INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Coordonnées curvilignes

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1er cycle, 1re année

Sommaire

Propriété 1.1 (Représentation paramétrique d'une droite)

*Si (D) est une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ et passant par le point $M_0(x_0,y_0,z_0)$, alors (D) admet la **représentation paramétrique** suivante, obtenue en projetant l'équation vectorielle $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{u}$ de paramètre t sur les 3 axes.*

$$\boxed{\begin{cases}x(t)=x_0+u_xt\\y(t)=y_0+u_yt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\z(t)=z_0+u_zt\end{cases}}$$

Chaque valeur du paramètre t donne un point $M(t)$ de la droite.
*Cette représentation paramétrique n'est **pas unique**, puisqu'elle dépend du choix du point M_0 et du vecteur directeur $\vec{u}$. On peut aussi changer le paramètre t…*

Exemple 1.2 (Différents paramétrages de droite)

- Les paramétrages $\begin{cases}x(t)=-1+2t\\y(t)=3-5t\\z(t)=4+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $\begin{cases}x(t)=5+4t\\y(t)=-12-10t\\z(t)=7+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

  correspondent tous deux à la même droite. En effet :
  - le premier paramétrage indique immédiatement la droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-1,3,4)$;
  - le deuxième paramétrage indique immédiatement la droite dont un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-10\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $B(5,-12,7)$.

  On observe que $\vec{v}=2\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-15\\3\end{pmatrix}=3\vec{u}$, ce sont bien les mêmes droites.
- La représentation $\begin{cases}x(t)=-1+2t^3\\y(t)=3-5t^3\\z(t)=4+t^3\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est encore un autre paramétrage de la droite précédente, obtenue par substitution **bijective** de paramètre $t\in\mathbb{R}\mapsto t^3\in\mathbb{R}$.

Remarque 1.3 (Représentation paramétrique d'un segment)

Soit A et B deux points distincts de coordonnées (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B).
- Un paramétrage de la **droite** (AB) est donc

$$\begin{cases}x(t)=x_A+t(x_B-x_A)\\y(t)=y_A+t(y_B-y_A)\ ,\ \boldsymbol{t\in\mathbb{R}}\\z(t)=z_A+t(z_B-z_A)\end{cases}$$

- Un paramétrage du **segment** $[AB]$ est

$$\begin{cases}x(t)=x_A+t(x_B-x_A)\\y(t)=y_A+t(y_B-y_A)\ ,\ \boldsymbol{t\in[0,1]}\\z(t)=z_A+t(z_B-z_A)\end{cases}\text{ ou encore }\begin{cases}x(t)=(1-t)x_A+tx_B\\y(t)=(1-t)y_A+ty_B\ ,\ \boldsymbol{t\in[0,1]}\\z(t)=(1-t)z_A+tz_B\end{cases}$$

  Avec ce choix de paramétrage, $M(0)=A$ et $M(1)=B$.

Exemple 1.4 (Paramétrage d'un segment dans le plan)

Un paramétrage du segment $[AB]$ dans un repère du plan avec $A(-1,3)$ et $B(2,4)$ est $\begin{cases}x(t)=-1+3t\\y(t)=3+t\end{cases}$, $t\in[0;1]$ (pas de composante en z).

Propriété 1.5 (Représentation paramétrique d'un cercle)

*Le **cercle** du **plan** de centre $A(x_A,y_A)$ et de rayon R dans le repère orthonormé $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y)$peut se paramétrer selon*

$$\boxed{\begin{cases}x(t)=x_A+R\cos(t)\\y(t)=y_A+R\sin(t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]}$$

*Une **représentation cartésienne** de ce cercle est donnée par l'équation $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.*

Le paramétrage d'un cercle de l'espace est plus difficile à obtenir, sauf dans des cas simples (lorsque le plan du cercle est parallèle à l'un des plans de coordonnées).

Exemple 1.6 (Cercle dans l'espace)

Un paramétrage du cercle de l'espace de rayon $R>0$ et de centre $A(1,2,3)$ parallèle au plan (Oxz) est donné par

$$\begin{cases}x(t)=1+R\cos(t)\\y(t)=2\\z(t)=3+R\sin(t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]$$

Définition 1.7 (Courbe paramétrée)

Soit f, g et h des fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $\vec{F}:I\to\mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie par $\vec{F}(t)=f(t)\,\vec{e}_x+g(t)\,\vec{e}_y+h(t)\,\vec{e}_z$.

1. *Alors la donnée de I et de $\vec{F}$ est appelée **courbe paramétrée** de l'espace ou **arc paramétré**. On utilisera aussi la notation $\overrightarrow{OM}(t)$ pour $\vec{F}(t)$.*
   Dans le repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $\big(f(t),g(t),h(t)\big)$ et dans la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ a pour composantes $\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\\h(t)\end{pmatrix}$.
2. *L'ensemble des points de coordonnées $\big(f(t),g(t),h(t)\big)$ pour $t\in I$ est appelé **support de la courbe**, et la variable t est appelée **paramètre**.*
   *On dit que le système $\boxed{\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\ ,\ t\in I\\z=h(t)\end{cases}}$ est une **représentation paramétrique** de la courbe paramétrée dans le repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.*
   Parfois on marque la dépendance de x,y,z en t en écrivant $x(t),y(t),z(t)$.
3. *On définit de manière similaire une courbe paramétrée du plan à l'aide d'une fonction vectorielle $\vec{F}:I\to\mathbb{R}^2$.*

Remarque 1.8 (Aspects statique/dynamique)

Deux courbes paramétrées ayant le même support peuvent avoir des paramétrages **différents.**

Le **support** donne une vision **statique** de la courbe, le **paramétrage** induit une **dynamique** de parcours sur le support.

- Par exemple, les courbes paramétrées

$$\begin{cases}x(t)=\cos(t)\\y(t)=\sin(t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]\quad\text{et}\quad\begin{cases}x(t)=\sin(2t)\\y(t)=\cos(2t)\end{cases},\ t\in[0,\pi]$$

  ont le même support : le cercle trigonométrique.
  Mais ce cercle n'est pas décrit à la même vitesse, ni dans le même sens ;
  de plus, le point de départ de la dynamique n'est pas le même.
- De même, les courbes paramétrées

$$\begin{cases}x(t)=\cos(t)\\y(t)=\sin(t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]\quad\text{et}\quad\begin{cases}x(t)=\cos(2t)\\y(t)=\sin(2t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]$$

  ont le même support : le cercle trigonométrique.
  Mais ce cercle n'est pas décrit à la même vitesse ;
  de plus, il est parcouru une fois dans le premier cas, deux fois dans le second.

Propriété 2.1 (Représentation paramétrique d'un plan)

*Si (P) est un plan de l'espace passant par $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{a}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$, alors (P) admet la **représentation paramétrique** suivante, obtenue en projetant l'équation vectorielle $\overrightarrow{M_0M}=u\vec{a}+v\vec{b}$ de paramètres u,v sur les 3 axes :*

$$\boxed{\begin{cases}x(u,v)=x_0+a_xu+b_xv\\y(u,v)=y_0+a_yu+b_yv\ ,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\\z(u,v)=z_0+a_zu+b_zv\end{cases}}$$

À chaque valeur du couple (u,v) correspond un point $M(u,v)$ du plan (P).
*Cette représentation paramétrique n'est **pas unique**, puisqu'elle dépend du choix du point M_0 et des vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan (P). On peut aussi changer les paramètres u,v…*

Exemple 2.2 (Paramétrages différents d'un plan)

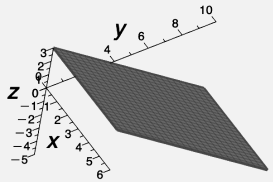
- Le paramétrage $\mathcal{P}_1$: $\begin{cases} x(u,v) = 2u \\ y(u,v) = 5v \\ z(u,v) = 3 - 4v \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, représente le plan passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix}$.
- Le paramétrage $\mathcal{P}_2$: $\begin{cases} x(s,t) = 2 + 2s + 2t \\ y(s,t) = 5t \\ z(s,t) = 3 - 4t \end{cases}$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, représente le plan passant par le point $B(2,0,3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$.
- * En choisissant $u = 1$ et $v = 0$ dans $\mathcal{P}_1$, on voit que $B \in \mathcal{P}_2$. De plus, on remarque que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Ainsi $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$. On peut le retrouver en posant $u = s + t$ et $v = t$.
  * Réciproquement, $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$, donc $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. On peut le retrouver en posant $s = u - v$ et $t = v$.
  * En conclusion, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Exemple 2.2 (Paramétrages différents d'un plan)

- La représentation paramétrique $\begin{cases} x(u,v) = 2u^3 \\ y(u,v) = 5v^5 \\ z(u,v) = 3 - 4v^5 \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, est un autre paramétrage du plan $\mathcal{P}_1$. Il est simplement obtenu en remplaçant les paramètres u et v par u^3 et v^5 qui décrivent chacun $\mathbb{R}$.
- Le paramétrage

$$\begin{cases} x(u,v) = 2u \\ y(u,v) = 5v \\ z(u,v) = 3 - 4v \end{cases}, (u,v) \in [0,3] \times [0,2]$$

représente le **parallélogramme** de sommets obtenus en choisissant pour les paramètres u et v les bornes des intervalles $[0,3]$ et $[0,2]$, soit les points de coordonnées $(0,0,3), (6,0,3), (6,10,-5), (0,10,-5)$.



Définition 2.3 (Surface paramétrée)

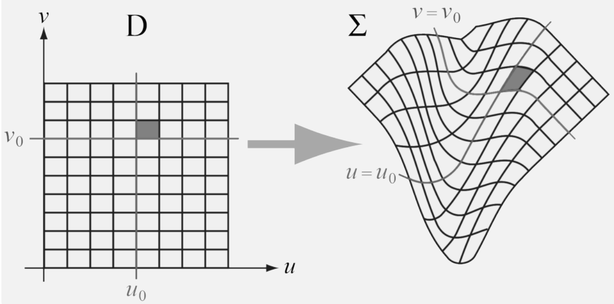
Soit f, g et h des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie par $\vec{F}(u,v) = f(u,v)\vec{e}_x + g(u,v)\vec{e}_y + h(u,v)\vec{e}_z$.

1. *Alors la donnée de D et de $\vec{F}$ est appelée **surface paramétrée** de l'espace ou **nappe paramétrée**. On utilisera aussi la notation $\overrightarrow{OM}(u,v)$ pour $\vec{F}(u,v)$.*
   Dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le point $M(u,v)$ a pour coordonnées $\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big)$ et dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur $\overrightarrow{OM}(u,v)$ a pour composantes $\begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \\ h(u,v) \end{pmatrix}$.
2. *L'ensemble des points de coordonnées $\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big)$ pour $(u,v) \in D$ est appelé **support de la surface**, et les variables u, v sont appelés **paramètres**.*
   *On dit que le système $\boxed{\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}, (u,v) \in D}$ est une **représentation paramétrique** de la surface paramétrée dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.*
   Parfois on marque la dépendance de x, y, z en u, v en écrivant $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$.

*Le fait qu'il y ait 2 paramètres u et v correspond à la notion intuitive de « **dimension 2** ».*

Définition 2.4 (Courbes coordonnées)

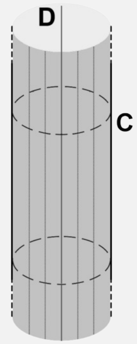
Soit Σ le support de la surface paramétrée $(u,v) \longmapsto \overrightarrow{OM}(u,v)$.
*Lorsque u_0 est **fixé**, $v \longmapsto \overrightarrow{OM}(u_0, v)$ définit une courbe contenue dans Σ ;*
*de même, lorsque v_0 est **fixé**, $u \longmapsto \overrightarrow{OM}(u, v_0)$ définit une courbe contenue dans Σ.*
*Ces courbes sont appelées **courbes coordonnées**.*



Définition 2.5 (Cylindre)

Soit D une droite et C un cercle de l'espace de centre appartenant à D tels que C soit situé dans le plan orthogonal à la droite D.

*Le **cylindre de révolution** de base C et d'axe D est la surface obtenue en réunissant toutes les droites parallèles à D intersectant C.*



Propriété 2.6 (Représentation paramétrique)

*Le **cylindre** infini d'axe (Oz) et de rayon R peut être paramétré par la fonction vectorielle $\vec{F}$ définie par*

$$\forall (u,v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad \vec{F}(u,v) = R\cos(u)\,\vec{e}_x + R\sin(u)\,\vec{e}_y + v\,\vec{e}_z$$

*ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:*

$$\boxed{\begin{cases} x(u,v) = R\cos(u) \\ y(u,v) = R\sin(u) \\ z(u,v) = v \end{cases}, \ u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}}$$

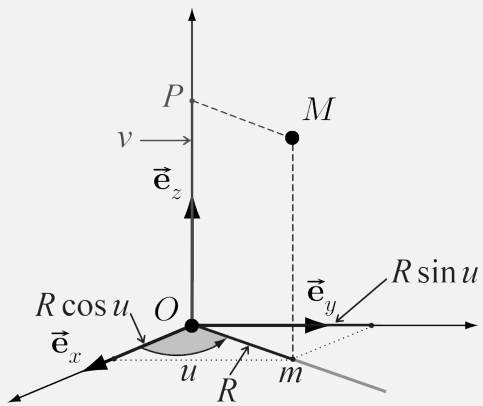
*Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ l'équation $x^2 + y^2 = R^2$ (sous-entendu $z \in \mathbb{R}$ quelconque).*

En effet, en choisissant le cercle C dans le plan (Oxy) centré en O et en notant R son rayon, un point générique m de C s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{Om} = R\cos(u)\vec{e}_x + R\sin(u)\vec{e}_y, \ u \in [0, 2\pi]$$

D'autre part, un point générique M du cylindre s'obtient en remarquant que ses projetés orthogonaux sur le plan (Oxy) et sur l'axe (Oz) sont des points génériques respectivement m de C et P de (Oz), donc de la forme $\overrightarrow{OP} = v\vec{e}_z$, $v \in \mathbb{R}$.
Enfin : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP} = R\cos(u)\vec{e}_x + R\sin(u)\vec{e}_y + v\vec{e}_z$, $u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$.

Cylindre de révolution d'axe (Oz) de rayon R



Remarque 2.7 (Coupes)

- * Les « **coupes** » à u constant sont des **droites** parallèles à l'axe (Oz).
  * Les « **coupes** » à v constant des **cercles** de rayon R d'axe (Oz).
- On verra ultérieurement le lien avec le système des **coordonnées cylindriques** :

$$\begin{cases} u \longleftrightarrow \theta \\ v \longleftrightarrow z \\ R \longleftrightarrow r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Exemple 2.8 (Cylindre d'axe (Ox))

- Une représentation paramétrique du cylindre d'axe (Ox), de rayon 2 compris entre les plans d'équation $x = 0$ et $x = 5$ (donc de longueur totale 5) est donnée par

$$\begin{cases} x(u,v) = v \\ y(u,v) = 2\cos(u) \\ z(u,v) = 2\sin(u) \end{cases}, \ u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5].$$

- Une représentation paramétrique du « **solide** » délimité par le cylindre précédent est alors donnée par

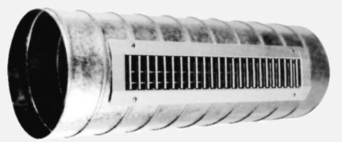
$$\begin{cases} x(r,u,v) = v \\ y(r,u,v) = r\cos(u) \\ z(r,u,v) = r\sin(u) \end{cases}, \ r \in [0,2], u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5].$$

Cylindres dans la nature


Chéneau


Colonnes de la citadelle d'Amman (Jordanie)


Solénoïde


Gaine de climatiseur


Manchon

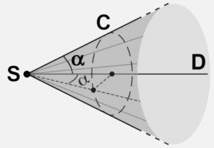
Définition 2.9 (Cône)

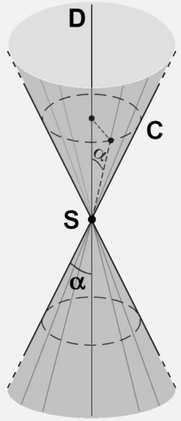
Soit S un point de l'espace, D une droite passant par S et C un cercle d'axe D de centre distinct de S.

*Le **cône de révolution** de sommet S et de base C est la surface obtenue en réunissant toutes les droites passant par S intersectant C.*

*On appelle **axe** du cône la droite D et **demi-angle au sommet** du cône l'angle α entre son axe et n'importe quelle droite du cône.*

*Le **demi-cône de révolution** de sommet S et de base C est la surface obtenue en réunissant toutes les demi-droites issues de S intersectant C.*





Propriété 2.10 (Représentation paramétrique)

*Le **cône** d'axe (Oz), de sommet O et de demi-angle au sommet α peut être paramétré par la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ définie par*

$$\forall (u,v) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R},\quad \overrightarrow{F}(u,v) = v\tan(\alpha)\cos(u)\,\vec{e}_x + v\tan(\alpha)\sin(u)\,\vec{e}_y + v\,\vec{e}_z$$

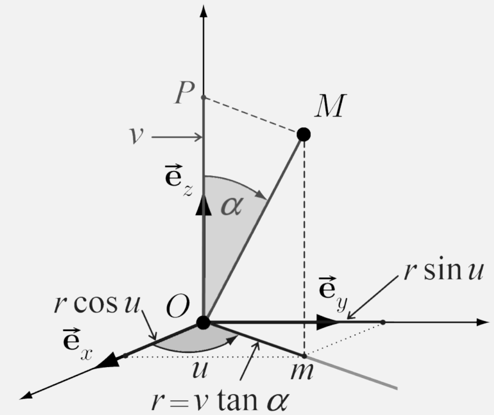
*ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$:*

$$\boxed{\begin{cases} x(u,v) = v\tan(\alpha)\cos(u) \\ y(u,v) = v\tan(\alpha)\sin(u) \ , \ u\in[0,2\pi], v\in\mathbb{R} \\ z(u,v) = v \end{cases}}$$

*Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ l'équation $x^2+y^2 = \tan^2(\alpha)\,z^2$.*

En effet : considérons un point générique M du cône et introduisons ses projetés orthogonaux m sur le plan (Oxy) et P sur l'axe (Oz).
On obtient ainsi un point générique P de (Oz), donc de la forme $\overrightarrow{OP} = v\vec{e}_z$, $v\in\mathbb{R}$.
D'autre part, l'angle $\widehat{MOP}$ coïncidant avec α, on a $Om = PM = v\tan(\alpha)$.
En notant $r = v\tan(\alpha)$, on obtient alors un point générique m du cercle de centre O de rayon r dans le plan (Oxy), donc de la forme $\overrightarrow{Om} = r\cos(u)\vec{e}_x + r\sin(u)\vec{e}_y$, $u\in[0,2\pi]$.
D'où :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP} = v\tan(\alpha)\cos(u)\vec{e}_x + v\tan(\alpha)\sin(u)\vec{e}_y + v\vec{e}_z$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in\mathbb{R}$

Cône de révolution de sommet O d'axe (Oz) de demi-angle au sommet α



Remarque 2.11 (Coupes)

- Une autre représentation paramétrique du cône est donnée par
$$\begin{cases} x = v\cos(u) \\ y = v\sin(u) \ , \ u\in[0,2\pi], v\in\mathbb{R} \\ z = \cot(\alpha)\,v \end{cases}$$
où $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$ est la « **cotangente** » de l'angle α.
-
  - Les « **coupes** » à u constant sont des **droites** concourantes en O.
  - Les « **coupes** » à v constant sont des **cercles** d'axe (Oz).

Exemple 2.12 (Cône d'axe (Ox))

- Une représentation paramétrique du cône d'axe (Ox), de sommet $A(1,2,3)$ de demi-angle au sommet $\pi/6$ compris entre les plans d'équation $x=0$ et $x=5$ est donnée par
$$\begin{cases} x(u,v) = 1 + v\sqrt{3} \\ y(u,v) = 2 + v\cos(u) \ , \ u\in[0,2\pi], v\in[0,5]. \\ z(u,v) = 3 + v\sin(u) \end{cases}$$
- D'où une représentation paramétrique du « **solide** » délimité par le cône précédent :
$$\begin{cases} x(r,u,v) = 1 + v\sqrt{3} \\ y(r,u,v) = 2 + rv\cos(u) \ , \ r\in[0,1], u\in[0,2\pi], v\in[0,5]. \\ z(r,u,v) = 3 + rv\sin(u) \end{cases}$$

Cônes dans la nature


Cône de chantier


Cône de verre, Cirque du Soleil (Montréal)


The big Cone (Los Angeles)


Joint de plomberie conique


Engrenage conique

Cônes dans la nature


Château d'eau
(Midrand, Afrique du Sud)


Cathédrale de Maringa (Brésil)


Monastère
(Noravank, Arménie)


Trulli d'Alberobello (Italie)


Trulli d'Alberobello (Italie)

Définition 2.13 (Sphère)

Soit A un point de l'espace et R un réel positif.
*La **sphère** de centre A et de rayon R est la surface des points situés à une distance R de A.*

Propriété 2.14 (Représentation paramétrique)

*La **sphère** de centre O et de rayon R peut être paramétrée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ définie par*

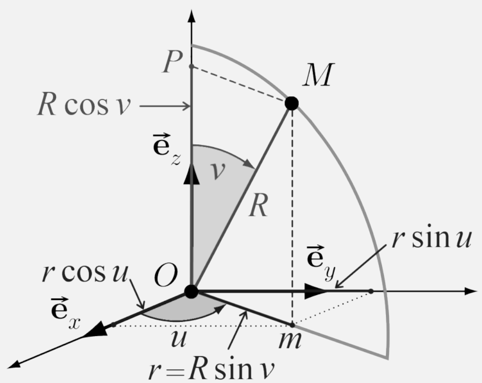
$$\forall (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\pi],\quad \overrightarrow{F}(u,v) = R\cos(u)\sin(v)\,\vec{e}_x + R\sin(u)\sin(v)\,\vec{e}_y + R\cos(v)\,\vec{e}_z$$

*ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$:*

$$\boxed{\begin{cases} x(u,v) = R\cos(u)\sin(v) \\ y(u,v) = R\sin(u)\sin(v) \quad , \ u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi] \\ z(u,v) = R\cos(v) \end{cases}}$$

*Elle admet également pour **représentation cartésienne dans** le repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ l'équation $x^2+y^2+z^2 = R^2$.*

Sphère de centre O de rayon R



Remarque 2.15

- On verra ultérieurement le lien avec le système des **coordonnées sphériques :**
$$\begin{cases} u \longleftrightarrow \theta & \textbf{(longitude)} \\ v \longleftrightarrow \varphi & \textbf{(colatitude)} \\ R \longleftrightarrow \rho & \textbf{(rayon)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$
N.B. : en cartographie, au lieu de la **colatitude** φ, on utilise la **latitude** $\frac{\pi}{2}-\varphi$.
- De manière plus générale, la sphère centrée en un point $A(x_A,y_A,z_A)$ de rayon R admet pour **représentation paramétrique**
$$\begin{cases} x(u,v) = x_A + R\cos(u)\sin(v) \\ y(u,v) = y_A + R\sin(u)\sin(v) \quad , \ u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi] \\ z(u,v) = z_A + R\cos(v) \end{cases}$$
et pour **représentation cartésienne** $(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = R^2$.

Exemple 2.16 (Sphère, boule)

- Une **représentation paramétrique** de la sphère de centre $A(1,2,3)$ et de rayon 5 est donnée par

$$\begin{cases} x(u,v) = 1 + 5\cos(u)\sin(v) \\ y(u,v) = 2 + 5\sin(u)\sin(v) \;,\; u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi] \\ z(u,v) = 3 + 5\cos(v) \end{cases}$$

et une **représentation cartésienne** par $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

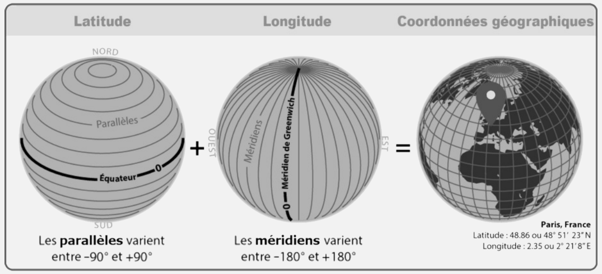
- Une **représentation paramétrique** du « **solide** » délimité par la sphère précédente (on parle de « **boule** ») est alors donnée par

$$\begin{cases} x(r,u,v) = 1 + r\cos(u)\sin(v) \\ y(r,u,v) = 2 + r\sin(u)\sin(v) \;,\; r \in [0,5], u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi] \\ z(r,u,v) = 3 + r\cos(v) \end{cases}$$

et une **représentation cartésienne** par $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leqslant 25$.

Coupes : coordonnées géographiques

- Les « **coupes** » à v constant sont des **cercles** d'axes (Oz) (« **parallèles** »).
- Les « **coupes** » à u constant sont des **demi-cercles** de centre O passant par les points de coordonnées $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$ (« **pôles** » et « **méridiens** »).

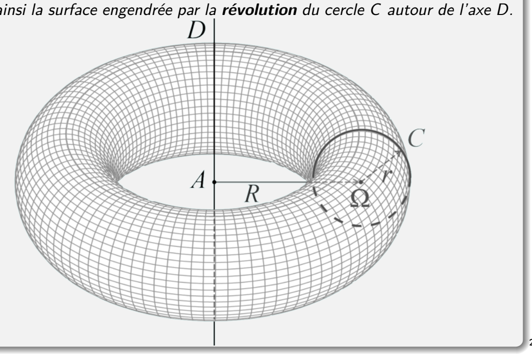


Définition 2.17 (Tore)

Soit A un point et D une droite de l'espace, r et R deux réels positifs.

*Le **tore** de centre A d'axe D et de rayons r et R est la surface obtenue en réunissant tous les cercles C coplanaires avec D de rayon r, de centre Ω situé à une distance R de A et tel que le segment $A\Omega$ soit orthogonal à D.*

*Ce **tore** est ainsi la surface engendrée par la **révolution** du cercle C autour de l'axe D.*



Propriété 2.18 (Représentation paramétrique)

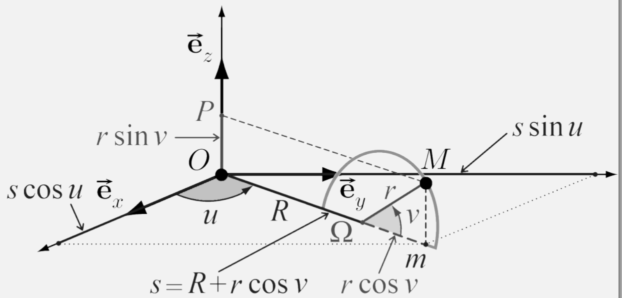
*Le **tore** de centre O d'axe (Oz) et de rayons r et R peut être paramétrée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ définie par*
$\forall (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$,
$$\overrightarrow{F}(u,v) = (R + r\cos(v))\cos(u)\,\vec{e}_x + (R + r\cos(v))\sin(u)\,\vec{e}_y + r\sin(v)\,\vec{e}_z$$
*ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$:*

$$\boxed{\begin{cases} x(u,v) = (R + r\cos(v))\cos(u) \\ y(u,v) = (R + r\cos(v))\sin(u) \quad, u \in [0,2\pi], v \in [0,2\pi] \\ z(u,v) = r\sin(v) \end{cases}}$$

*Il admet également pour **représentation cartésienne dans** le repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ l'équation $(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2)^2 = 4R^2(r^2-z^2)$.*

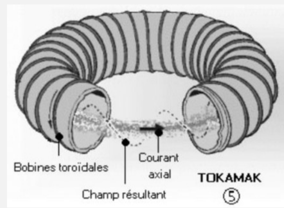
En effet, en se plaçant sur un cercle C générique de centre générique Ω de rayon r,
$$\overrightarrow{O\Omega} = R\cos(u)\vec{e}_x + R\sin(u)\vec{e}_y,\ u \in [0,2\pi],$$
un point générique M du cercle C s'obtient en remarquant que ses projetés orthogonaux sur le plan (Oxy) et sur l'axe (Oz) sont des points génériques respectivement m du cercle de centre O de rayon $r\cos(v)$ dans le plan (Oxy), et P de (Oz), de la forme
$$\overrightarrow{\Omega m} = r\cos(v)\big(\cos(u)\vec{e}_x + \sin(u)\vec{e}_y\big) \quad\text{et}\quad \overrightarrow{OP} = r\sin(v)\vec{e}_z,\ v \in [0,2\pi].$$
On obtient alors la représentation paramétrique du tore avec $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega m} + \overrightarrow{OP}$.

Tore de centre O d'axe (Oz) de rayons r et R



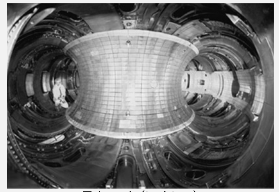
Tores dans la nature


Poulie



Tokamak (dispositif de confinement magnétique)


Bobine magnétique


Tokamak (intérieur)


Joints de plomberie toriques

Tores dans la nature


Pied de colonne
Érechthéion (Athènes)


Bouée de piscine


Église Saints-Pierre-et-Paul (Rosheim)


Donut


Beignets d'oignons frits

Remarque 2.19 (Nombre de paramètres/Dimension)

- Un représentation paramétrique à **1 paramètre** correspond à une **courbe** :

$$\boxed{\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \;,\; t \in D \qquad (D \subset \mathbb{R}) \\ z = h(t) \end{cases}}$$

$\longrightarrow$ ***dimension 1***

- Un représentation paramétrique à **2 paramètres** correspond à une **surface** :

$$\boxed{\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \;,\; (u,v) \in D \qquad (D \subset \mathbb{R}^2) \\ z = h(u,v) \end{cases}}$$

$\longrightarrow$ ***dimension 2***

- Un représentation paramétrique à **3 paramètres** correspond à une **solide** :

$$\boxed{\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \;,\; (u,v,w) \in D \qquad (D \subset \mathbb{R}^3) \\ z = h(u,v,w) \end{cases}}$$

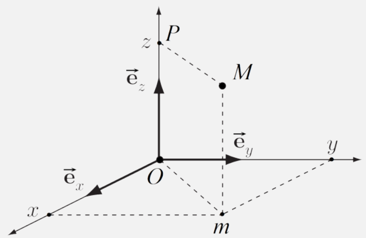
$\longrightarrow$ ***dimension 3***

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé **fixe** direct $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ ou $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace (ou le plan), tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$



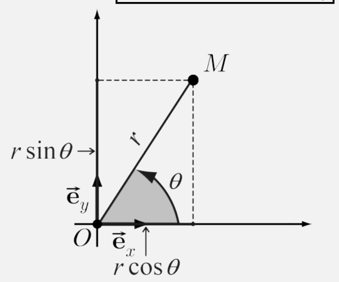
Les points $m(x,y,0)$ et $P(0,0,z)$ sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur le plan (Oxy) et l'axe (Oz).

Définition 3.1 (Coordonnées polaires)

Un point M du plan peut être repéré par sa distance $r \geqslant 0$ par rapport à l'origine O et son angle (lorsque $M \neq O$) $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

*Le couple (r, θ) est constitué des **coordonnées polaires** du point M.*

Avec ces notations, on a la relation $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y}$.



*L'origine O et l'axe $(O; \vec{e}_x)$ sont respectivement appelés **pôle** et **axe polaire**.*
*Le point O n'a pas de **coordonnées polaires** uniques.*

Propriété 3.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}} \quad et \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \end{cases}}$$

Propriété 3.3 (Courbes coordonnées)

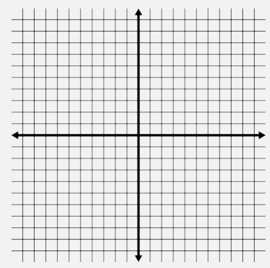
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation **r = cte** donne un **cercle** de centre O ;*
- *l'équation **θ = cte** donne une **demi-droite** d'origine O.*

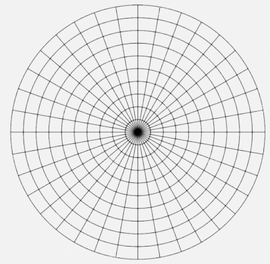
Plus précisément, pour $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta)$ est le **cercle** de centre O et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0)$ est la **demi-droite** d'origine O d'angle polaire θ_0.*

Courbes coordonnées et maillage



coordonnées **cartésiennes**



coordonnées **polaires**

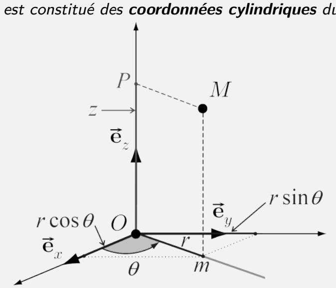
Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

Définition 3.4 (Coordonnées cylindriques)

*On projette le point M de l'espace sur le plan (Oxy) en m et sur l'axe (Oz) en P : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$, et l'on repère le projeté m par ses **coordonnées polaires** dans le plan :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z \text{ avec } r \in [0, +\infty[,\ \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in \mathbb{R}}$$

*Le triplet (r, θ, z) est constitué des **coordonnées cylindriques** du point M.*



Remarque 3.5

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si m et P sont les projetés de M sur le plan (Oxy) et la droite (Oz), alors en **coordonnées cylindriques :** $M(r, \theta, z)$, $m(r, \theta, 0)$ et $P(0, ??, z)$.

Propriété 3.6 (Passage coordonnées cartésiennes/cylindriques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **cylindriques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}} \quad et \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \\ z = z \end{cases}}$$

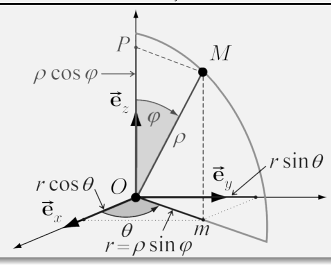
Définition 3.7 (Coordonnées sphériques)

On repère un point M de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe } (Oz)) \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe } (Ox)) \end{cases}$$

*Le triplet (ρ, φ, θ) constitue les **coordonnées sphériques** du point M.*
En décomposant comme précédemment $\overrightarrow{OM}$ selon $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z \text{ avec } \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi[}$$



Remarque 3.8

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de **coordonnées sphériques** et **cylindriques.** Le choix adopté ici est tel que θ joue le même rôle dans les systèmes de **coordonnées cylindriques** et **coordonnées sphériques.**

Mais ce n'est pas toujours le cas !
Bien faire attention aux conventions choisies...

Propriété 3.9 (Passage coordonnées cartésiennes/sphériques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **sphériques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}} \quad et \quad \boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}}$$

Définition 3.10 (Courbes et surfaces coordonnées)

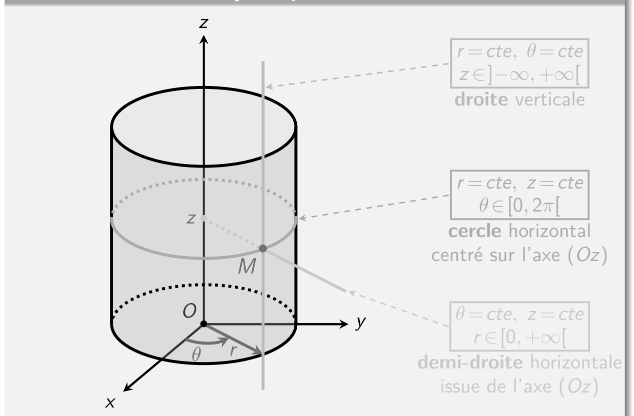
- *Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point M décrit une **surface coordonnée.***
- *Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point M décrit une **courbe coordonnée.***
  Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

Courbes coordonnées en cartésiennes

Les **courbes coordonnées** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :
les équations **(x = cte, y = cte)** ou **(x = cte, z = cte)** ou **(y = cte, z = cte)** donnent les **axes** de cordonnées.

Les **surfaces coordonnées** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :
les équations ***x = cte*** ou ***y = cte*** ou ***z = cte*** donnent les **plans** de cordonnées.

Courbes coordonnées en cylindriques



Propriété 3.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)

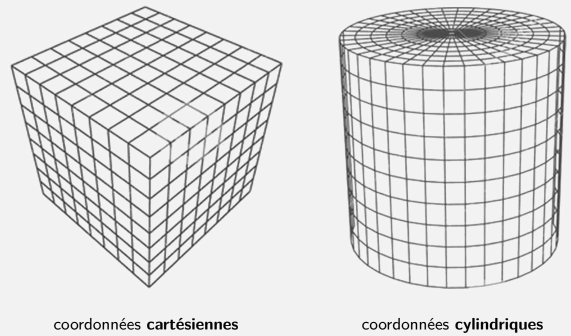
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :*

- *les équations $r = cte, \theta = cte$ donnent une **droite** parallèle à l'axe (Oz) ;*
- *les équations $r = cte, z = cte$ donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ;*
- *les équations $\theta = cte, z = cte$ donnent une **demi-droite** issue de l'axe (Oz) parallèle au plan (Oxy).*

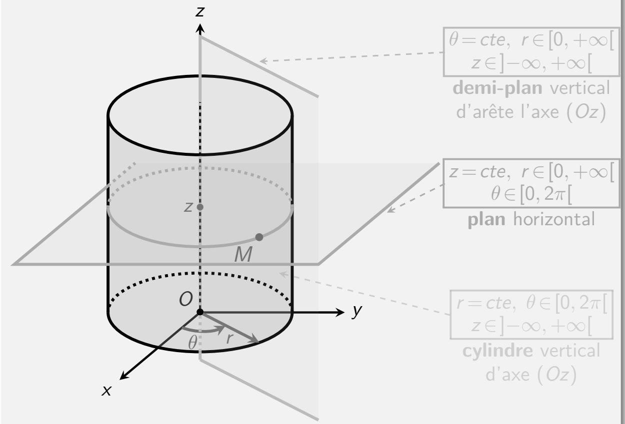
Plus précisément, pour $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta_0, z)$ est la **droite** parallèle à l'axe (Oz) passant par le point de coordonnées cylindriques $(r_0, \theta_0, 0)$;*
- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta, z_0)$ est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z_0)$ et de rayon r_0 parallèle au plan (Oxy) ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0, z_0)$ est **la demi-droite** issue du point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z_0)$ parallèle au plan (Oxy).*

Courbes coordonnées et maillage



Surfaces coordonnées en cylindriques



Propriété 3.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

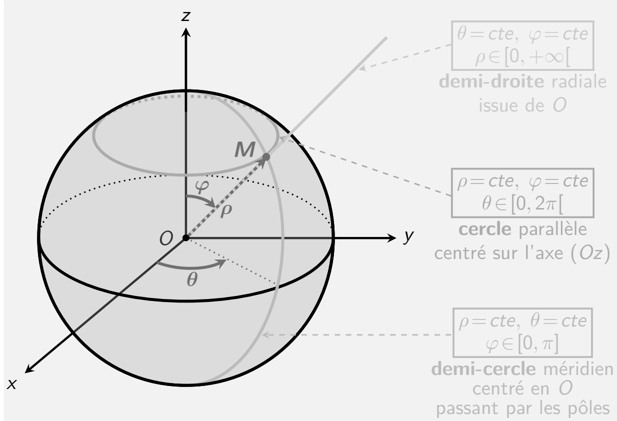
*Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $r = cte$ donne un **cylindre** d'axe (Oz) ;*
- *l'équation $\theta = cte$ donne un **demi-plan** contenant l'axe (Oz) ;*
- *l'équation $z = cte$ donne un **plan** parallèle au plan (Oxy).*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta, z)$ est le **cylindre** d'axe (Oz) et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0, z)$ est le **demi-plan** d'arête (Oz) d'angle polaire θ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta, z_0)$ est le **plan** d'équation $z = z_0$.*

Courbes coordonnées en sphériques



Propriété 3.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

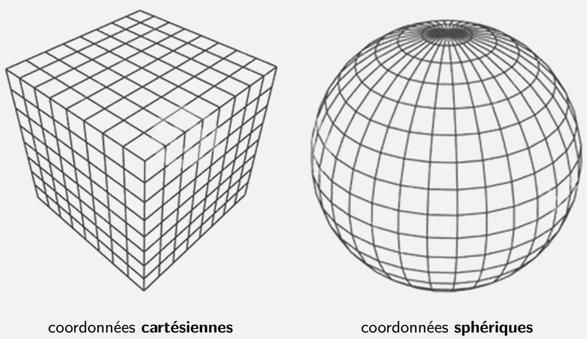
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :*

- *les équations $\rho = cte, \varphi = cte$ donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ($\rightarrow$ « **parallèle** ») ;*
- *les équations $\rho = cte, \theta = cte$ donnent un **demi-cercle** de centre O passant par les pôles (points de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ $\rightarrow$ « **méridien** ») ;*
- *les équations $\theta = cte, \varphi = cte$ donnent une **demi-droite** issue de l'origine O.*

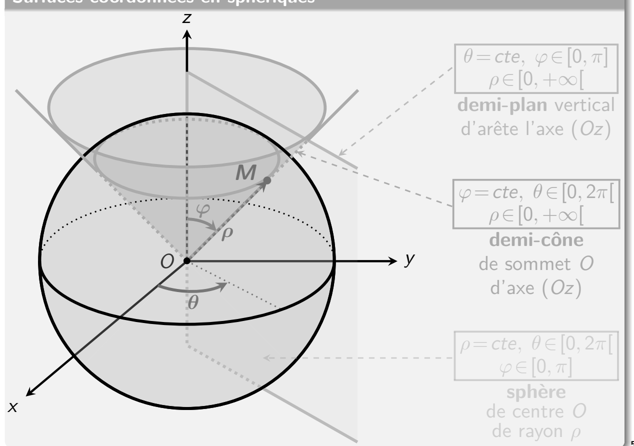
Plus précisément, pour $\rho_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, \pi]$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi_0, \theta)$ est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, \rho_0 \cos \varphi_0)$ et de rayon $\rho_0 \sin \varphi_0$ parallèle au plan (Oxy) ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi, \theta_0)$ est le **demi-cercle** dont un diamètre est le segment constitué des deux pôles et passant par le point de coordonnées cylindriques $(\rho_0, \theta_0, 0)$;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi_0, \theta_0)$ est **la demi-droite** issue de O et passant par le point de coordonnées sphériques $(1, \varphi_0, \theta_0)$.*

Courbes coordonnées et maillage



Surfaces coordonnées en sphériques



Propriété 3.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

*Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\rho = cte$ donne une **sphère** de centre O ;*
- *l'équation $\varphi = cte$ donne un **demi-cône** de centre O et d'axe (Oz).*
- *l'équation $\theta = cte$ donne un **demi-plan** d'arête (Oz) ;*

Plus précisément, pour $\rho_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, \pi]$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi, \theta)$ est la **sphère** de centre O et de rayon ρ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi_0, \theta)$ est le **demi-cône** de centre O, d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet φ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi, \theta_0)$ est le **demi-plan** d'arête (Oz) d'angle azimutal θ_0.*

Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans.**
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit **des demi-plans** soit des **plans.**
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans.**

Courbes coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les courbes coordonnées sont des **droites.**
- En coordonnées **cylindriques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **droites**, soit des **cercles**.
- En coordonnées **sphériques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **demi-cercles**, soit des **cercles.**

Remarque 3.15

Il est inutile de retenir tous ces résultats, il est préférable de savoir les retrouver à l'aide de graphiques.

Repère local

Dans un système de coordonnées, le **repère local** est constitué du point M comme origine et des vecteurs **tangents normés** aux courbes coordonnées, **orientés** dans le sens croissant de la variable.

Nous allons décrire les différents **repères locaux** obtenus dans les systèmes de coordonnées **cartésiennes**, **polaires**, **cylindriques** et **sphériques** en les construisant du point de vue **différentiel**.

Nous allons aussi définir les **déplacements élémentaires** dans chaque **repère local**.

Principe : lorsque les coordonnées subissent de petites variations :
(**déplacement élémentaire** d'un point M) $\approx$ ($\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ **différentielle** du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Méthode théorique

Formule différentielle : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial z}\mathrm{d}z.$

Or $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes donc leurs dérivées en x, y, z sont nulles.

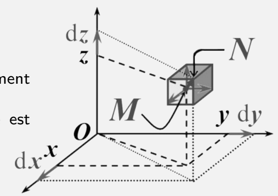
Donc $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x$.

De même, $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$.

$$\boxed{\text{Dans la base cartésienne : } d\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$

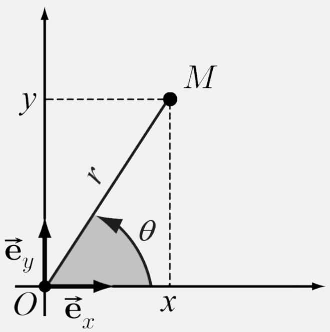
Méthode intuitive :

Le point $N(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ est infiniment proche de $M(x,y,z)$.
Le vecteur variation de position élémentaire est $\overrightarrow{MN} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ assimilé à $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.



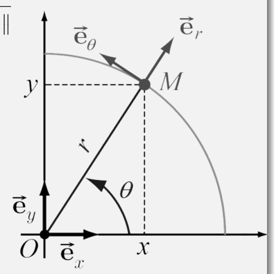
On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ où M est le point du plan défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\theta = $ cste : $\vec{e}_r = \dfrac{\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\right\|}$
  avec $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r} = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y$
  qui est de norme 1 donc :
  $$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$
- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $r = $ cste : $\vec{e}_\theta = \dfrac{\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|}$
  avec $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\,\vec{e}_x + r\cos(\theta)\,\vec{e}_y$
  qui est de norme r donc :
  $$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$



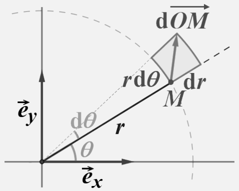
On remarque que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta \text{ sont } \textbf{orthogonaux}}$$

- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ mais pas de r, donc :
  $$\boxed{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$
- $\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\big(\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y\big) = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta)\,\vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$, soit :
  $$\boxed{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta}$$
- $\dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\big(-\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y\big) = -\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \vec{0} - \sin(\theta)\,\vec{e}_y + \vec{0} = -\vec{e}_r$, soit :
  $$\boxed{\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\vec{e}_r}$$

$\Longrightarrow$ Une dérivation par rapport à θ correspond à une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ du vecteur.

- ***1[er] calcul : formule différentielle***
  $$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$$
  Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à r, θ en fonction des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$:
  $$\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta} = r\,\vec{e}_\theta$$
  donc :
  $$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$



- ***2[e] calcul : calcul différentiel***
  Partant de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ on trouve (différentielle produit) :
  $$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}r)\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\vec{e}_r) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\Big(\underbrace{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}}_{\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta\Big) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

Remarque : le « **rectangle curviligne élémentaire** » a pour aire $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.
Cet « **élément de surface élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées polaires dans les intégrales doubles (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 4.1 (Repère local polaire)

*En **coordonnées polaires**, le **repère local** (orthonormé direct) est* $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ *où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **polaire**, par*

$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y = r\,\vec{e}_r$$

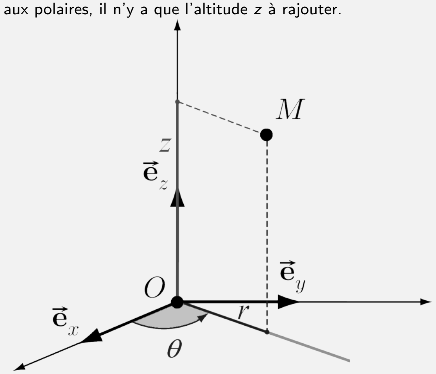
*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **polaire**, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}$$

On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ où M est le point de l'espace défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$$

Par rapport aux polaires, il n'y a que l'altitude z à rajouter.



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée (θ = cste, z = cste) :

$\vec{e}_r = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right\|}$ où $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}$ a été calculé en polaires, donc

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée (r = cste, z = cste) :

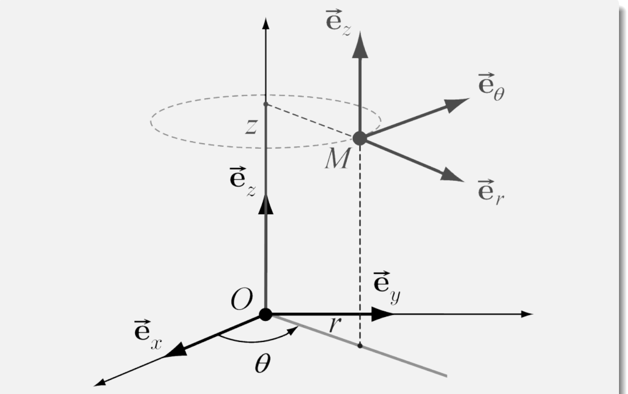
$\vec{e}_\theta = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|}$ où $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}$ a été calculé en polaires, donc

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée (θ = cste, r = cste) :

$\vec{e}_z = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\right\|}$ avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$ qui est de norme 1, donc

$$\boxed{\vec{e}_z = \vec{e}_z}$$



On remarque que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ et } \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z}$$

- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ (mais ni de r, ni de z)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{array}}$$

- $\vec{e}_z$ est constant

$$\boxed{\dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}}$$

- On remarque que

$$\boxed{\dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\Longrightarrow$ Une dérivation par rapport à θ correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ du vecteur.

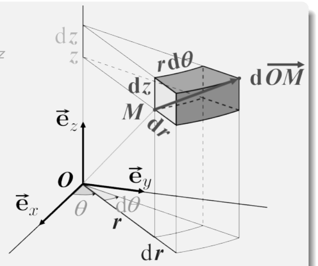
- ***1er calcul : formule différentielle***

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\mathrm{d}z$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à r, θ, z en fonction des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$:

$\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$

$\Longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\vec{e}_r) + (\mathrm{d}z)\,\vec{e}_z + z(\mathrm{d}\vec{e}_z) \\ &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}}_{\vec{0}}\mathrm{d}z\Big) + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z + z\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}_{\vec{0}}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{\vec{0}}\mathrm{d}z\Big) \\ &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \end{aligned}$$

Remarque : le « **parallélépipède curviligne élémentaire** » a pour volume $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
Cet « **élément de volume élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées cylindriques dans les intégrales triples (cf. chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 4.2 (Repère local cylindrique)

*En **coordonnées cylindriques**, le **repère local** (orthonormé direct) est* $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ *où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **cylindrique**, par*

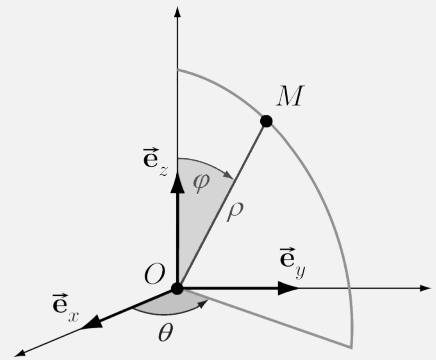
$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **cylindrique**, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$

On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ où M est le point de l'espace défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée φ = cste et θ = cste :

$\vec{e}_\rho = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}\right\|}$ avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ρ = cste et θ = cste :

$\vec{e}_\varphi = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right\|}$ avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \rho\sin(\varphi)\,\vec{e}_z$

qui est de norme ρ, donc :

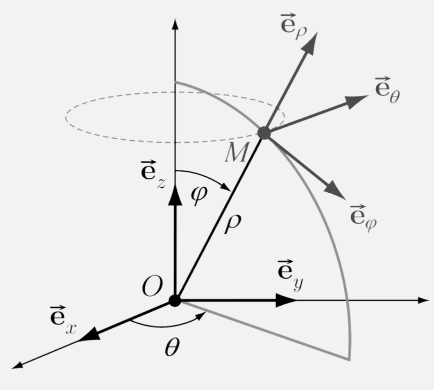
$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ρ = cste et φ = cste :

$\vec{e}_\theta = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|}$ avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y$

qui est de norme $\rho\sin(\varphi)$, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On remarque que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ et } \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ ne dépendent pas de ρ

$$\boxed{\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $\begin{aligned} \dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\big(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z\big) \\ &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$

et un calcul similaire donne $\dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$, et $\vec{e}_\theta$ ne dépend pas de φ, soit :

$$\boxed{\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour $\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$, et l'on a $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y$.
On remarque que

$$\begin{aligned} \sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \cos(\varphi)\vec{e}_\varphi &= \sin(\varphi)\big(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z\big) \\ &\quad + \cos(\varphi)\big(\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z\big) \\ &= \cos(\theta)\big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big)\,\vec{e}_y \\ &\quad + \big(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\big)\,\vec{e}_z \\ &= \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \end{aligned}$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} = \sin(\varphi)\,\vec{e}_\theta \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \cos(\varphi)\,\vec{e}_\theta \quad \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin(\varphi)\,\vec{e}_\rho - \cos(\varphi)\,\vec{e}_\varphi}$

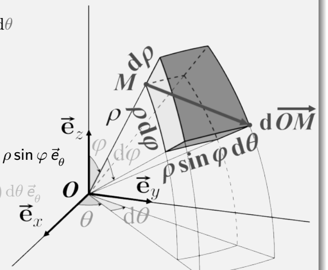
- ***1er calcul : formule différentielle***

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à ρ, φ, θ en fonction des vecteurs $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\,\vec{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin\varphi\,\vec{e}_\theta$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$, on trouve

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}\rho)\,\vec{e}_\rho + \rho(\mathrm{d}\vec{e}_\rho) = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}}_{\vec{0}}\mathrm{d}\rho + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi}\mathrm{d}\varphi + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}}_{\sin\varphi\,\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

Remarque : le « **parallélépipède curviligne élémentaire** » a pour volume $\rho^2 \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. Cet « **élément de volume élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées sphériques dans les intégrales triples (cf. chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 4.3 (Repère local sphérique)

*En **coordonnées sphériques**, le **repère local** (orthonormé direct) est* $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ *où*

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **sphérique**, par*

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z = \rho\,\vec{e}_\rho$$

*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **sphérique**, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}$$

Remarque 4.4 (Base fixe/base locale)

Ne pas confondre :

*« $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées donné dans la **base cartésienne fixe** »*

et

*« $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées donné dans la **base locale** associée à ce système »*

Exemples :

- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **cylindriques** dans la **base cartésienne fixe :**
  $$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$
- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **cylindriques** dans la **base locale** associée :
  $$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$$
- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **sphériques** dans la **base cartésienne fixe :**
  $$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\vec{e}_z}$$
- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **sphériques** dans la **base locale** associée :
  $$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho}$$

Notions à retenir

- Courbes paramétrées
  - Paramétrages des droites, segments et cercles
  - Détermination de la tangente à une courbe en un point et tracé de son allure locale
- Surfaces paramétrées
  - Paramétrages des plans, cylindres, cônes, sphères et tores
  - Détermination du plan tangent à une surface en un point
- Systèmes de coordonnées classiques : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
  - Passage d'un système à un autre
  - Détermination des repères locaux associés
  - Description des lignes et surfaces coordonnées
  - Calcul des dérivées partielles des vecteurs des repères locaux
  - Calcul des déplacements élémentaires correspondants

Annexes

- Courbes paramétrées : cinématique
- Courbes paramétrées planes
- Surfaces planes : plan tangent

Définition A.1 (Vecteur-dérivée ou tangent)

*La courbe paramétrée $\vec{F}$ est **dérivable** si et seulement si les fonctions f, g, h sont dérivables. Sa dérivée est donnée par :*

$$\vec{F}'(t) = f'(t)\,\vec{e}_x + g'(t)\,\vec{e}_y + h'(t)\,\vec{e}_z.$$

*On dit alors que $\vec{F}'(t)$ est le **vecteur tangent** à la courbe paramétrée au point $M(t)$.*

Interprétation cinématique

Généralité	Cinématique
t	temps
support de la courbe paramétrée	trajectoire
$\vec{F}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$	vecteur position
$\vec{F}'(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$	vecteur vitesse
$\vec{F}''(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$	vecteur accélération

Exemple A.2 (Chute dans le vide)

On se place dans un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
Un corps ponctuel de masse m situé à une position initiale (à l'instant 0) $M_0(x_0, 0, z_0)$ et animé d'une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_x\vec{e}_x + v_z\vec{e}_z$ se déplace dans le plan vertical (Oxz) sous l'action d'une force de gravité constante $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ $(g > 0)$.

- Modélisation : soit $M(t)(x(t), y(t), z(t))$ la position du corps à l'instant t.

  On a les conditions initiales $M(0)(x_0, 0, z_0)$ et $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = v_x\vec{e}_x + v_z\vec{e}_z$.

  Le vecteur **accélération** est donné par $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = -g\vec{e}_z$.
- En intégrant une première fois, on trouve le vecteur **vitesse** :
  $$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = -gt\vec{e}_z + \vec{v}_0 = v_x\vec{e}_x + (-gt + v_z)\vec{e}_z$$
- En intégrant une deuxième fois, on trouve le vecteur **position** :
  $$\overrightarrow{OM}(t) = v_x t\vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_z t\right)\vec{e}_z + \overrightarrow{OM_0} = (v_x t + x_0)\vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0\right)\vec{e}_z$$

  Ainsi, dans $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:
  $$M(t)\left(v_x t + x_0, 0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0\right)$$

Exemple A.2 (Chute dans le vide)

On se place dans un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
Un corps ponctuel de masse m situé à une position initiale (à l'instant 0) $M_0(x_0, 0, z_0)$ et animé d'une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_x\vec{e}_x + v_z\vec{e}_z$ se déplace dans le plan vertical (Oxz) sous l'action d'une force de gravité constante $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ $(g > 0)$.

- La trajectoire du corps admet une représentation **paramétrique** donnée par
  $$\begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0 \end{cases}, \quad t \geqslant 0$$

  En « éliminant » le paramètre t dans les équations précédentes, on tire $t = (x - x_0)/v_x$ puis une équation **cartésienne** de la trajectoire
  $$z = -\frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_z}{v_x}(x - x_0) + z_0, \quad x \geqslant x_0$$

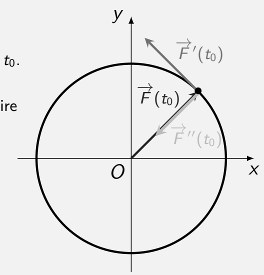
  Il s'agit d'une **parabole** dans le plan (Oxz).

Exemple A.3 (Mouvement circulaire uniforme)

Considérons le cercle trigonométrique parcouru à une vitesse angulaire $\omega > 0$ constante (mouvement **circulaire uniforme**) :

$$\vec{F}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y$$

1. Le vecteur-dérivée est donné par
   $$\vec{F}'(t_0) = -\omega\sin(\omega t_0)\vec{e}_x + \omega\cos(\omega t_0)\vec{e}_y$$
   Puisque $\|\vec{F}'(t_0)\| = \omega \neq 0$, on a $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$, donc ce vecteur dirige la tangente au cercle en t_0. C'est le **vecteur-vitesse**.
   On remarque que $\vec{F}(t_0) \cdot \vec{F}'(t_0) = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{F}(t_0)$ et $\vec{F}'(t_0)$ sont **orthogonaux**.
2. Le vecteur-dérivée seconde est donné par
   $$\vec{F}''(t_0) = -\omega^2\cos(\omega t_0)\vec{e}_x - \omega^2\sin(\omega t_0)\vec{e}_y$$
   On remarque que $\vec{F}''(t_0) = -\omega^2\vec{F}(t_0)$.
   Le **vecteur-accélération** est dirigé vers O selon l'opposé du rayon-vecteur, il s'agit d'un mouvement à **accélération centrale**.



Définition A.4 (Point régulier/singulier)

- *Lorsque $\vec{F}'(t) \neq \vec{0}$ on dit que $M(t)$ est un point **régulier**.*
- *Lorsque $\vec{F}'(t) = \vec{0}$, on dit que $M(t)$ est un point **stationnaire** (ou **singulier**).*

Propriété A.5 (Point régulier/singulier et tangente)

Soit M_0 le point de paramètre t_0.

- *si M_0 est **régulier**, alors la courbe admet en M_0 une **tangente** de vecteur directeur $\vec{F}'(t_0) = x'(t_0)\vec{e}_x + y'(t_0)\vec{e}_y + z'(t_0)\vec{e}_z$.*
  Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) \\ Z = z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

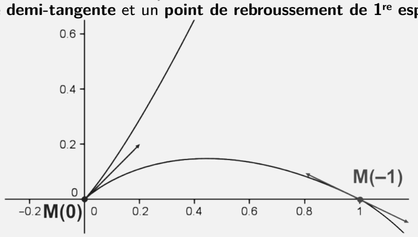
  *Si de plus $\vec{F}''(t_0)$ **n'est pas colinéaire** à $\vec{F}'(t_0)$, alors la position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le sens de $\vec{F}''(t_0)$ (il pointe du côté de la courbe indiquant la **concavité/convexité** locale).*
- *si M_0 est **stationnaire**, $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$, le premier vecteur-dérivé **non nul** $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ dirigera la **tangente** à la courbe en M_0.*

Exemple A.6 (Une courbe plane)

Étude de l'allure de la **courbe paramétrée** $t \longmapsto \vec{F}(t) = t^2\vec{e}_x + (t^2 + t^3)\vec{e}_y$ au voisinage des points de paramètres -1 et 0.

On calcule $\vec{F}'(t) = 2t\,\vec{e}_x + (2t + 3t^2)\vec{e}_y$ et $\vec{F}''(t) = 2\vec{e}_x + (2 + 6t)\vec{e}_y$.

- $t = -1$: le point $(1, 0)$ est **régulier** et $\vec{F}'(-1) = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ est **vecteur tangent** à la courbe, qui reste du même côté que le vecteur $\vec{F}''(1) = 2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$.
- $t = 0$: le point $(0, 0)$ est **stationnaire** car $\vec{F}'(0) = \vec{0}$. Un **vecteur tangent** est dans ce cas $\vec{F}''(0) = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ (et la position est donnée par $\vec{F}'''(0) = 6\vec{e}_y$; on a une **demi-tangente** et un **point de rebroussement de 1^re^ espèce**).



Exemple A.7 (Hélice circulaire)

L'**hélice circulaire** d'axe Oz, de rayon R et de pas h admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \\ z = \dfrac{h}{2\pi}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Notons $\vec{F}$ la fonction vectorielle correspondante :

$$\vec{F}(t) = R\cos(t)\vec{e}_x + R\sin(t)\vec{e}_y + \frac{h}{2\pi}t_0\vec{e}_z$$

Le **vecteur tangent** au point M_0 de paramètre t_0 vaut

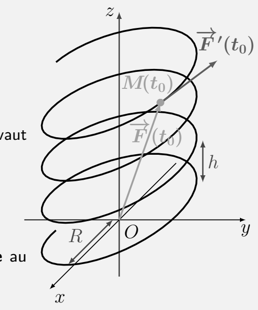
$$\vec{F}'(t_0) = -R\sin(t_0)\vec{e}_x + R\cos(t_0)\vec{e}_y + \frac{h}{2\pi}\vec{e}_z$$

Sa norme vaut $\|\vec{F}'(t_0)\| = \sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} > 0$.

Ainsi tous les points de l'hélice sont **réguliers**.

Une représentation paramétrique de la **tangente** au point M_0 est donnée par :

$$\begin{cases} x = -R\sin(t_0)(t - t_0) + R\cos(t_0) \\ y = R\cos(t_0)(t - t_0) + R\sin(t_0) \\ z = \dfrac{h}{2\pi}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$



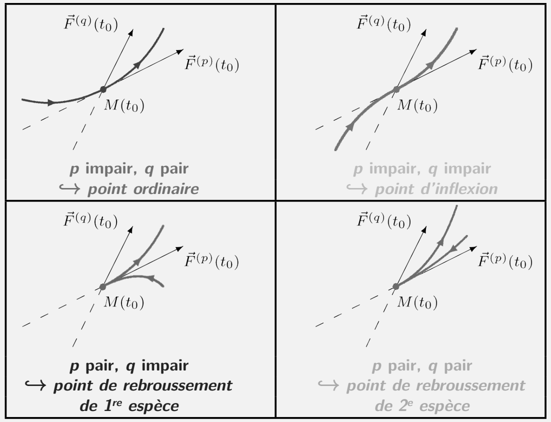
Propriété B.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))

1. Si $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ (cas d'un **point régulier**), la courbe admet une **tangente** en M_0 portée par $\vec{F}'(t_0)$. De plus :
   - si $\vec{F}''(t_0)$ **n'est pas colinéaire** à $\vec{F}'(t_0)$, $\vec{F}''(t_0)$ indique la concavité locale.
     ↪ On dit que M_0 est un **point ordinaire** ;
   - si $\vec{F}''(t_0)$ **est colinéaire** à $\vec{F}'(t_0)$ et si $\vec{F}'''(t_0)$ **n'est pas colinéaire** à $\vec{F}'(t_0)$, alors la courbe traverse sa tangente au point $M(t_0)$ en changeant de concavité localement.
     ↪ On dit que M_0 est un **point d'inflexion**.
2. Si $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ (cas d'un **point singulier**) et si $\vec{F}''(t_0) \neq \vec{0}$, la courbe admet une **demi-tangente** en M_0 portée par $\vec{F}''(t_0)$. De plus :
   - si $\vec{F}'''(t_0)$ **n'est pas colinéaire** à $\vec{F}''(t_0)$, alors la courbe traverse sa demi-tangente au point $M(t_0)$.
     ↪ On dit que M_0 est un **point de rebroussement de 1^re^ espèce** ;
   - si $\vec{F}'''(t_0)$ **est colinéaire** à $\vec{F}''(t_0)$ et si $\vec{F}^{(4)}(t_0)$ **n'est pas colinéaire** à $\vec{F}'''(t_0)$, alors la courbe reste d'un seul côté de sa demi-tangente au point $M(t_0)$.
     ↪ On dit que M_0 est un **point de rebroussement de 2^e^ espèce**.

Propriété B.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))

3. Plus généralement, lorsque $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ (cas d'un **point singulier**) :
   on recherche le premier entier $p \geqslant 2$ tel que $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$,
   puis le premier entier $q > p$ tel que $\vec{F}^{(q)}(t_0)$ **ne soit pas colinéaire** à $\vec{F}^{(p)}(t_0)$.
   - ***Cas où p est impair***
     La courbe admet une **tangente** en M_0 portée par $\vec{F}^{(p)}(t_0)$.
     De plus :
     - si q est **pair**, alors $\vec{F}^{(q)}(t_0)$ indique la concavité locale.
       ↪ On dit que M_0 est un **point ordinaire** ;
     - si q est **impair**, alors la courbe traverse sa tangente au point M_0 en changeant de concavité localement.
       ↪ On dit que M_0 est un **point d'inflexion**.
   - ***Cas où p est pair***
     La courbe admet une **demi-tangente** en M_0 dirigée par $\vec{F}^{(p)}(t_0)$.
     De plus :
     - si q **impair**, alors la courbe traverse sa demi-tangente au point M_0.
       ↪ On dit que M_0 est un **point de rebroussement de 1^re^ espèce** ;
     - si q est **pair**, alors la courbe reste d'un seul côté de sa demi-tangente au point $M(t_0)$.
       ↪ On dit que M_0 est un **point de rebroussement de 2^e^ espèce**.

Propriété B.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))



Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée plane définie par la fonction vectorielle $\vec{F} : I \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y$, on suit le protocole suivant :

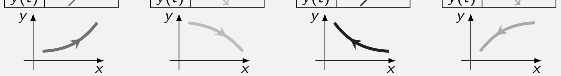
1. on **réduit** au maximum l'intervalle d'étude I en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;
2. on étudie les **variations simultanées** des fonctions x et y sur l'intervalle réduit ;

t	t_0	t_1
$x'(t)$	+	
$y'(t)$	+	
$x(t)$	↗	
$y(t)$	↗	

t	t_0	t_1
$x'(t)$	+	
$y'(t)$	−	
$x(t)$	↗	
$y(t)$	↘	

t	t_0	t_1
$x'(t)$	−	
$y'(t)$	+	
$x(t)$	↘	
$y(t)$	↗	

t	t_0	t_1
$x'(t)$	−	
$y'(t)$	−	
$x(t)$	↘	
$y(t)$	↘	



3. on **commence à tracer** le support en identifiant :
   - des points particuliers (d'éventuels **points singuliers** non étudiés ici) ;
   - les **tangentes** en ces points. En particulier lorsque $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ (resp. $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$), la tangente correspondante est **horizontale** (resp. **verticale**) ;
   - d'éventuelles **branches infinies** (non étudiées ici) ;
4. on **termine le tracé** en appliquant les **symétries** identifiées au début.

Exemple B.2 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée $\vec{F} = \overrightarrow{OM} : \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall t \in [0, 2\pi]$, $M(2\pi - t) = s_O(M(t))$
  où s_O est la symétrie du plan par rapport à l'origine O
  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$ se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$ par la symétrie par rapport à O
  $\Longrightarrow$ première réduction : étude sur $[0, \pi]$
- $\forall t \in [0, \pi]$, $M(\pi - t) = s_{Ox}(M(t))$
  où s_{Ox} est la symétrie du plan par rapport à l'axe Ox
  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ se déduit donc de celui relatif à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par la symétrie par rapport à Ox
  $\Longrightarrow$ deuxième réduction : étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

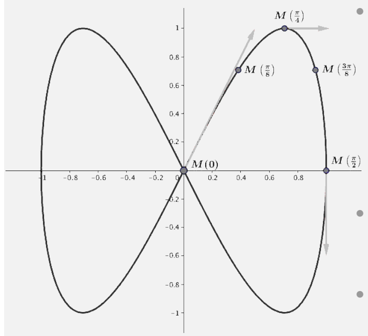
Variations simultanées

$$\vec{F}'(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	+	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	+	0
$y'(t)$	2	+	0	−	−2
$x(t)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	1
$y(t)$	0	↗	1	↘	0

Exemple B.2 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée $\vec{F} = \overrightarrow{OM} : \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$



- **Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**
  – Tangente au point $M(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
  – Tangente au point $M(\frac{\pi}{4})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
  – Tangente au point $M(\frac{\pi}{2})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$
- **Tracé sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$**
  On effectue la symétrie par rapport à l'axe Ox
- **Tracé sur $[\pi, 2\pi]$**
  On effectue la symétrie par rapport à l'origine O

Plan tangent

Les vecteurs tangents aux courbes coordonnées, s'il existent, sont tangents à la surface.

Par conséquent, les vecteurs $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$, s'ils sont **non nuls,** sont **tangents** à la surface Σ au point $M(u_0, v_0)$.

S'ils sont de plus **non colinéaires**, ces vecteurs permettent de définir le **plan tangent** à la surface Σ au point $M(u_0, v_0)$. On dit que le point M est **régulier**. Dans ce cas, le vecteur

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

est un vecteur **normal** à ce plan tangent, donc à la surface Σ.

Si ces vecteurs sont **colinéaires** (éventuellement si l'un d'entre eux est nul), on a $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{0}$. On dit que le point M est **singulier**.