$ ...

### Proposition 4.4 (Pourquoi le terme « hyperbolique » dans ch et sh ?)

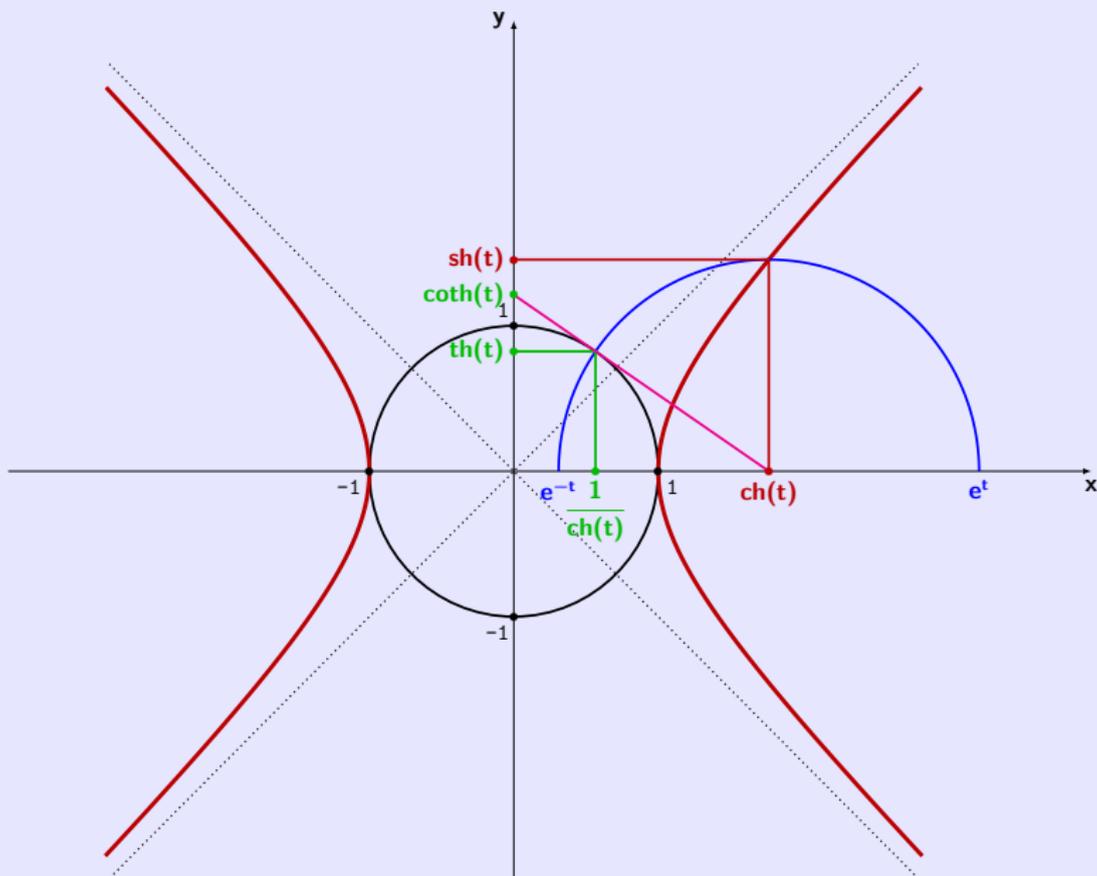
La courbe paramétrée  $F^+ : t \mapsto (\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$  définie sur  $\mathbb{R}$  a pour support la branche d'**hyperbole**  $\mathcal{H}^+$  d'équation cartésienne  $x^2 - y^2 = 1, x > 0$ .

La courbe paramétrée  $F^- : t \mapsto (-\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$  définie sur  $\mathbb{R}$  a pour support la branche d'**hyperbole**  $\mathcal{H}^-$  d'équation cartésienne  $x^2 - y^2 = 1, x < 0$ .

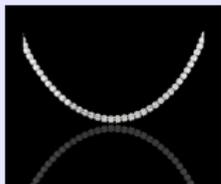
L'**hyperbole** d'équation  $x^2 - y^2 = 1$  est la réunion des deux branches  $\mathcal{H}^-$  et  $\mathcal{H}^+$ .



## Hyperbole et fonctions hyperboliques



### La chaînette dans la nature...



Colliers



Arche de Saint-Louis – Missouri



Voûtes de la Casa Mila  
Barcelone



Lignes à haute-tension



Vincent Ganivet : Catène de containers  
Le Havre



Arches devant le bâtiment  
Sophie Germain – INSA Lyon

## Notions à retenir

- Fonctions usuelles
  - ★ partie entière
  - ★ logarithmes
  - ★ exponentielles
  - ★ puissances
  - ★ trigonométriques (tan, arcsin, arccos, arctan)
  - ★ hyperboliques

# Annexes

- Fonctions In/exp
- Trigonométrie

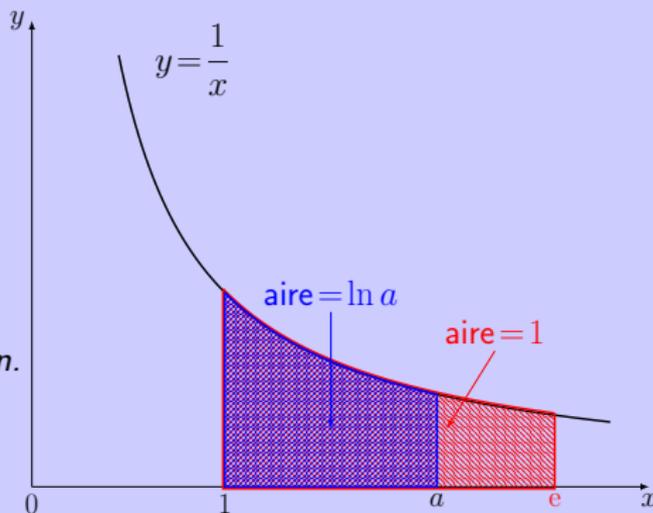
- 5 Annexe A – Fonctions log/exp
  - Fonction logarithme
  - Fonction exponentielle
- 6 Annexe B – Trigonométrie

### Définition A.1 (Fonction logarithme népérien)

Pour tout réel strictement positif  $a$ , on appelle **logarithme naturel** ou encore **logarithme népérien** de  $a$  le nombre noté  $\ln a$  égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = a$  dans un repère orthonormal.

On note  $e$  le nombre tel que  $\ln e = 1$ .  $e$  est appelé **base** du logarithme népérien. Numériquement :  $e = 2,7182818\dots$

Cette quantité définit une application  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout réel strictement positif :  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .



### Proposition A.2 (Propriétés)

Pour tous réels  $x$  et  $x'$  strictement positifs et tout entier relatif  $n$ , on a :

- $\ln(xx') = \ln x + \ln x'$
- $\ln\left(\frac{x}{x'}\right) = \ln x - \ln x'$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

### Définition A.3 (Fonction exponentielle)

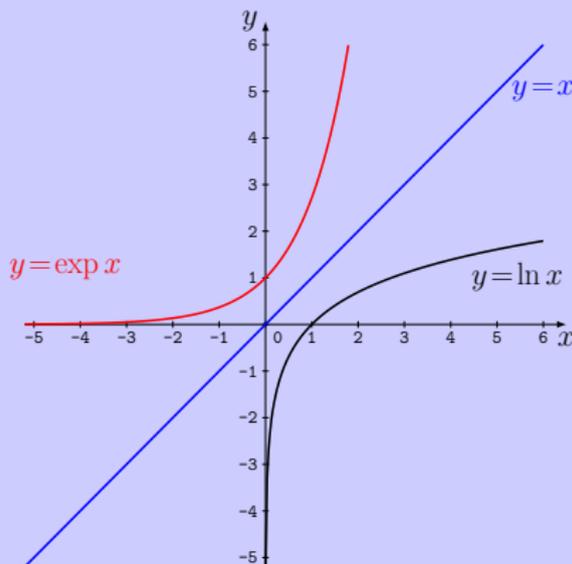
La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ .

On note aussi  $\exp(x) = e^x$ .

On a pour tout réel  $x$  :  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

On peut démontrer que  $\exp$  est l'**unique solution**  $f$  de l'**équation différentielle**  $f' = f$  vérifiant la **condition initiale**  $f(0) = 1$ .



### Proposition A.4 (Propriétés)

Pour tous réels  $x$  et  $x'$  et tout entier relatif  $n$ , on a :

- $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$

- $e^{x-x'} = \frac{e^x}{e^{x'}}$

- $(e^x)^n = e^{nx}$

### Définition A.5 (Exponentielle complexe)

Soit  $x, y$  deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe  $x + iy$  selon

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

### Proposition A.6 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  et tout nombre entier  $n$ , on a :

$$\bullet e^{z+z'} = e^z \times e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}} \quad \bullet (e^z)^n = e^{nz} \quad \text{et} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

En particulier, pour tout nombre réel  $\theta$  et tout nombre entier  $n$ , on a (formule de **de Moivre**) :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{ou encore} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

### Exemple A.7 (Onde sinusoïdale amortie)

Une **onde sinusoïdale amortie** peut être modélisée par une fonction de la forme  $t \mapsto e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$  ou  $t \mapsto e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$ ,  $\alpha > 0$  désignant un coefficient d'amortissement et  $\omega > 0$  la pulsation de l'onde.

Il peut être judicieux de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la fonction complexe  $t \mapsto e^{(-\alpha+i\omega)t}$ .

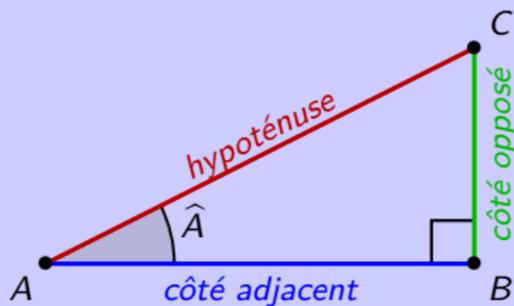
## 5 Annexe A – Fonctions log/exp

## 6 Annexe B – Trigonométrie

- Triangle rectangle
- Cercle trigonométrique
- Angles
- Fonctions cosinus/sinus
- Formulaire
- Dérivation

### Définition B.1 (Sinus, Cosinus, Tangente)

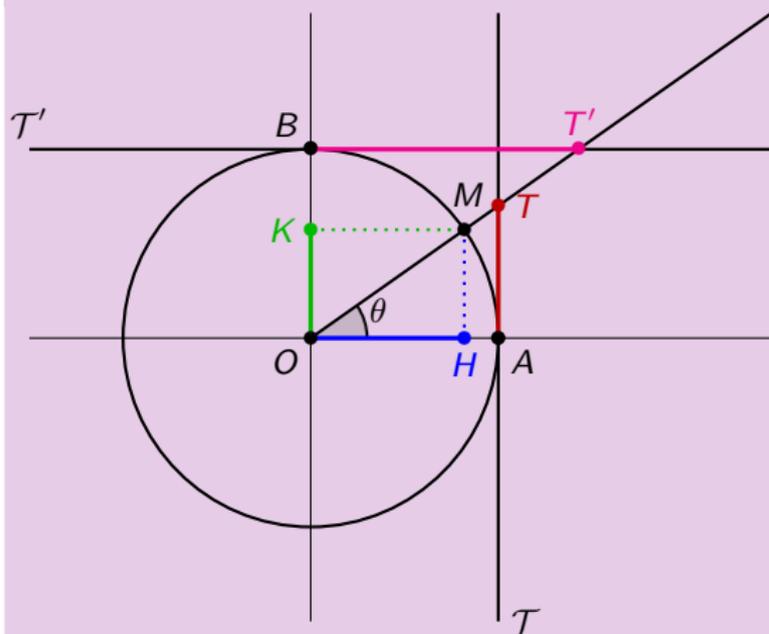
On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ . On note  $\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .



- Le **Sinus** est le rapport du côté « **Opposé** » à l'« **Hypoténuse** ».
- Le **Cosinus** est le rapport du côté « **Adjacent** » à l'« **Hypoténuse** ».
- La **Tangente** est le rapport du côté « **Opposé** » au côté « **Adjacent** ».

On note :  $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$      $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$      $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

## Proposition B.2 (Cercle trigonométrique)



Sur le cercle de centre  $O$   
et de rayon 1 :

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$$

$$\overline{OH} = \cos \theta \quad \overline{OK} = \sin \theta$$

Sur les tangentes  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  :

$$\overline{AT} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\overline{BT'} = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

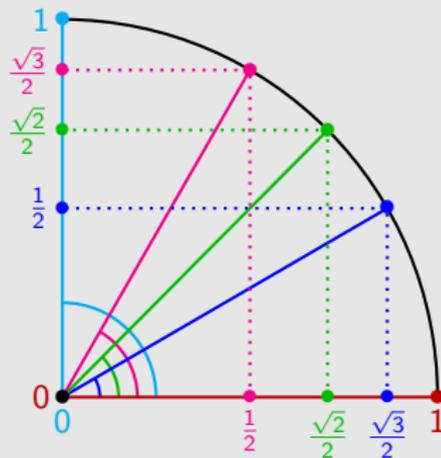
Le point  $M$  a pour coordonnées  $(\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\boxed{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1}$

### Définition B.3 (Radian)

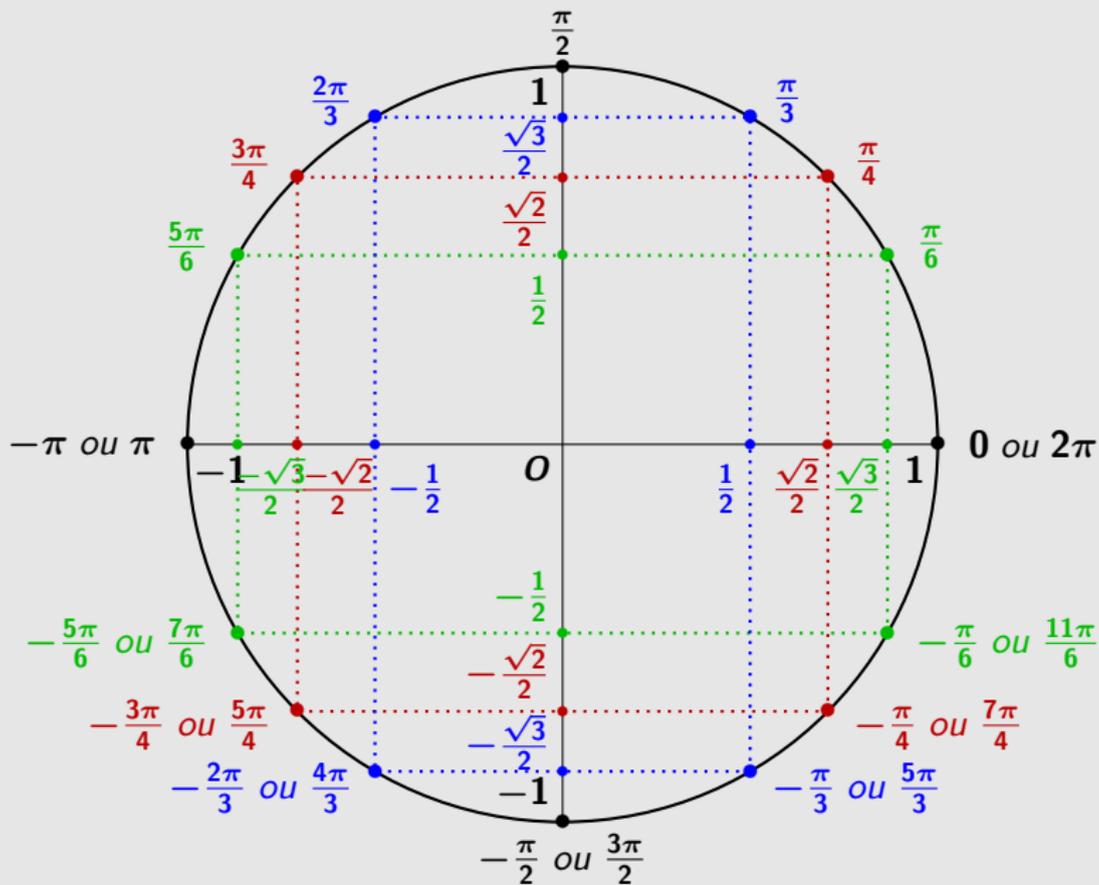
Le **radian** est la mesure d'un angle interceptant sur la circonférence d'un cercle centré au point d'intersection des demi-droites délimitant le secteur angulaire, un arc d'une longueur égale au rayon.

### Quelques valeurs remarquables

$\theta$ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

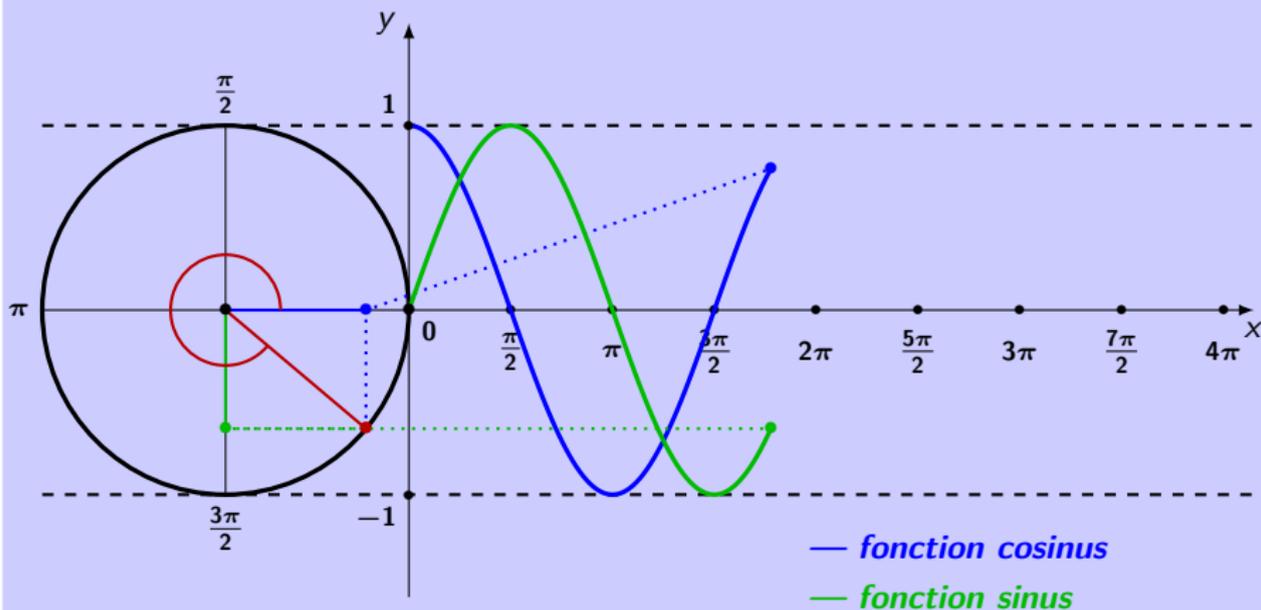


## Valeurs remarquables



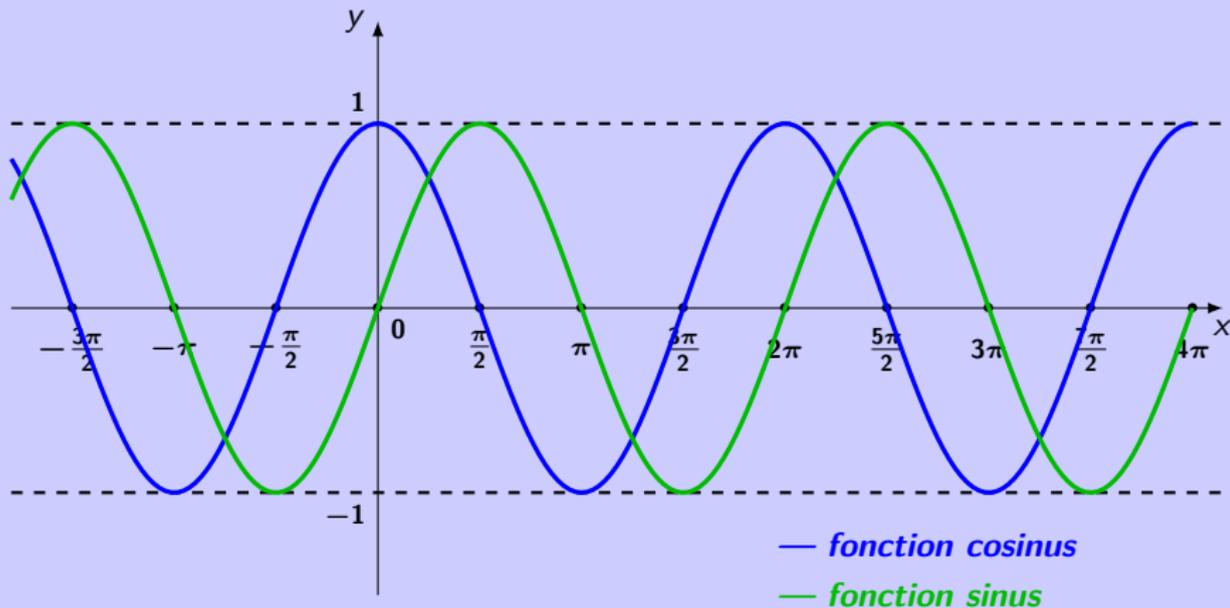
**Définition B.4 (Fonctions cosinus et sinus)**

Les quantités trigonométriques **cos** et **sin** définissent des **fonctions trigonométriques** sur  $\mathbb{R}$  dont voici les graphes.

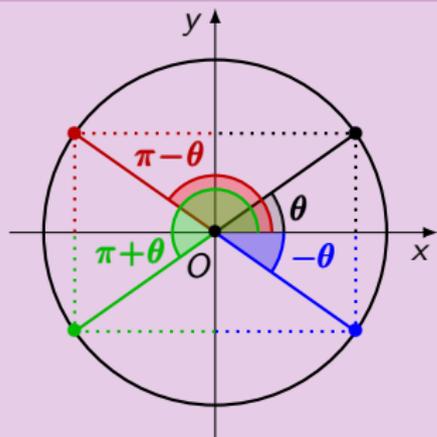


**Définition B.4 (Fonctions cosinus et sinus)**

Les quantités trigonométriques **cos** et **sin** définissent des **fonctions trigonométriques** sur  $\mathbb{R}$  dont voici les graphes.



## Symétries/rotations élémentaires



angles **opposés** (symétrie par rapport à  $Ox$ )

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$\cos$  : fonction **paire**

$\sin$  : fonction **impaire**

angles **supplémentaires** (symétrie par rapport à  $Oy$ )

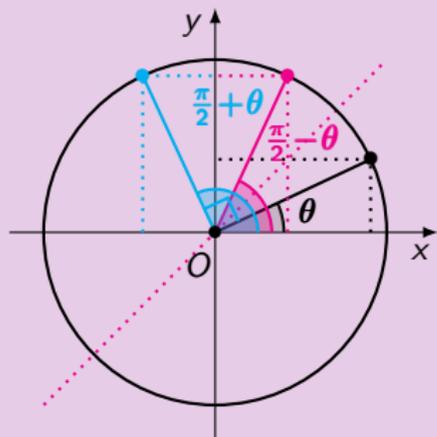
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

**demi-tour** (symétrie par rapport à  $O$ )

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$



angles **complémentaires** (symétrie par rapport à  $x = y$ )

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

**quart de tour** (rotation d'angle droit)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$

## Formulaire 1 (Somme des angles)

Pour tous réels  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta) \cos(\varphi) + \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin(\theta) \cos(\varphi) - \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

En particulier :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

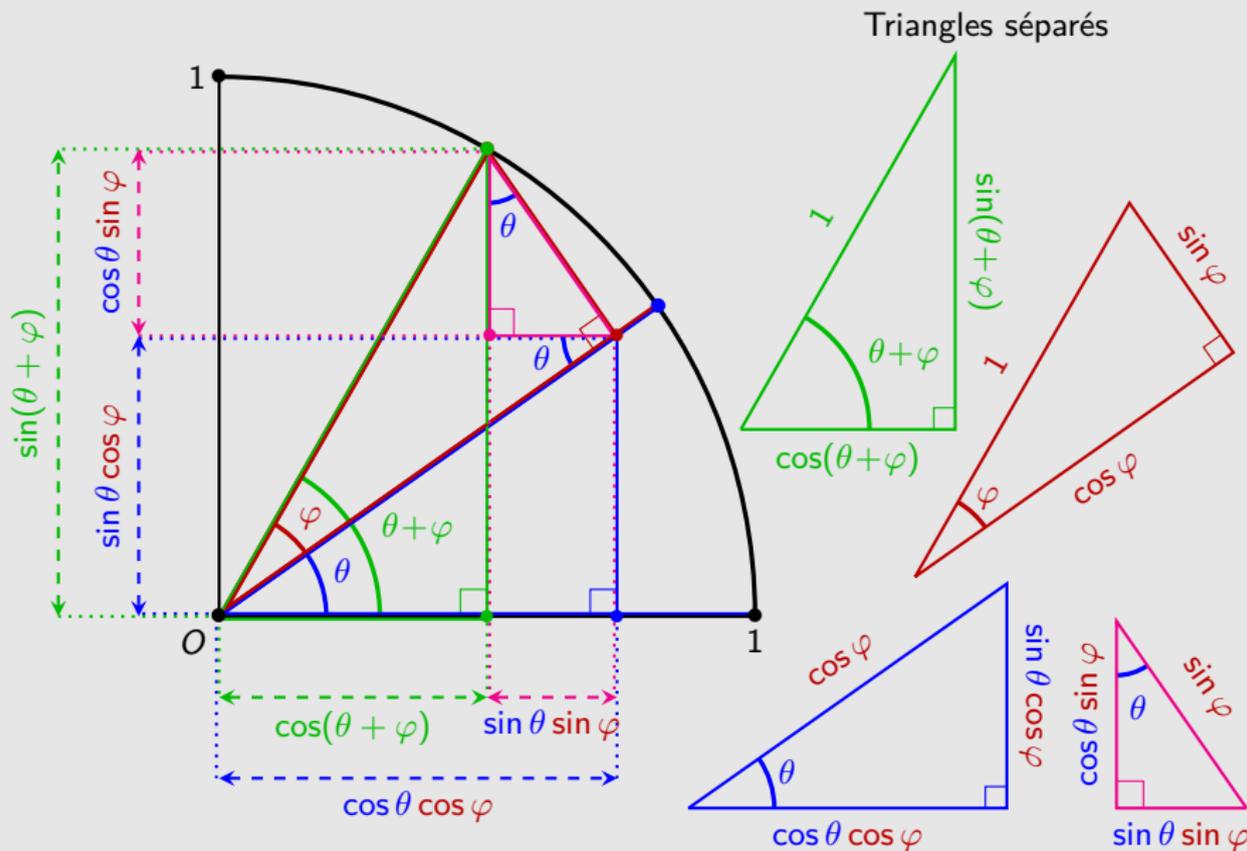
## Exemple B.5

Partant de  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  avec  $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on tire :

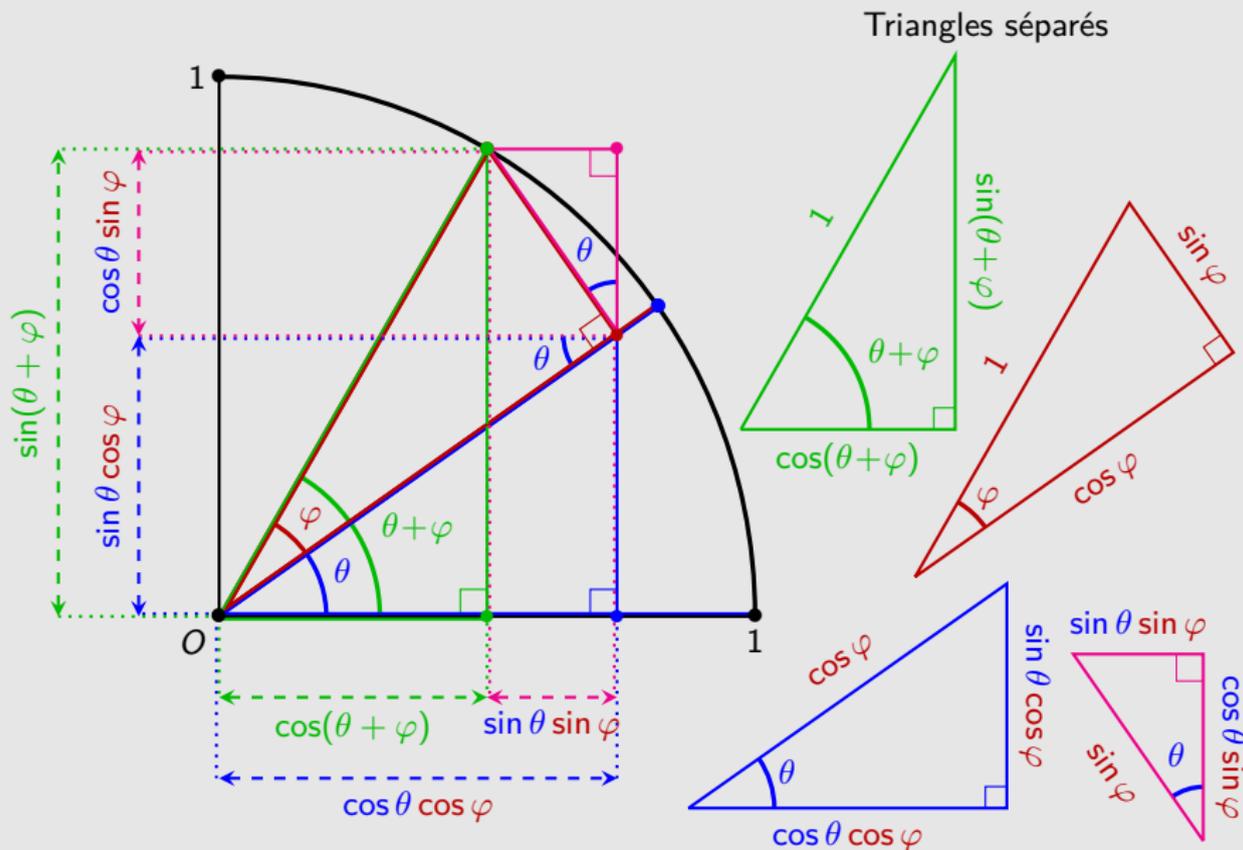
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

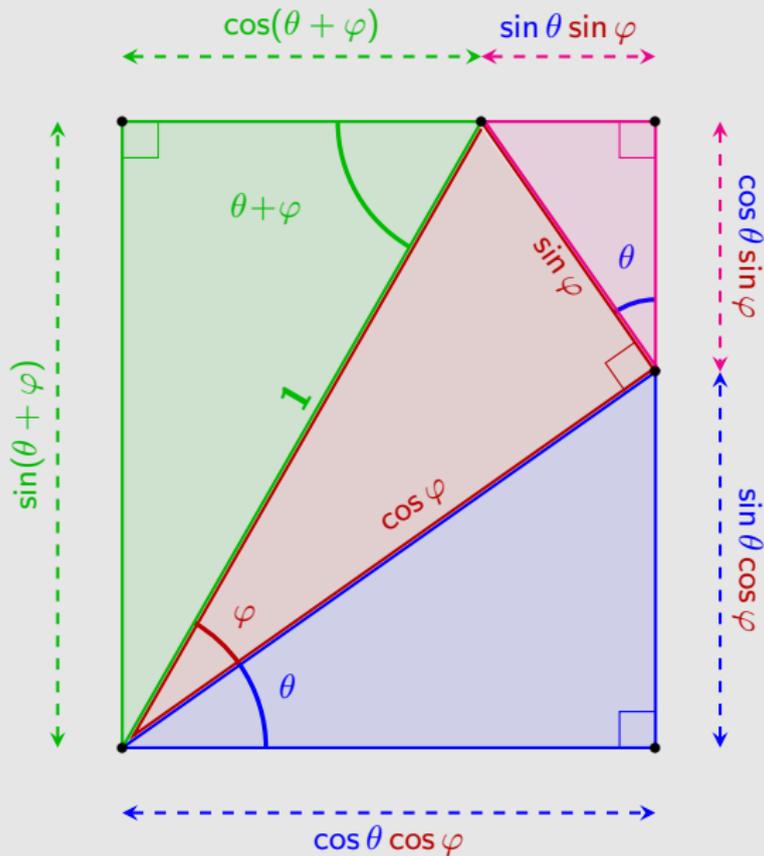
Explication :  $\cos(\theta + \varphi)$  et  $\sin(\theta + \varphi)$



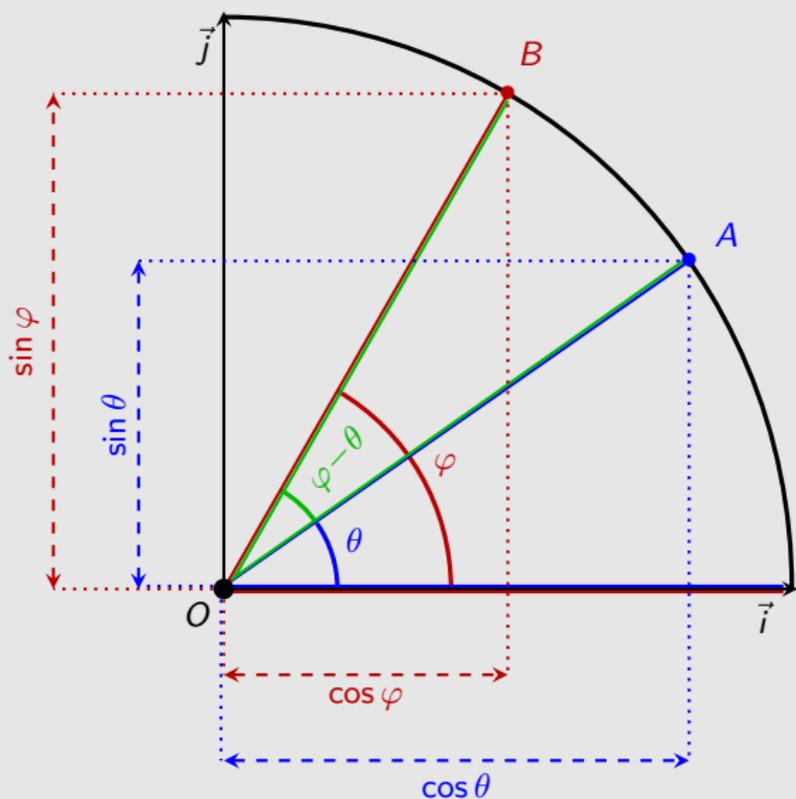
Explication :  $\cos(\theta + \varphi)$  et  $\sin(\theta + \varphi)$  (variante)



Explication :  $\cos(\theta + \varphi)$  et  $\sin(\theta + \varphi)$  (résumé)



Explication :  $\cos(\varphi - \theta)$  et  $\sin(\varphi - \theta)$



$$\begin{cases} \vec{OA} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{OB} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \end{cases}$$

### Produit scalaire

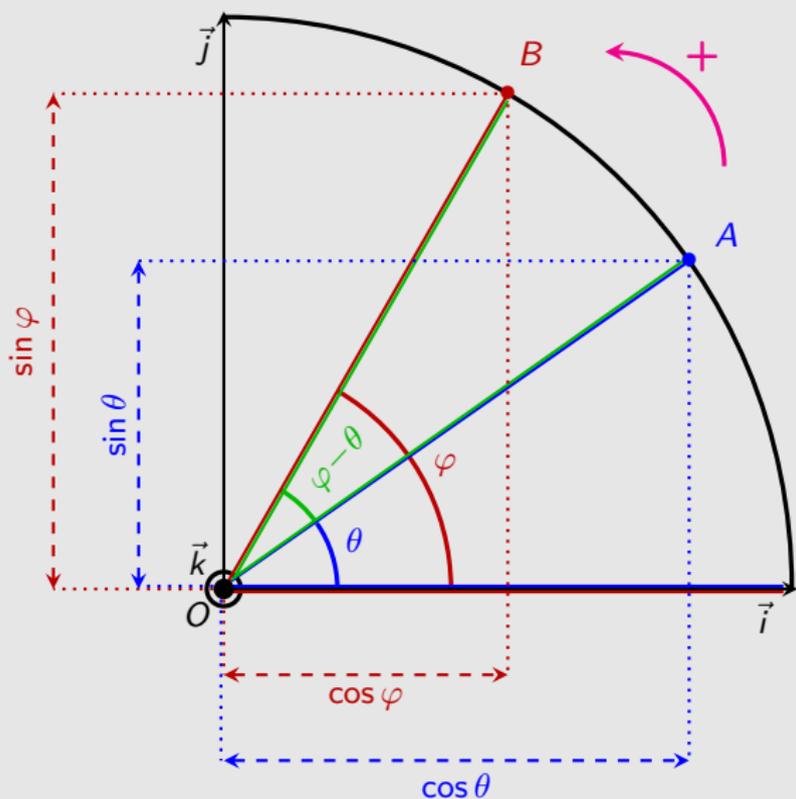
1. Calcul analytique :

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \\ \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

2. Calcul géométrique :

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \\ \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\angle(\vec{OA}, \vec{OB})) \\ &= \cos(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

Explication :  $\cos(\varphi - \theta)$  et  $\sin(\varphi - \theta)$



$$\begin{cases} \vec{OA} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{OB} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \end{cases}$$

### Produit vectoriel

1. Calcul analytique :

$$\begin{aligned} \vec{OA} \wedge \vec{OB} &= \\ (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) \vec{k} \end{aligned}$$

2. Calcul géométrique :

$$\begin{aligned} \vec{OA} \wedge \vec{OB} &= \\ \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \sin(\angle(\vec{OA}, \vec{OB})) \vec{k} \\ &= \sin(\varphi - \theta) \vec{k} \end{aligned}$$

### Définition B.6 (Exponentielle complexe)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

### Proposition B.7 (Formulaire via les complexes)

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$$

En particulier, pour tout nombre réel  $\theta$  et tout nombre entier  $n$ , on a (formule de de Moivre) :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{ou encore} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

En effet :

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \\ &= (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \cos \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) + i \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= e^{i\theta} \times e^{i\varphi} \end{aligned}$$

### Exemple B.8

La formule de de Moivre donne :

- pour  $n = 3$  :  $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$  et  $\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ ;
- pour  $n = 4$  :  $\cos(4\theta) = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$  et  $\sin(4\theta) = 4 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - \cos \theta)$ .

### Formulaire 2 (Produit de sinus/cosinus (facultatif))

$$\cos \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)]$$

$$\sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$$

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

En effet : en ajoutant ou soustrayant  $\cos(\theta + \varphi)$  et  $\cos(\theta - \varphi)$ ,

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

---


$$\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) = 2 \cos \theta \cos \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) - \cos(\theta - \varphi) = -2 \sin \theta \sin \varphi$$

**Formulaire 3 (Somme de sinus/cosinus (facultatif))**

$$\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\sin \theta - \sin \varphi = 2 \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$$

En effet : on part de  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ .

Pour  $\alpha = \frac{\theta + \varphi}{2}$  et  $\beta = \frac{\theta - \varphi}{2}$ , on a  $\alpha + \beta = \theta$  et  $\alpha - \beta = \varphi$ ,

et l'on trouve  $\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$ .

## Formulaire 4 (Tangente (facultatif))

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi}$$

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

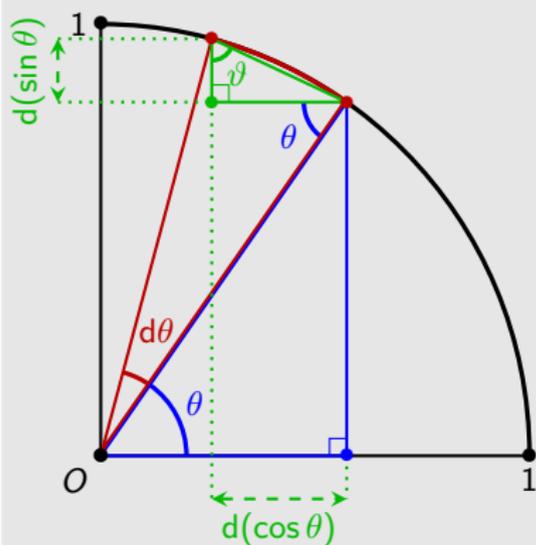
En effet :

$$\begin{aligned} \tan(\theta + \varphi) &= \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\cos(\theta + \varphi)} = \frac{\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi}{\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi} \end{aligned}$$

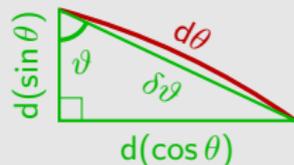
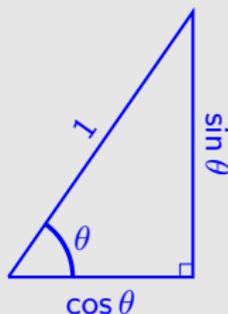
## Proposition B.9 (Dérivation)

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \quad \sin'(\theta) = \cos(\theta)$$

## Explication heuristique



## Triangles séparés



$$\cos \vartheta = \frac{d(\sin \theta)}{\delta \vartheta} \text{ avec } \vartheta \approx \theta, \delta \vartheta \approx d\theta$$

$$\text{Formellement : } \sin'(\theta) = \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\text{En fait : } \vartheta = \theta + \frac{d\theta}{2} \text{ et } \delta \vartheta = 2 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \dots$$

## Courbes de Lissajous

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_Lissajous~Lissajous.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous~Lissajous.html)

## Courbes cycloïdales

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_cycloides~cycloides0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides~cycloides0.html)

## Trigonométrie

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_trigonometrie.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_trigonometrie.pdf)

## Présentation Maple

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation\\_maple\\_html/presentation\\_maple0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple0.html)