

# Coordonnées curvilignes

*Aimé Lachal*

Cours d'OMNI  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## 1 Courbes paramétrées

- Droite, segment, cercle
- Courbes générales

## 2 Surfaces paramétrées

- Plan
- Surfaces générales
- Cylindre
- Cône
- Sphère
- Tore

## 3 Systèmes de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes
- Coordonnées polaires
- Coordonnées cylindriques
- Coordonnées sphériques
- Courbes et surfaces coordonnées

## 4 Repères locaux

- Cartésiens : déplacement élémentaire
- Polaires : obtention des vecteurs
- Polaires : dérivées des vecteurs
- Polaires : déplacement élémentaire
- Cylindriques : obtention des vecteurs
- Cylindriques : dérivées des vecteurs
- Cylindriques : déplacement élémentaire
- Sphériques : obtention des vecteurs
- Sphériques : dérivées des vecteurs
- Sphériques : déplacement élémentaire

- ① Courbes paramétrées
  - Droite, segment, cercle
  - Courbes générales
- ② Surfaces paramétrées
- ③ Systèmes de coordonnées
- ④ Repères locaux

### Propriété 1.1 (Représentation paramétrique d'une droite)

Si  $(D)$  est une droite de l'espace de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  et passant par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , alors  $(D)$  admet la **représentation paramétrique** suivante, obtenue en projetant l'équation vectorielle  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$  de paramètre  $t$  sur les 3 axes.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + u_x t \\ y(t) = y_0 + u_y t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) = z_0 + u_z t \end{cases}$$

Chaque valeur du paramètre  $t$  donne un point  $M(t)$  de la droite.

Cette représentation paramétrique n'est **pas unique**, puisqu'elle dépend du choix du point  $M_0$  et du vecteur directeur  $\vec{u}$ . On peut aussi changer le paramètre  $t$ ...

## Exemple 1.2 (Différents paramétrages de droite)

- Les paramétrages  $\begin{cases} x(t) = -1 + 2t \\ y(t) = 3 - 5t \\ z(t) = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  et  $\begin{cases} x(t) = 5 + 4t \\ y(t) = -12 - 10t \\ z(t) = 7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

correspondent tous deux à la même droite. En effet :

- \* le premier paramétrage indique immédiatement la droite dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$  et passant par le point  $A(-1, 3, 4)$ ;
- \* le deuxième paramétrage indique immédiatement la droite dont un vecteur directeur est  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$  et passant par le point  $B(5, -12, 7)$ .

On observe que  $\vec{v} = 2\vec{u}$  et  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{u}$ , ce sont bien les mêmes droites.

- La représentation  $\begin{cases} x(t) = -1 + 2t^3 \\ y(t) = 3 - 5t^3 \\ z(t) = 4 + t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  est encore un autre paramétrage de la

droite précédente, obtenue par substitution **bijective** de paramètre  $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.3 (Représentation paramétrique d'un segment)**

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de coordonnées  $(x_A, y_A, z_A)$  et  $(x_B, y_B, z_B)$ .

- Un paramétrage de la **droite** ( $AB$ ) est donc

$$\begin{cases} x(t) = x_A + t(x_B - x_A) \\ y(t) = y_A + t(y_B - y_A), \quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}$$

- Un paramétrage du **segment**  $[AB]$  est

$$\begin{cases} x(t) = x_A + t(x_B - x_A) \\ y(t) = y_A + t(y_B - y_A), \quad t \in [0, 1] \text{ ou encore} \\ z(t) = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = (1-t)x_A + tx_B \\ y(t) = (1-t)y_A + ty_B, \quad t \in [0, 1] \\ z(t) = (1-t)z_A + tz_B \end{cases}$$

Avec ce choix de paramétrage,  $M(0) = A$  et  $M(1) = B$ .

**Exemple 1.4 (Paramétrage d'un segment dans le plan)**

Un paramétrage du segment  $[AB]$  dans un repère du plan avec  $A(-1, 3)$  et  $B(2, 4)$  est

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 3t \\ y(t) = 3 + t \end{cases}, \quad t \in [0; 1] \text{ (pas de composante en } z\text{).}$$

# 1. Courbes paramétrées

## a) Cercle

### Propriété 1.5 (Représentation paramétrique d'un cercle)

Le **cercle** du **plan** de centre  $A(x_A, y_A)$  et de rayon  $R$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  peut se paramétriser selon

$$\begin{cases} x(t) = x_A + R \cos(t) \\ y(t) = y_A + R \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Une **représentation cartésienne** de ce cercle est donnée par l'équation  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ .

Le paramétrage d'un cercle de l'espace est plus difficile à obtenir, sauf dans des cas simples (lorsque le plan du cercle est parallèle à l'un des plans de coordonnées).

### Exemple 1.6 (Cercle dans l'espace)

Un paramétrage du cercle de l'espace de rayon  $R > 0$  et de centre  $A(1, 2, 3)$  parallèle au plan  $(Oxz)$  est donné par

$$\begin{cases} x(t) = 1 + R \cos(t) \\ y(t) = 2 \\ z(t) = 3 + R \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

**Définition 1.7 (Courbe paramétrée)**

Soit  $f, g$  et  $h$  des fonctions définies sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction vectorielle définie par  $\vec{F}(t) = f(t)\vec{e}_x + g(t)\vec{e}_y + h(t)\vec{e}_z$ .

- ① Alors la donnée de  $I$  et de  $\vec{F}$  est appelée **courbe paramétrée** de l'espace ou **arc paramétré**. On utilisera aussi la notation  $\overrightarrow{OM}(t)$  pour  $\vec{F}(t)$ .

Dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le point  $M(t)$  a pour coordonnées  $(f(t), g(t), h(t))$

et dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}(t)$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ .

- ② L'ensemble des points de coordonnées  $(f(t), g(t), h(t))$  pour  $t \in I$  est appelé **support de la courbe**, et la variable  $t$  est appelée **paramètre**.

On dit que le système  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in I \\ z = h(t) \end{cases}$  est une **représentation paramétrique** de la courbe paramétrée dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Parfois on marque la dépendance de  $x, y, z$  en  $t$  en écrivant  $x(t), y(t), z(t)$ .

- ③ On définit de manière similaire une courbe paramétrée du plan à l'aide d'une fonction vectorielle  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Remarque 1.8 (Aspects statique/dynamique)**

Deux courbes paramétrées ayant le même support peuvent avoir des paramétrages différents.

Le **support** donne une vision **statique** de la courbe, le **paramétrage** induit une **dynamique** de parcours sur le support.

- Par exemple, les courbes paramétrées

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}, t \in [0, \pi]$$

ont le même support : le cercle trigonométrique.

Mais ce cercle n'est pas décrit à la même vitesse, ni dans le même sens ; de plus, le point de départ de la dynamique n'est pas le même.

- De même, les courbes paramétrées

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

ont le même support : le cercle trigonométrique.

Mais ce cercle n'est pas décrit à la même vitesse ; de plus, il est parcouru une fois dans le premier cas, deux fois dans le second.

1 Courbes paramétrées

2 Surfaces paramétrées

- Plan
- Surfaces générales
- Cylindre
- Cône
- Sphère
- Tore

3 Systèmes de coordonnées

4 Repères locaux

### Propriété 2.1 (Représentation paramétrique d'un plan)

*Si  $(P)$  est un plan de l'espace passant par  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et dirigé par les vecteurs non*

*colinéaires  $\vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ , alors  $(P)$  admet la **représentation paramétrique***

*suivante, obtenue en projetant l'équation vectorielle  $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$  de paramètres  $u, v$  sur les 3 axes :*

$$\begin{cases} x(u, v) = x_0 + a_x u + b_x v \\ y(u, v) = y_0 + a_y u + b_y v, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\ z(u, v) = z_0 + a_z u + b_z v \end{cases}$$

*À chaque valeur du couple  $(u, v)$  correspond un point  $M(u, v)$  du plan  $(P)$ .*

*Cette représentation paramétrique n'est **pas unique**, puisqu'elle dépend du choix du point  $M_0$  et des vecteurs directeurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  du plan  $(P)$ . On peut aussi changer les paramètres  $u, v$ ...*

## Exemple 2.2 (Paramétrages différents d'un plan)

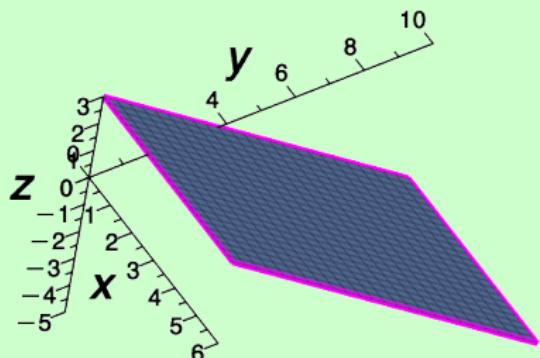
- Le paramétrage  $\mathcal{P}_1$  : 
$$\begin{cases} x(u, v) = 2u \\ y(u, v) = 5v \\ z(u, v) = 3 - 4v \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$
 représente le plan passant par le point  $A(0, 0, 3)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$
- Le paramétrage  $\mathcal{P}_2$  : 
$$\begin{cases} x(s, t) = 2 + 2s + 2t \\ y(s, t) = 5t \\ z(s, t) = 3 - 4t \end{cases}, (s, t) \in \mathbb{R}^2,$$
 représente le plan passant par le point  $B(2, 0, 3)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$
- \* En choisissant  $u = 1$  et  $v = 0$  dans  $\mathcal{P}_1$ , on voit que  $B \in \mathcal{P}_2.$   
De plus, on remarque que  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$  Ainsi  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1.$   
On peut le retrouver en posant  $u = s + t$  et  $v = t.$
- \* Réciproquement,  $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$ , donc  $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2.$   
On peut le retrouver en posant  $s = u - v$  et  $t = v.$
- \* En conclusion,  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2.$

## Exemple 2.2 (Paramétrages différents d'un plan)

- La représentation paramétrique  $\begin{cases} x(u, v) = 2u^3 \\ y(u, v) = 5v^5 \\ z(u, v) = 3 - 4v^5 \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , est un autre paramétrage du plan  $P_1$ . Il est simplement obtenu en remplaçant les paramètres  $u$  et  $v$  par  $u^3$  et  $v^5$  qui décrivent chacun  $\mathbb{R}$ .
- Le paramétrage

$$\begin{cases} x(u, v) = 2u \\ y(u, v) = 5v \\ z(u, v) = 3 - 4v \end{cases}, (u, v) \in [0, 3] \times [0, 2]$$

représente le **parallélogramme** de sommets obtenus en choisissant pour les paramètres  $u$  et  $v$  les bornes des intervalles  $[0, 3]$  et  $[0, 2]$ , soit les points de coordonnées  $(0, 0, 3), (6, 0, 3), (6, 10, -5), (0, 10, -5)$ .



### Définition 2.3 (Surface paramétrée)

Soit  $f, g$  et  $h$  des fonctions définies sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction vectorielle définie par  $\vec{F}(u, v) = f(u, v)\vec{e}_x + g(u, v)\vec{e}_y + h(u, v)\vec{e}_z$ .

- Alors la donnée de  $D$  et de  $\vec{F}$  est appelée **surface paramétrée** de l'espace ou **nappe paramétrée**. On utilisera aussi la notation  $\overrightarrow{OM}(u, v)$  pour  $\vec{F}(u, v)$ .

Dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le point  $M(u, v)$  a pour coordonnées

$(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$  et dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}(u, v)$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ h(u, v) \end{pmatrix}$ .

- L'ensemble des points de coordonnées  $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$  pour  $(u, v) \in D$  est appelé **support de la surface**, et les variables  $u, v$  sont appelés **paramètres**.

On dit que le système  $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), (u, v) \in D \\ z = h(u, v) \end{cases}$  est une **représentation**

**paramétrique** de la surface paramétrée dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Parfois on marque la dépendance de  $x, y, z$  en  $u, v$  en écrivant  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ .

Le fait qu'il y ait 2 paramètres  $u$  et  $v$  correspond à la notion intuitive de « **dimension 2** ».

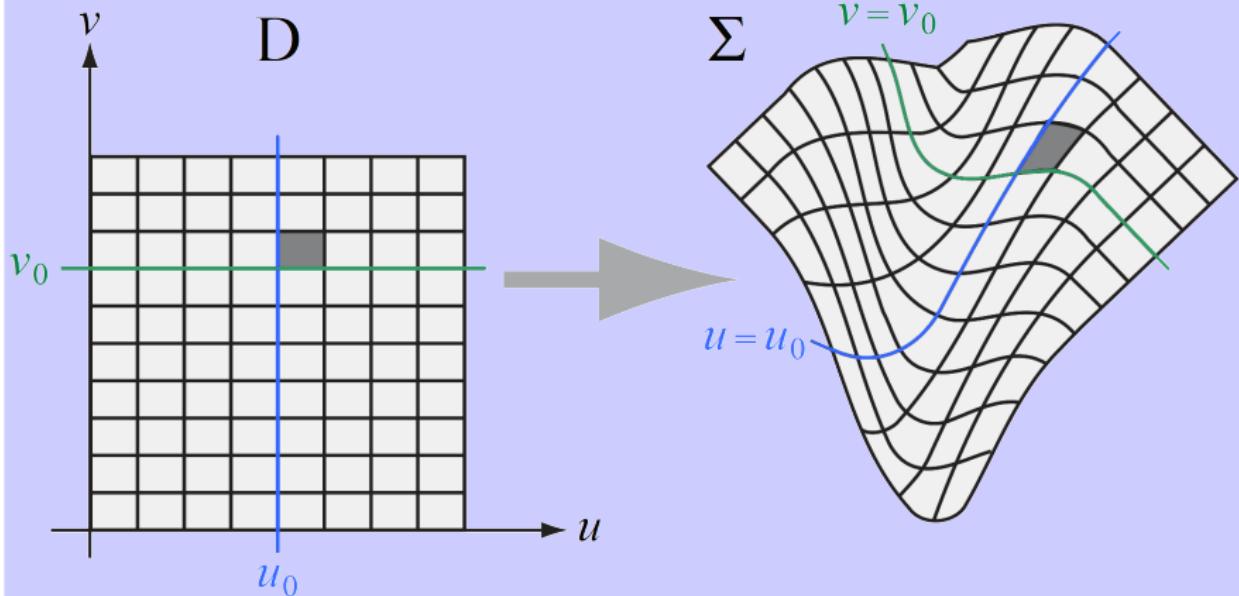
**Définition 2.4 (Courbes coordonnées)**

Soit  $\Sigma$  le support de la surface paramétrée  $(u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v)$ .

Lorsque  $u_0$  est fixé,  $v \mapsto \overrightarrow{OM}(u_0, v)$  définit une courbe contenue dans  $\Sigma$  ;

de même, lorsque  $v_0$  est fixé,  $u \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v_0)$  définit une courbe contenue dans  $\Sigma$ .

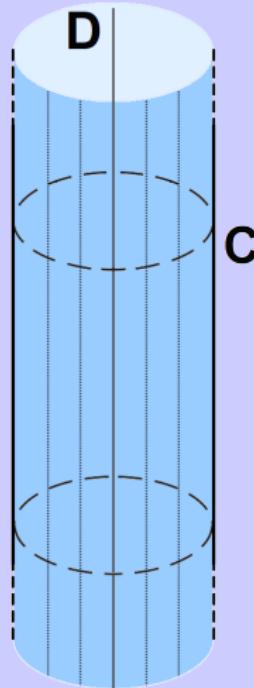
Ces courbes sont appelées **courbes coordonnées**.



### Définition 2.5 (Cylindre)

Soit  $D$  une droite et  $C$  un cercle de l'espace de centre appartenant à  $D$  tels que  $C$  soit situé dans le plan orthogonal à la droite  $D$ .

Le **cylindre de révolution** de base  $C$  et d'axe  $D$  est la surface obtenue en réunissant toutes les droites parallèles à  $D$  intersectant  $C$ .



### Propriété 2.6 (Représentation paramétrique)

Le cylindre infini d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $R$  peut être paramétrisé par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad \vec{F}(u, v) = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ :

$$\begin{cases} x(u, v) = R \cos(u) \\ y(u, v) = R \sin(u), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $x^2 + y^2 = R^2$  (sous-entendu  $z \in \mathbb{R}$  quelconque).

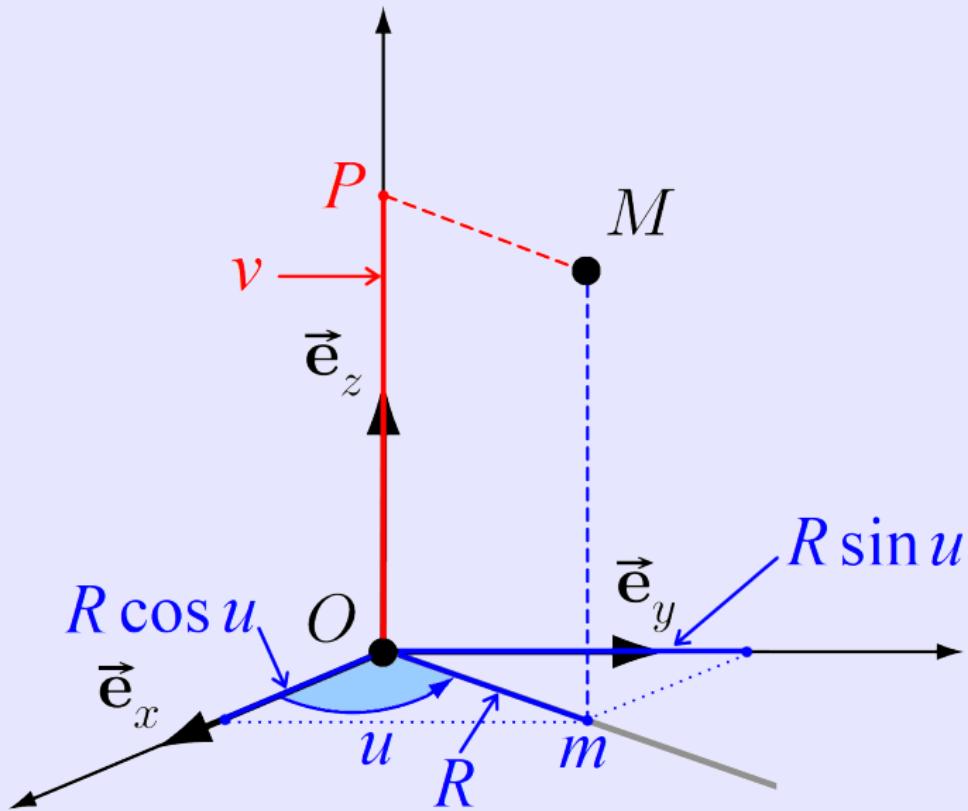
En effet, en choisissant le cercle  $C$  dans le plan  $(Oxy)$  centré en  $O$  et en notant  $R$  son rayon, un point générique  $m$  de  $C$  s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{Om} = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y, \quad u \in [0, 2\pi]$$

D'autre part, un point générique  $M$  du cylindre s'obtient en remarquant que ses projets orthogonaux sur le plan  $(Oxy)$  et sur l'axe  $(Oz)$  sont des points génériques respectivement  $m$  de  $C$  et  $P$  de  $(Oz)$ , donc de la forme  $\overrightarrow{OP} = v \vec{e}_z$ ,  $v \in \mathbb{R}$ .

Enfin :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP} = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$ .

## Cylindre de révolution d'axe ( $Oz$ ) de rayon $R$



## Remarque 2.7 (Coupes)

- \* Les « **coupes** » à  $u$  constant sont des **droites** parallèles à l'axe ( $Oz$ ).
- \* Les « **coupes** » à  $v$  constant des **cercles** de rayon  $R$  d'axe ( $Oz$ ).
- On verra ultérieurement le lien avec le système des  **coordonnées cylindriques** :

$$\begin{cases} u \longleftrightarrow \theta \\ v \longleftrightarrow z \\ R \longleftrightarrow r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Exemple 2.8 (Cylindre d'axe ( $Ox$ ))

- Une représentation paramétrique du cylindre d'axe ( $Ox$ ), de rayon 2 compris entre les plans d'équation  $x = 0$  et  $x = 5$  (donc de longueur totale 5) est donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = v \\ y(u, v) = 2 \cos(u), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5]. \\ z(u, v) = 2 \sin(u) \end{cases}$$

- Une représentation paramétrique du « **solide** » délimité par le cylindre précédent est alors donnée par

$$\begin{cases} x(r, u, v) = v \\ y(r, u, v) = r \cos(u), \quad r \in [0, 2], u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5]. \\ z(r, u, v) = r \sin(u) \end{cases}$$

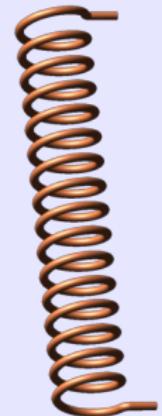
## Cylindres dans la nature



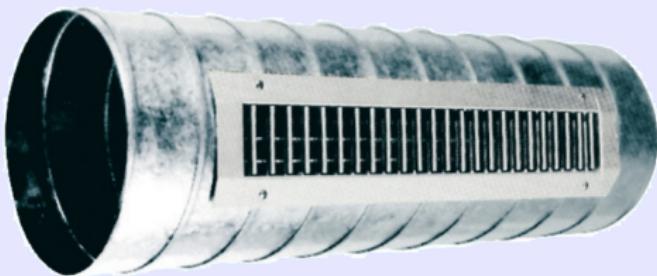
Chéneau



Colonnes de la citadelle d'Amman (Jordanie)



Solenoïde



Gaine de climatisateur



Manchon

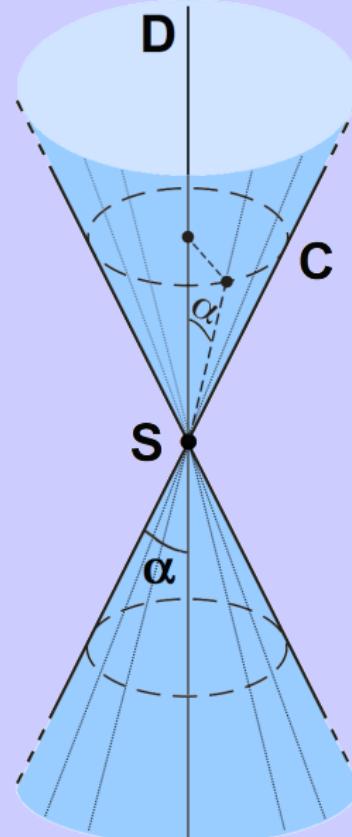
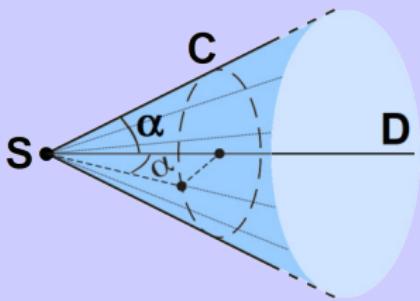
**Définition 2.9 (Cône)**

Soit  $S$  un point de l'espace,  $D$  une droite passant par  $S$  et  $C$  un cercle d'axe  $D$  de centre distinct de  $S$ .

Le **cône de révolution** de sommet  $S$  et de base  $C$  est la surface obtenue en réunissant toutes les droites passant par  $S$  intersectant  $C$ .

On appelle **axe** du cône la droite  $D$  et **demi-angle au sommet** du cône l'angle  $\alpha$  entre son axe et n'importe quelle droite du cône.

Le **demi-cône de révolution** de sommet  $S$  et de base  $C$  est la surface obtenue en réunissant toutes les demi-droites issues de  $S$  intersectant  $C$ .



**Propriété 2.10 (Représentation paramétrique)**

Le **cône** d'axe ( $Oz$ ), de sommet  $O$  et de demi-angle au sommet  $\alpha$  peut être paramétré par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad \vec{F}(u, v) = v \tan(\alpha) \cos(u) \vec{e}_x + v \tan(\alpha) \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\boxed{\begin{cases} x(u, v) = v \tan(\alpha) \cos(u) \\ y(u, v) = v \tan(\alpha) \sin(u) , \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} \\ z(u, v) = v \end{cases}}$$

Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha) z^2$ .

En effet : considérons un point générique  $M$  du cône et introduisons ses projets orthogonaux  $m$  sur le plan ( $Oxy$ ) et  $P$  sur l'axe ( $Oz$ ).

On obtient ainsi un point générique  $P$  de  $(Oz)$ , donc de la forme  $\vec{OP} = v \vec{e}_z$ ,  $v \in \mathbb{R}$ .

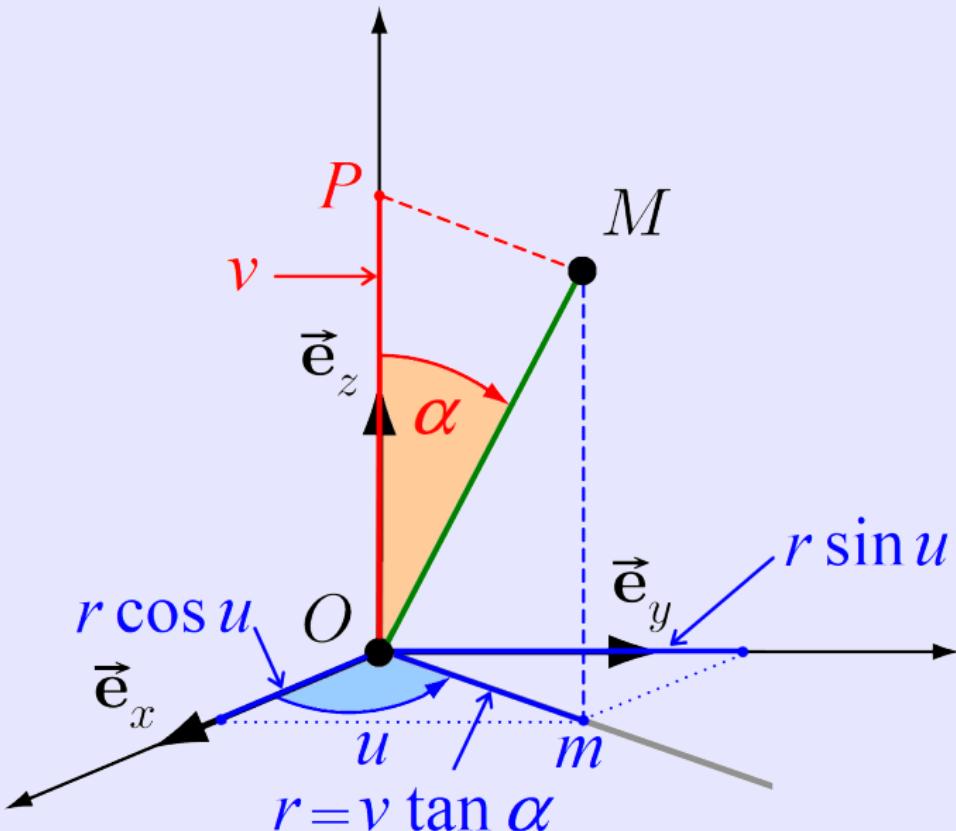
D'autre part, l'angle  $\widehat{MOP}$  coïncidant avec  $\alpha$ , on a  $Om = PM = v \tan(\alpha)$ .

En notant  $r = v \tan(\alpha)$ , on obtient alors un point générique  $m$  du cercle de centre  $O$  de rayon  $r$  dans le plan ( $Oxy$ ), donc de la forme  $\vec{Om} = r \cos(u) \vec{e}_x + r \sin(u) \vec{e}_y$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ .

D'où :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP} = r \cos(u) \vec{e}_x + r \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Cône de révolution de sommet  $O$  d'axe ( $Oz$ ) de demi-angle au sommet  $\alpha$



## Remarque 2.11 (Coupes)

- Une autre représentation paramétrique du cône est donnée par

$$\begin{cases} x = v \cos(u) \\ y = v \sin(u), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} \\ z = \cot(\alpha) v \end{cases}$$

où  $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$  est la « cotangente » de l'angle  $\alpha$ .

- \* Les « coupes » à  $u$  constant sont des **droites** concourantes en  $O$ .  
 \* Les « coupes » à  $v$  constant sont des **cercles** d'axe ( $Oz$ ).

Exemple 2.12 (Cône d'axe ( $Ox$ ))

- Une représentation paramétrique du cône d'axe ( $Ox$ ), de sommet  $A(1, 2, 3)$  de demi-angle au sommet  $\pi/6$  compris entre les plans d'équation  $x = 0$  et  $x = 5$  est donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = 1 + v\sqrt{3} \\ y(u, v) = 2 + v \cos(u), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5]. \\ z(u, v) = 3 + v \sin(u) \end{cases}$$

- D'où une représentation paramétrique du « solide » délimité par le cône précédent :

$$\begin{cases} x(r, u, v) = 1 + v\sqrt{3} \\ y(r, u, v) = 2 + rv \cos(u), \quad r \in [0, 1], u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5]. \\ z(r, u, v) = 3 + rv \sin(u) \end{cases}$$

## 2. Surfaces paramétrées

### d) Cône

#### Cônes dans la nature



Cône de chantier



Cône de verre, Cirque du Soleil (Montréal)



The big Cone (Los Angeles)



Joint de plomberie conique



Engrenage conique

## 2. Surfaces paramétrées

### d) Cône

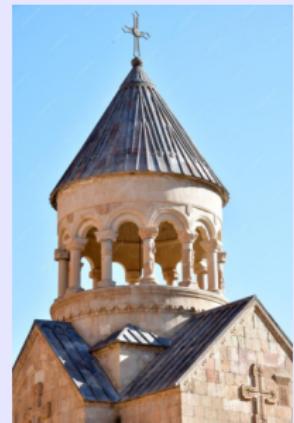
#### Cônes dans la nature



Château d'eau  
(Midrand, Afrique du Sud)



Cathédrale de Maringá (Brésil)



Monastère  
(Noravank, Arménie)



Trulli d'Alberobello (Italie)



Trulli d'Alberobello (Italie)

**Définition 2.13 (Sphère)**

Soit  $A$  un point de l'espace et  $R$  un réel positif.

La **sphère** de centre  $A$  et de rayon  $R$  est la surface des points situés à une distance  $R$  de  $A$ .

**Propriété 2.14 (Représentation paramétrique)**

La **sphère** de centre  $O$  et de rayon  $R$  peut être paramétrée par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

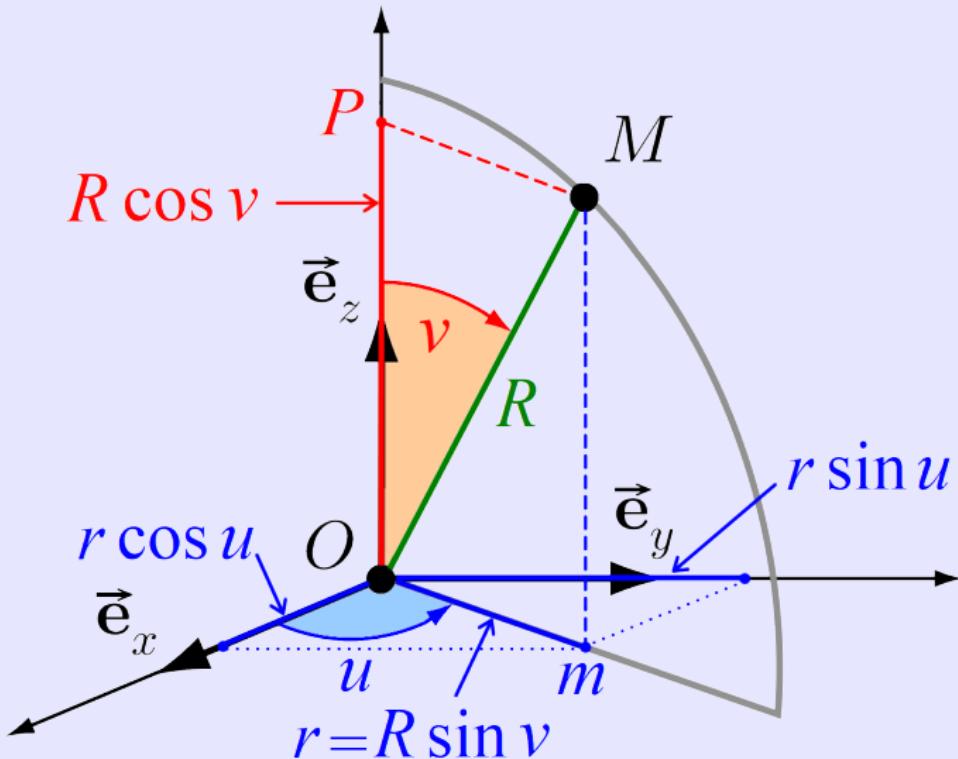
$$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi], \quad \vec{F}(u, v) = R \cos(u) \sin(v) \vec{e}_x + R \sin(u) \sin(v) \vec{e}_y + R \cos(v) \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\boxed{\begin{cases} x(u, v) = R \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) = R \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) = R \cos(v) \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]}$$

Elle admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

Sphère de centre  $O$  de rayon  $R$



## Remarque 2.15

- On verra ultérieurement le lien avec le système des **coordonnées sphériques** :

$$\begin{cases} u \longleftrightarrow \theta & (\text{longitude}) \\ v \longleftrightarrow \varphi & (\text{colatitude}) \\ R \longleftrightarrow \rho & (\text{rayon}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

N.B. : en cartographie, au lieu de la **colatitude**  $\varphi$ , on utilise la **latitude**  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ .

- De manière plus générale, la sphère centrée en un point  $A(x_A, y_A, z_A)$  de rayon  $R$  admet pour **représentation paramétrique**

$$\begin{cases} x(u, v) = x_A + R \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) = y_A + R \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) = z_A + R \cos(v) \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

et pour **représentation cartésienne**  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$ .

**Exemple 2.16 (Sphère, boule)**

- Une **représentation paramétrique** de la sphère de centre  $A(1, 2, 3)$  et de rayon 5 est donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = 1 + 5 \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) = 2 + 5 \sin(u) \sin(v) , \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi] \\ z(u, v) = 3 + 5 \cos(v) \end{cases}$$

et une **représentation cartésienne** par  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ .

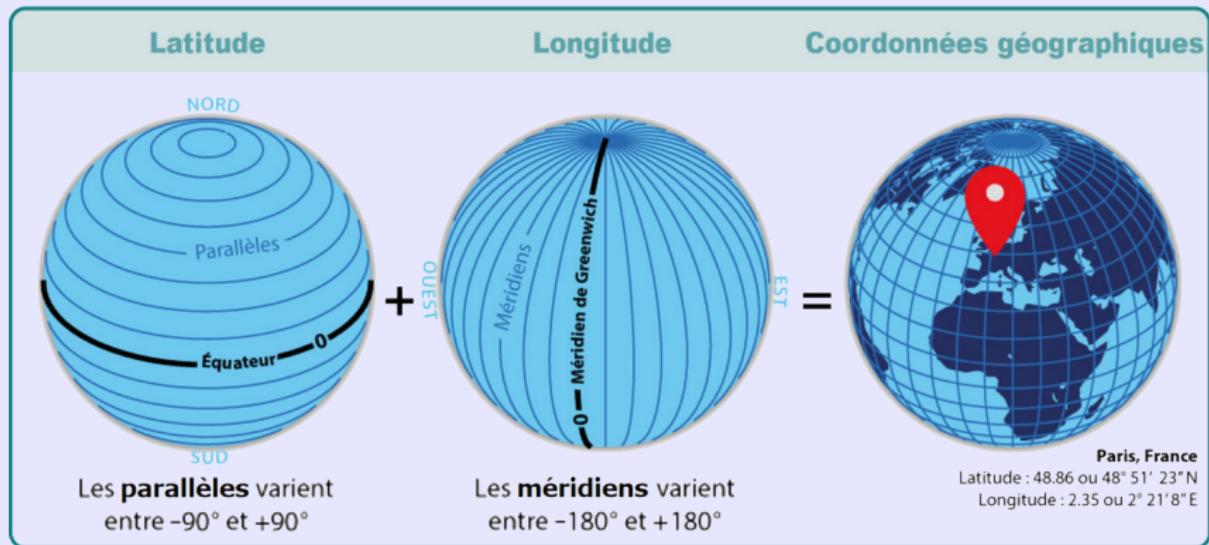
- Une **représentation paramétrique** du « **solide** » délimité par la sphère précédente (on parle de « **boule** ») est alors donnée par

$$\begin{cases} x(r, u, v) = 1 + r \cos(u) \sin(v) \\ y(r, u, v) = 2 + r \sin(u) \sin(v) , \quad r \in [0, 5], u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi] \\ z(r, u, v) = 3 + r \cos(v) \end{cases}$$

et une **représentation cartésienne** par  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \leq 25$ .

## Coupes : coordonnées géographiques

- \* Les « coupes » à  $v$  constant sont des **cercles** d'axes ( $Oz$ ) (« **parallèles** »).
- \* Les « coupes » à  $u$  constant sont des **demi-cercles** de centre  $O$  passant par les points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$  (« **pôles** » et « **méridiens** »).

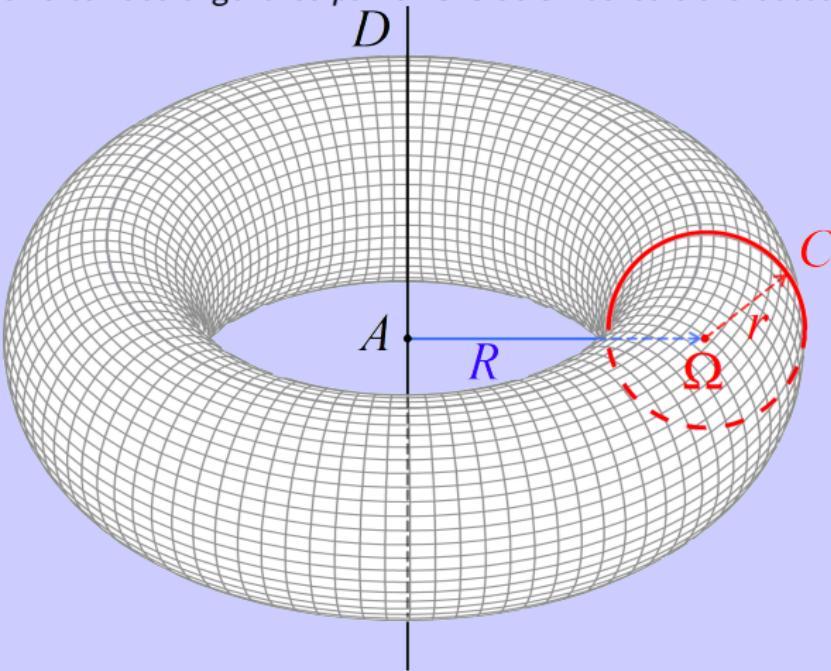


**Définition 2.17 (Tore)**

Soit  $A$  un point et  $D$  une droite de l'espace,  $r$  et  $R$  deux réels positifs.

Le **tore** de centre  $A$  d'axe  $D$  et de rayons  $r$  et  $R$  est la surface obtenue en réunissant tous les cercles  $C$  coplanaires avec  $D$  de rayon  $r$ , de centre  $\Omega$  situé à une distance  $R$  de  $A$  et tel que le segment  $A\Omega$  soit orthogonal à  $D$ .

Ce **tore** est ainsi la surface engendrée par la **révolution** du cercle  $C$  autour de l'axe  $D$ .



**Propriété 2.18 (Représentation paramétrique)**

Le **tore** de centre  $O$  d'axe ( $Oz$ ) et de rayons  $r$  et  $R$  peut être paramétrée par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ ,

$$\vec{F}(u, v) = (R + r \cos(v)) \cos(u) \vec{e}_x + (R + r \cos(v)) \sin(u) \vec{e}_y + r \sin(v) \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ :

$$\begin{cases} x(u, v) = (R + r \cos(v)) \cos(u) \\ y(u, v) = (R + r \cos(v)) \sin(u) \\ z(u, v) = r \sin(v) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$$

Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$ .

En effet, en se plaçant sur un cercle  $C$  générique de centre générique  $\Omega$  de rayon  $r$ ,

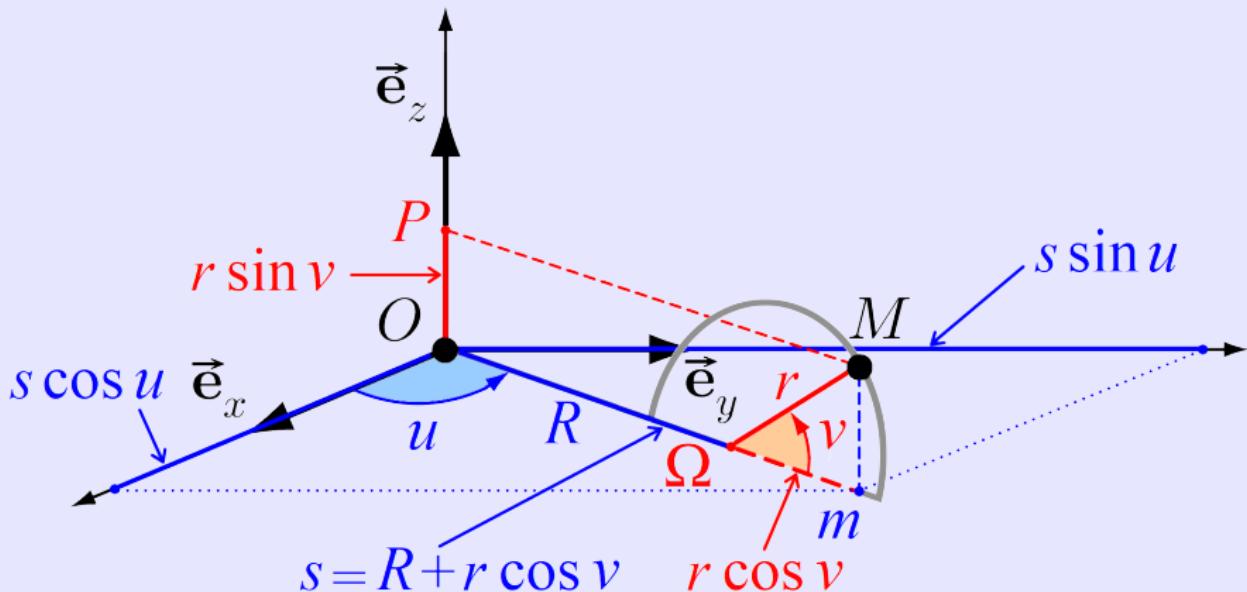
$$\overrightarrow{O\Omega} = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y, \quad u \in [0, 2\pi],$$

un point générique  $M$  du cercle  $C$  s'obtient en remarquant que ses projets orthogonaux sur le plan ( $Oxy$ ) et sur l'axe ( $Oz$ ) sont des points génériques respectivement  $m$  du cercle de centre  $O$  de rayon  $r \cos(v)$  dans le plan ( $Oxy$ ), et  $P$  de ( $Oz$ ), de la forme

$$\overrightarrow{\Omega m} = r \cos(v) (\cos(u) \vec{e}_x + \sin(u) \vec{e}_y) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = r \sin(v) \vec{e}_z, \quad v \in [0, 2\pi].$$

On obtient alors la représentation paramétrique du tore avec  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega m} + \overrightarrow{OP}$ .

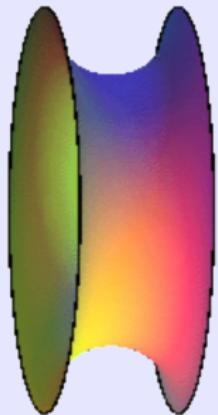
Tore de centre  $O$  d'axe ( $Oz$ ) de rayons  $r$  et  $R$



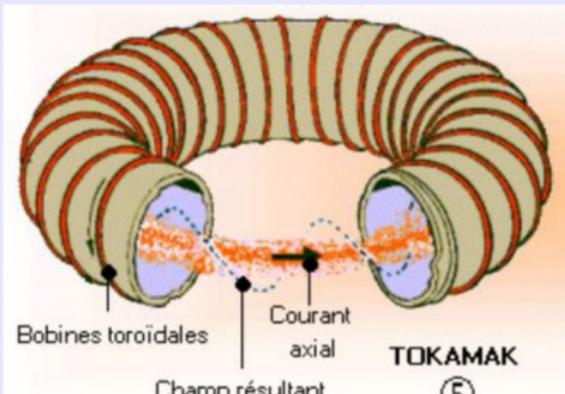
## 2. Surfaces paramétrées

### f) Tore

#### Tores dans la nature



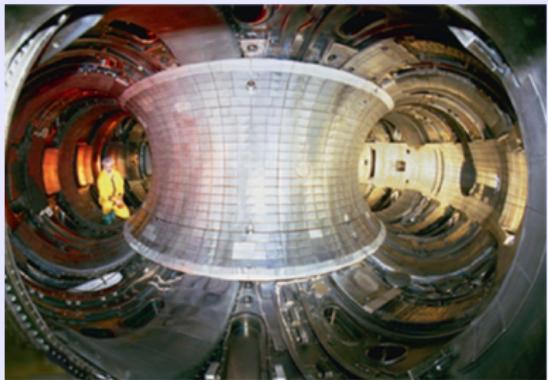
Poulie



Tokamak (dispositif de confinement magnétique)



Bobine magnétique



Tokamak (intérieur)



Joints de plomberie toriques

## 2. Surfaces paramétrées

### f) Tore

#### Tores dans la nature



Pied de colonne  
Érechthéion (Athènes)



Bouée de piscine



Église Saints-Pierre-et-Paul  
(Rosheim)



Donut



Beignets d'oignons frits

## Remarque 2.19 (Nombre de paramètres/Dimension)

- Un représentation paramétrique à **1 paramètre** correspond à une **courbe** :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in D \\ z = h(t) \end{cases} \quad (D \subset \mathbb{R})$$

→ **dimension 1**

- Un représentation paramétrique à **2 paramètres** correspond à une **surface** :

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), (u, v) \in D \\ z = h(u, v) \end{cases} \quad (D \subset \mathbb{R}^2)$$

→ **dimension 2**

- Un représentation paramétrique à **3 paramètres** correspond à une **solide** :

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w), (u, v, w) \in D \\ z = h(u, v, w) \end{cases} \quad (D \subset \mathbb{R}^3)$$

→ **dimension 3**

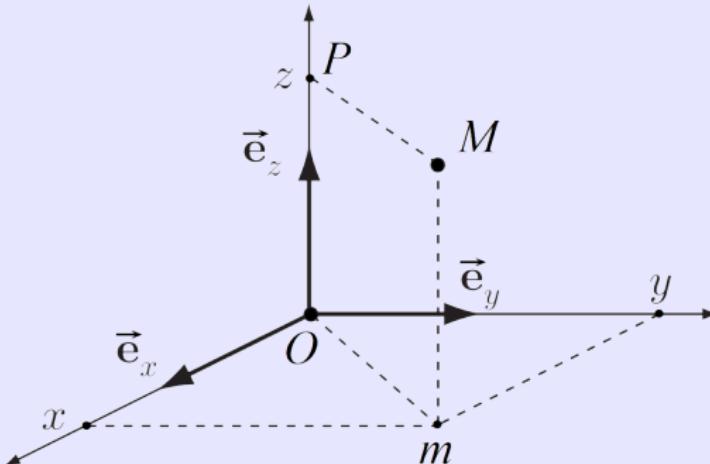
- 1 Courbes paramétrées
- 2 Surfaces paramétrées
- 3 Systèmes de coordonnées
  - Coordonnées cartésiennes
  - Coordonnées polaires
  - Coordonnées cylindriques
  - Coordonnées sphériques
  - Courbes et surfaces coordonnées
- 4 Repères locaux

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé fixe direct  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  ou  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

## Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace (ou le plan), tout point  $M$  peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$



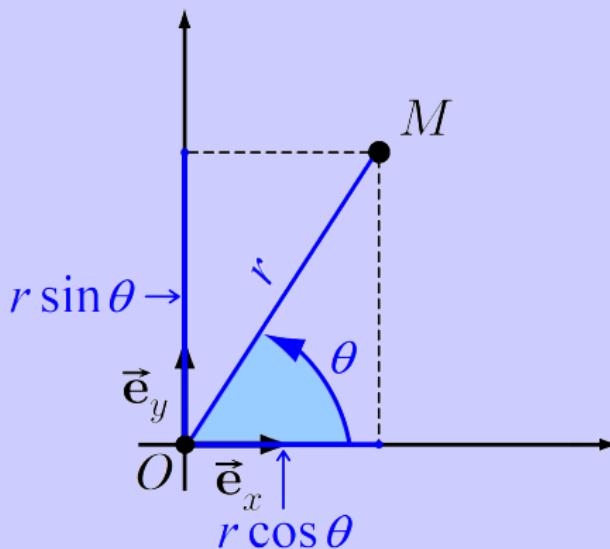
Les points  $m(x, y, 0)$  et  $P(0, 0, z)$  sont les projetés orthogonaux respectifs de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  et l'axe  $(Oz)$ .

**Définition 3.1 (Coordonnées polaires)**

Un point  $M$  du plan peut être repéré par sa distance  $r \geq 0$  par rapport à l'origine  $O$  et son angle (lorsque  $M \neq O$ )  $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Le couple  $(r, \theta)$  est constitué des  **coordonnées polaires** du point  $M$ .

Avec ces notations, on a la relation  $\boxed{\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y}$ .



L'origine  $O$  et l'axe  $(O; \vec{e}_x)$  sont respectivement appelés **pôle** et **axe polaire**.  
Le point  $O$  n'a pas de  **coordonnées polaires** uniques.

### Propriété 3.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

### Propriété 3.3 (Courbes coordonnées)

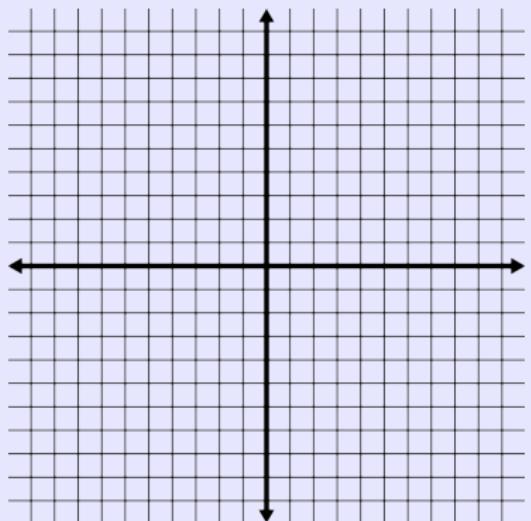
Les **courbes coordonnées en coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cercle** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne une **demi-droite** d'origine  $O$ .

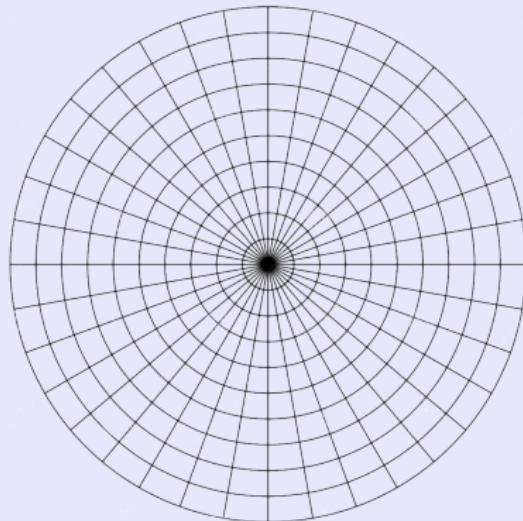
Plus précisément, pour  $r_0 > 0$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta)$  est le **cercle** de centre  $O$  et de rayon  $r_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0)$  est la **demi-droite** d'origine  $O$  d'angle polaire  $\theta_0$ .

## Courbes coordonnées et maillage



coordonnées **cartésiennes**



coordonnées **polaires**

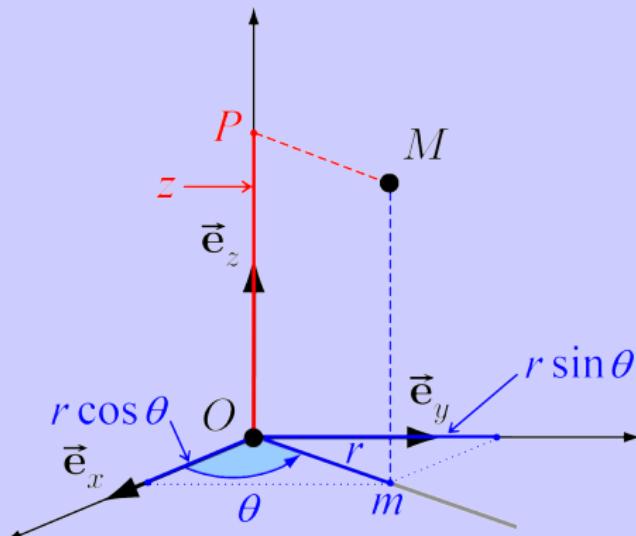
Les coordonnées cylindriques dans l'espace sont les « polaires + l'altitude ».

### Définition 3.4 (Coordonnées cylindriques)

On projette le point  $M$  de l'espace sur le plan ( $Oxy$ ) en  $\textcolor{blue}{m}$  et sur l'axe ( $Oz$ ) en  $\textcolor{red}{P}$  :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$ , et l'on repère le projeté  $m$  par ses  **coordonnées polaires** dans le plan :

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z \text{ avec } r \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$$

Le triplet  $(r, \theta, z)$  est constitué des  **coordonnées cylindriques** du point  $M$ .



**Remarque 3.5**

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de  **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si  $m$  et  $P$  sont les projetés de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  et la droite  $(Oz)$ , alors en  **coordonnées cylindriques** :  $M(r, \theta, z)$ ,  $m(r, \theta, 0)$  et  $P(0, ??, z)$ .

**Propriété 3.6 (Passage coordonnées cartésiennes/cylindriques)**

Pour passer des  **coordonnées cartésiennes** aux **cylindriques** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \\ z = z \end{cases}$$

**Définition 3.7 (Coordonnées sphériques)**

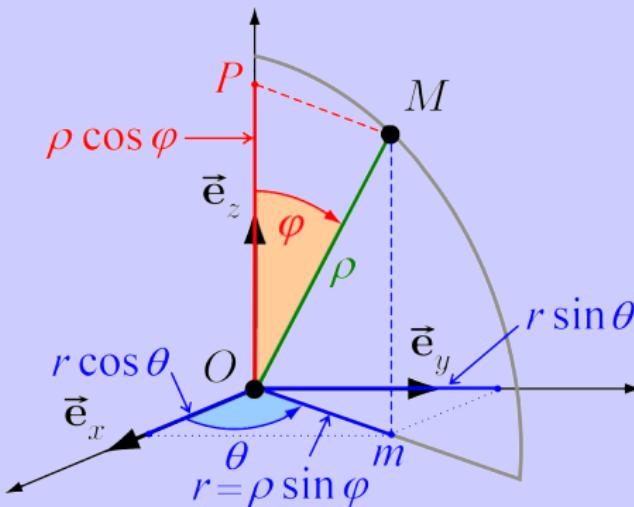
On repère un point  $M$  de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe } (Oz) \text{)} \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe } (Ox) \text{)} \end{cases}$$

Le triplet  $(\rho, \varphi, \theta)$  constitue les  **coordonnées sphériques du point  $M$ .**

En décomposant comme précédemment  $\overrightarrow{OM}$  selon  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$  :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z \text{ avec } \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi[$$



**Remarque 3.8**

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de  **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de  **coordonnées sphériques** et **cylindriques**. Le choix adopté ici est tel que  $\theta$  joue le même rôle dans les systèmes de  **coordonnées cylindriques** et  **coordonnées sphériques**.

*Mais ce n'est pas toujours le cas !*

*Bien faire attention aux conventions choisies...*

**Propriété 3.9 (Passage coordonnées cartésiennes/sphériques)**

Pour passer des  **coordonnées cartésiennes** aux **sphériques** et inversement :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos(\varphi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

### Définition 3.10 (Courbes et surfaces coordonnées)

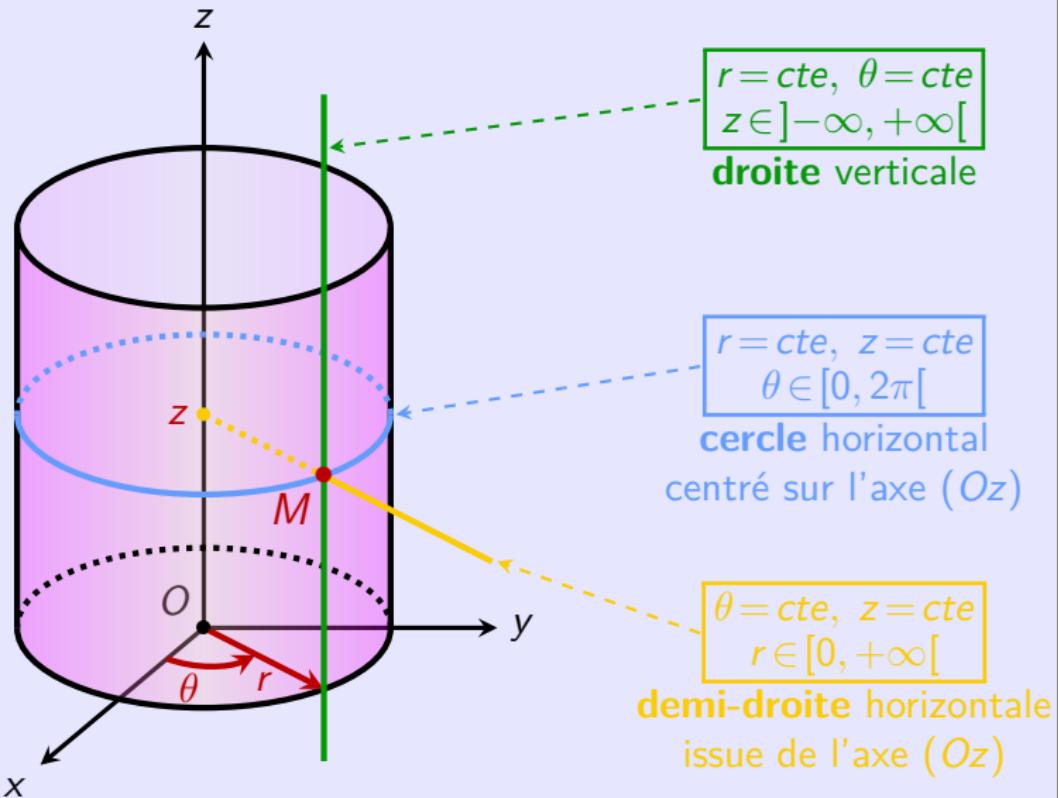
- Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point  $M$  décrit une **surface coordonnée**.
- Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point  $M$  décrit une **courbe coordonnée**.  
Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

### Courbes coordonnées en cartésiennes

Les **courbes coordonnées** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées : les équations ( $x = \text{cte}$ ,  $y = \text{cte}$ ) ou ( $x = \text{cte}$ ,  $z = \text{cte}$ ) ou ( $y = \text{cte}$ ,  $z = \text{cte}$ ) donnent les **axes** de cordonnées.

Les **surfaces coordonnées** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées : les équations  $x = \text{cte}$  ou  $y = \text{cte}$  ou  $z = \text{cte}$  donnent les **plans** de cordonnées.

## Courbes coordonnées en cylindriques



### Propriété 3.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)

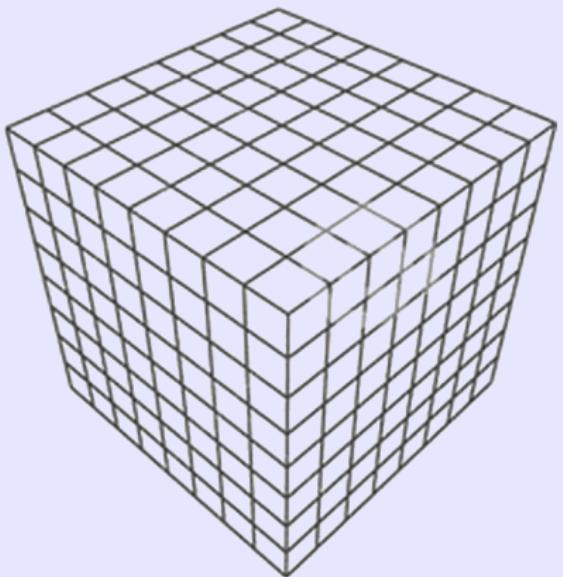
Les **courbes coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant deux des coordonnées :

- les équations  $r = \text{cte}, \theta = \text{cte}$  donnent une **droite** parallèle à l'axe ( $Oz$ ) ;
- les équations  $r = \text{cte}, z = \text{cte}$  donnent un  **cercle** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ;
- les équations  $\theta = \text{cte}, z = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'axe ( $Oz$ ) parallèle au plan ( $Oxy$ ).

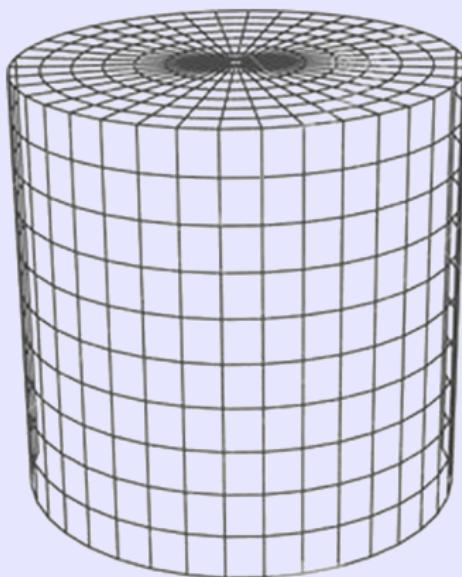
Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta_0, z)$  est la **droite** parallèle à l'axe ( $Oz$ ) passant par le point de coordonnées cylindriques  $(r_0, \theta_0, 0)$  ;
- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z_0)$  est le  **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, z_0)$  et de rayon  $r_0$  parallèle au plan ( $Oxy$ ) ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0, z_0)$  est la **demi-droite** issue du point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, z_0)$  parallèle au plan ( $Oxy$ ).

## Courbes coordonnées et maillage

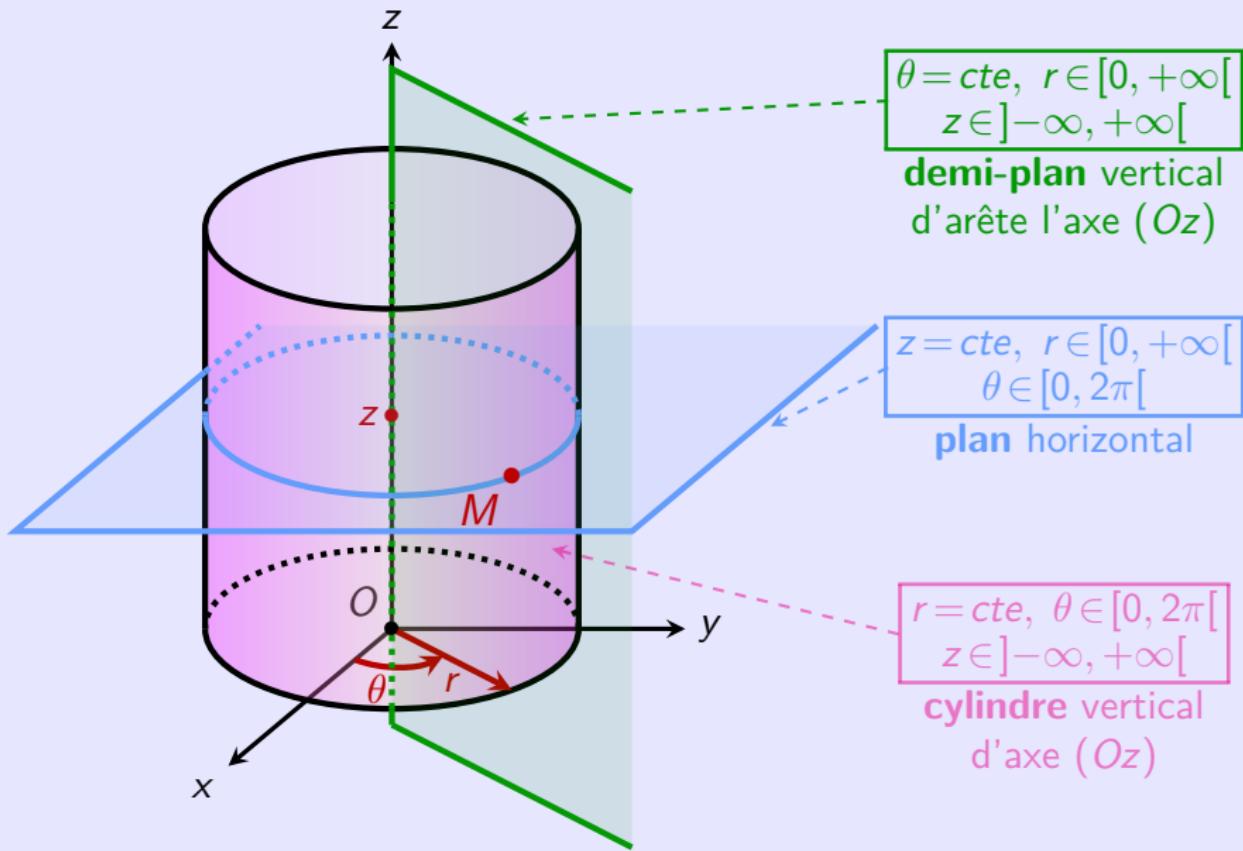


coordonnées **cartésiennes**



coordonnées **cylindriques**

## Surfaces coordonnées en cylindriques



### Propriété 3.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

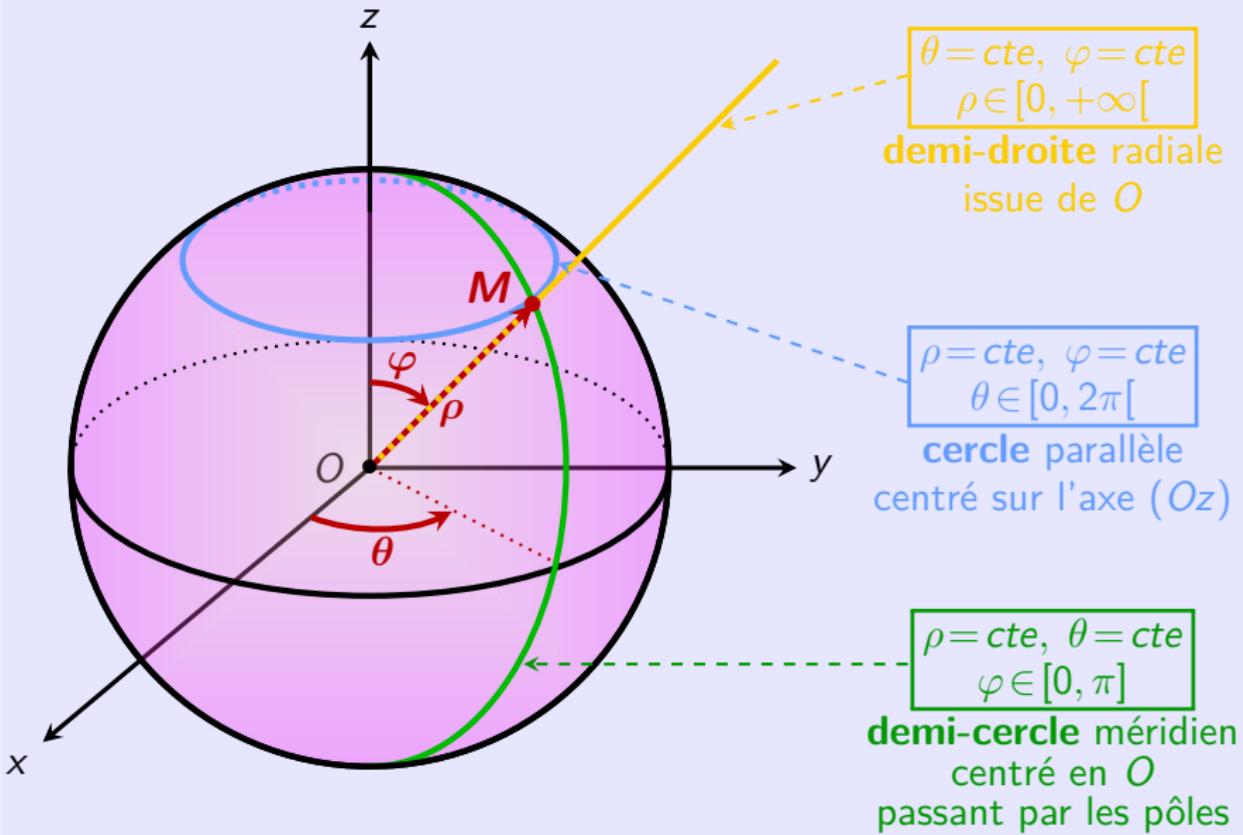
Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cylindre** d'axe ( $Oz$ ) ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** contenant l'axe ( $Oz$ ) ;
- l'équation  $z = \text{cte}$  donne un **plan** parallèle au plan ( $Oxy$ ).

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z)$  est le **cylindre** d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $r_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0, z)$  est le **demi-plan** d'arête ( $Oz$ ) d'angle polaire  $\theta_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta, z_0)$  est le **plan** d'équation  $z = z_0$ .

## Courbes coordonnées en sphériques



### Propriété 3.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

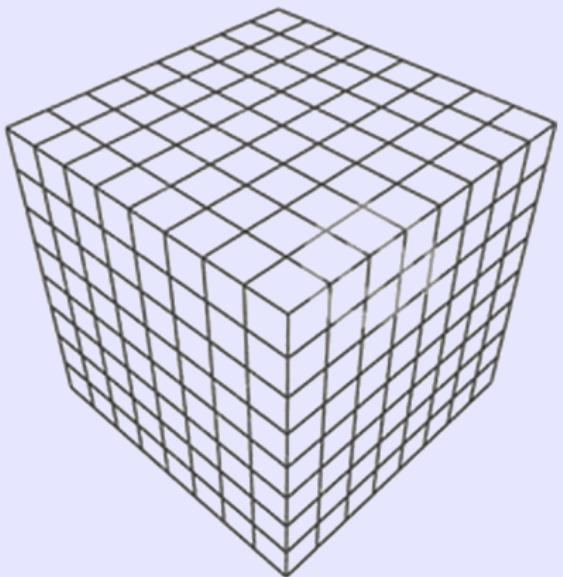
Les **courbes coordonnées en coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}, \varphi = \text{cte}$  donnent un  **cercle** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ( $\rightarrow \ll \text{parallèle} \gg$ );
- les équations  $\rho = \text{cte}, \theta = \text{cte}$  donnent un **demi-cercle** de centre  $O$  passant par les pôles (points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ )  $\rightarrow \ll \text{méridien} \gg$ ;
- les équations  $\theta = \text{cte}, \varphi = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'origine  $O$ .

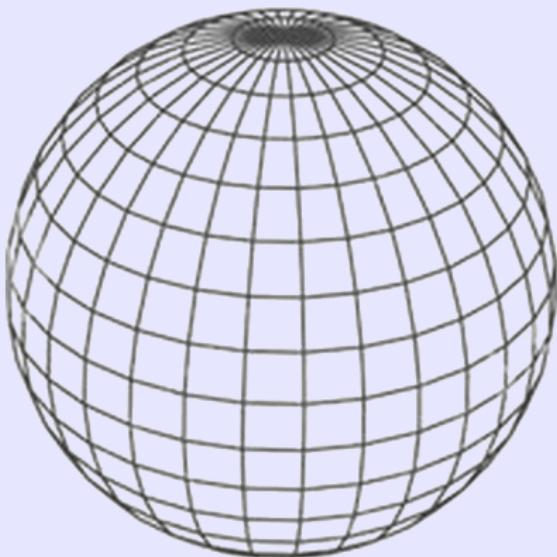
Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi_0, \theta)$  est le  **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, \rho_0 \cos \varphi_0)$  et de rayon  $\rho_0 \sin \varphi_0$  parallèle au plan ( $Oxy$ );
- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta_0)$  est le **demi-cercle** dont un diamètre est le segment constitué des deux pôles et passant par le point de coordonnées cylindriques  $(\rho_0, \theta_0, 0)$ ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi_0, \theta_0)$  est la **demi-droite** issue de  $O$  et passant par le point de coordonnées sphériques  $(1, \varphi_0, \theta_0)$ .

## Courbes coordonnées et maillage

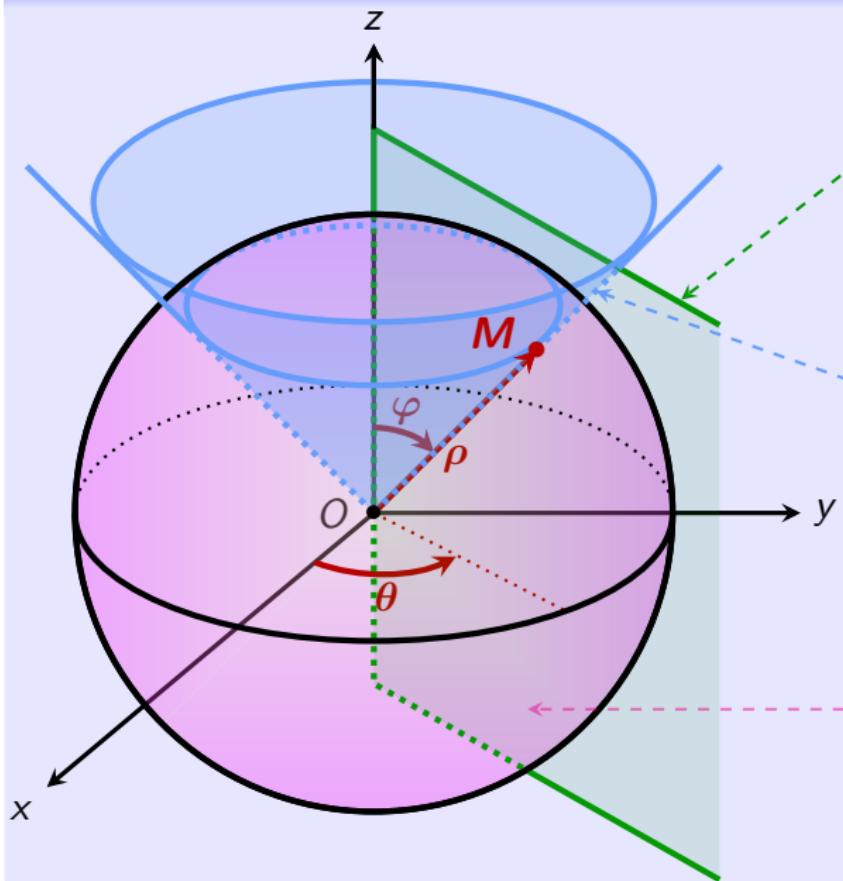


coordonnées **cartésiennes**



coordonnées **sphériques**

## Surfaces coordonnées en sphériques



$$\theta = \text{cte}, \varphi \in [0, \pi]$$

$$\rho \in [0, +\infty[$$

demi-plan vertical  
d'arête l'axe ( $Oz$ )

$$\varphi = \text{cte}, \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\rho \in [0, +\infty[$$

demi-cône  
de sommet  $O$   
d'axe ( $Oz$ )

$$\rho = \text{cte}, \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

sphère  
de centre  $O$   
de rayon  $\rho$

### Propriété 3.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées en coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\varphi = \text{cte}$  donne un **demi-cône** de centre  $O$  et d'axe ( $Oz$ ) .
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** d'arête ( $Oz$ ) ;

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta)$  est la **sphère** de centre  $O$  et de rayon  $\rho_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi_0, \theta)$  est le **demi-cône** de centre  $O$ , d'axe ( $Oz$ ) et de demi-angle au sommet  $\varphi_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi, \theta_0)$  est le **demi-plan** d'arête ( $Oz$ ) d'angle azimutal  $\theta_0$ .

## Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

### Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans**.
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit **demi-plans** soit des **plans**.
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans**.

### Courbes coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les courbes coordonnées sont des **droites**.
- En coordonnées **cylindriques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **droites**, soit des **cercles**.
- En coordonnées **sphériques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **demi-cercles**, soit des **cercles**.

### Remarque 3.15

Il est inutile de retenir tous ces résultats, il est préférable de savoir les retrouver à l'aide de graphiques.

## Repère local

Dans un système de coordonnées, le **repère local** est constitué du point  $M$  comme origine et des vecteurs **tangents normés** aux courbes coordonnées, **orientés** dans le sens croissant de la variable.

Nous allons décrire les différents **repères locaux** obtenus dans les systèmes de coordonnées **cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques** en les construisant du point de vue **différentiel**.

Nous allons aussi définir les **déplacements élémentaires** dans chaque **repère local**.

**Principe** : lorsque les coordonnées subissent de petites variations :

(**déplacement élémentaire** d'un point  $M$ )  $\approx$  ( $\overrightarrow{dOM}$  **différentielle** du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ ).

- ① Courbes paramétrées
- ② Surfaces paramétrées
- ③ Systèmes de coordonnées
- ④ Repères locaux
  - Cartésiens : déplacement élémentaire
  - Polaires : obtention des vecteurs
  - Polaires : dérivées des vecteurs
  - Polaires : déplacement élémentaire
  - Cylindriques : obtention des vecteurs
  - Cylindriques : dérivées des vecteurs
  - Cylindriques : déplacement élémentaire
  - Sphériques : obtention des vecteurs
  - Sphériques : dérivées des vecteurs
  - Sphériques : déplacement élémentaire

### Méthode théorique

**Formule différentielle :**  $d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} dz.$

Or  $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont fixes donc leurs dérivées en  $x, y, z$  sont nulles.

Donc  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x.$

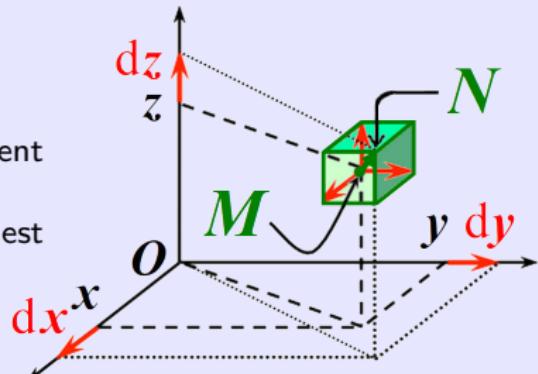
De même,  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y$  et  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z.$

Dans la base cartésienne :  $d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$

### Méthode intuitive :

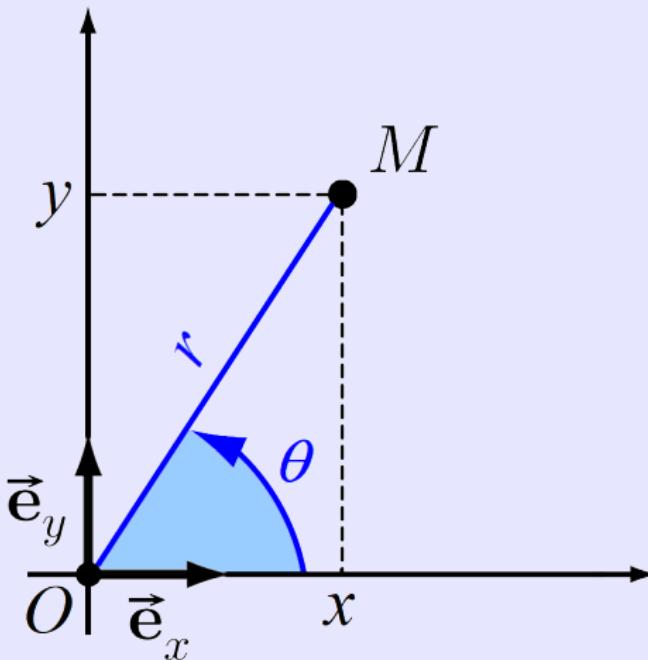
Le point  $N(x + dx, y + dy, z + dz)$  est infiniment proche de  $M(x, y, z).$

Le vecteur variation de position élémentaire est  $\overrightarrow{MN} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$  assimilé à  $d\overrightarrow{OM}.$



On cherche le **repère local**  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  où  $M$  est le point du plan défini par

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur unitaire tangent**

à la courbe coordonnée  $\theta = \text{cste}$  :  $\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right\|}$

avec  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$

qui est de norme 1 donc :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur unitaire tangent** à la

courbe coordonnée  $r = \text{cste}$  :  $\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|}$

avec  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \vec{e}_x + r \cos(\theta) \vec{e}_y$

qui est de norme  $r$  donc :

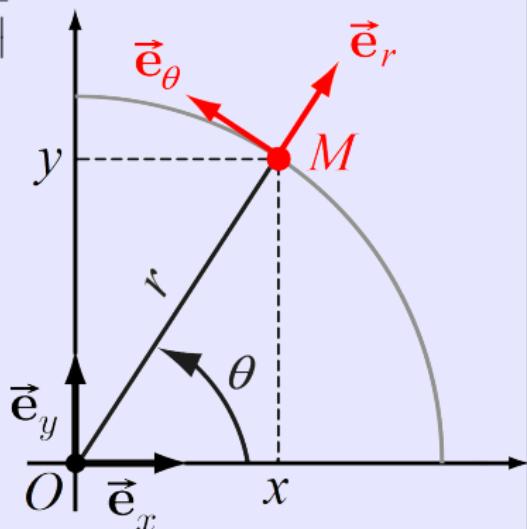
$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$

On remarque que

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

et

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  sont **orthogonaux**



- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y) = -\cos(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} - \sin(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = -\vec{e}_r$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\implies$  Une dérivation par rapport à  $\theta$  correspond à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  du vecteur.

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

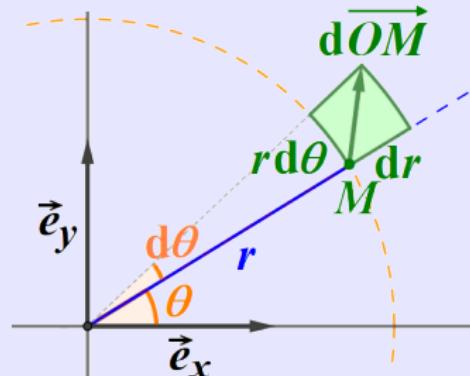
$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

donc :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$



- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$  on trouve (différentielle produit) :

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) = dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} dr}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta}_{\vec{e}_\theta} \right) = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

**Remarque :** le « rectangle curviligne élémentaire » a pour aire  $r dr d\theta$ .

Cet « élément de surface élémentaire » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées polaires dans les intégrales doubles (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.

Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

### Propriété 4.1 (Repère local polaire)

*En coordonnées polaires, le repère local (orthonormé direct) est  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \end{cases}$$

*Le vecteur-déplacement est donné, dans les bases cartésienne et polaire, par*

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y = r \vec{e}_r$$

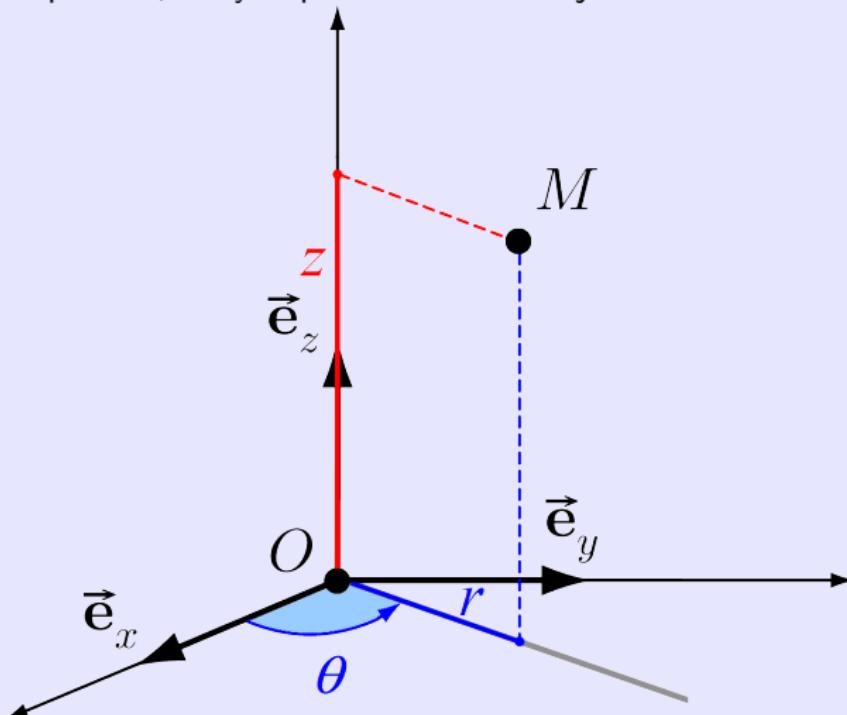
*et le déplacement élémentaire est donné, dans la base polaire, par :*

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

On cherche le **repère local**  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  où  $M$  est le point de l'espace défini par

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Par rapport aux polaires, il n'y a que l'altitude  $z$  à rajouter.



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}, z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $r = \text{cste}, z = \text{cste}$ ) :

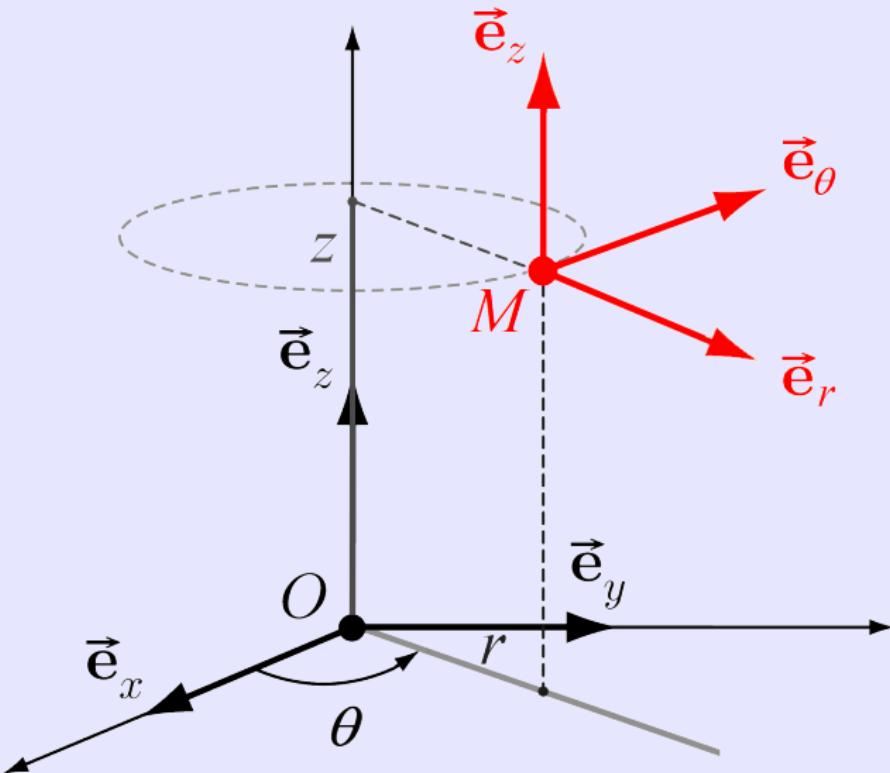
$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}, r = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z \text{ qui est de norme 1, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_z = \vec{e}_z}$$



On remarque que

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

et

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  sont **orthogonaux** et  $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  (mais ni de  $r$ , ni de  $z$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} &= \vec{0}\end{aligned}$$

- $\vec{e}_z$  est constant

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}$$

- On remarque que

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$$

$\implies$  Une dérivation par rapport à  $\theta$  correspond à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  du vecteur.

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} dz$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

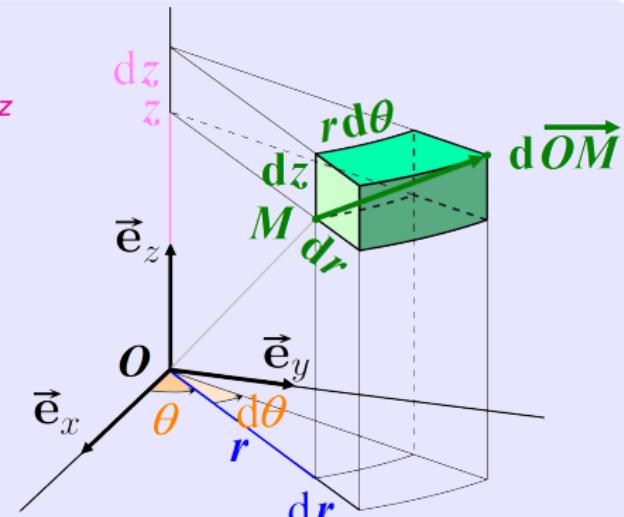
- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ , on trouve

$$d\overrightarrow{OM} = (dr) \vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) + (dz) \vec{e}_z + z(d\vec{e}_z)$$

$$= dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} dr}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta}_{\vec{e}_\theta} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} dz}_{\vec{0}} \right) + dz \vec{e}_z + z \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} dr}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} d\theta}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} dz}_{\vec{0}} \right)$$

$$= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$



**Remarque :** le « parallélépipède curviligne élémentaire » a pour volume  $r dr d\theta dz$ .

Cet « élément de volume élémentaire » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées cylindriques dans les intégrales triples (cf. chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.

Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

### Propriété 4.2 (Repère local cylindrique)

*En coordonnées cylindriques, le repère local (orthonormé direct) est  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

*Le vecteur-déplacement est donné, dans les bases cartésienne et cylindrique, par*

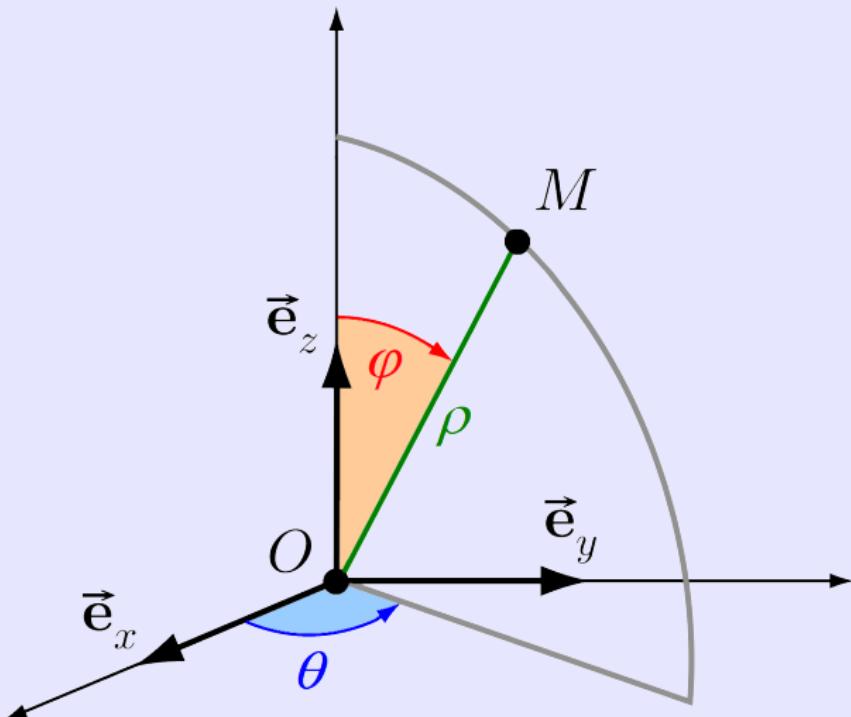
$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

*et le déplacement élémentaire est donné, dans la base cylindrique, par :*

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

On cherche le **repère local**  $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$  où  $M$  est le point de l'espace défini par

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \right\|} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \rho \sin(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme  $\rho$ , donc :

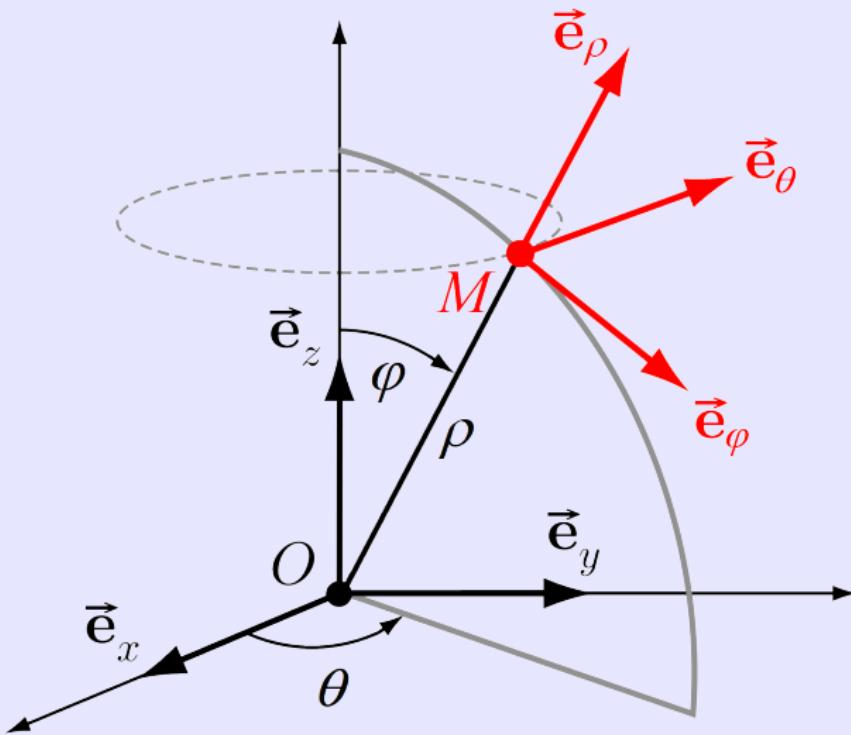
$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\varphi = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y$$

qui est de norme  $\rho \sin(\varphi)$ , donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$



On remarque que

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta \text{ sont orthogonaux et } \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z)$   
 $= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour  $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$ , et l'on a  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y$ .  
 On remarque que  
 $\sin(\varphi) \vec{e}_\rho + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi = \sin(\varphi) (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z)$   
 $+ \cos(\varphi) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z)$   
 $= \cos(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_x + \sin(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_y$   
 $+ (\cos(\varphi) \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \vec{e}_z$   
 $= \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$

soit  $\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} = \sin(\varphi) \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \cos(\varphi) \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin(\varphi) \vec{e}_\rho - \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi}$

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

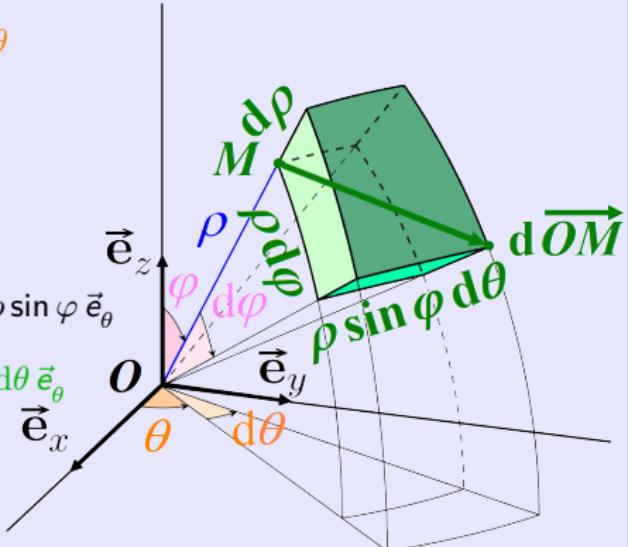
$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} &= \vec{e}_\rho & \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} &= \rho \vec{e}_\varphi & \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} &= \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow d\overrightarrow{OM} &= d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ , on trouve

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{OM} &= (d\rho) \vec{e}_\rho + \rho(d\vec{e}_\rho) = d\rho \vec{e}_\rho + \rho \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} d\rho}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} d\varphi}_{\vec{e}_\varphi} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} d\theta}_{\sin \varphi \vec{e}_\theta} \right) \\ &= d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

**Remarque :** le « parallélépipède curviligne élémentaire » a pour volume  $\rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$ . Cet « élément de volume élémentaire » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées sphériques dans les intégrales triples (cf. chapitre Intégrales multiples).



En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.

Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

### Propriété 4.3 (Repère local sphérique)

*En coordonnées sphériques, le repère local (orthonormé direct) est  $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$  où*

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \end{cases}$$

*Le vecteur-déplacement est donné, dans les bases cartésienne et sphérique, par*

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z = \rho \vec{e}_\rho$$

*et le déplacement élémentaire est donné, dans la base sphérique, par :*

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta$$

## Remarque 4.4 (Base fixe/base locale)



Ne pas confondre :

«  $\overrightarrow{OM}$  dans un système de coordonnées donné dans la **base cartésienne fixe** »

et

«  $\overrightarrow{OM}$  dans un système de coordonnées donné dans la **base locale** associée à ce système »

**Exemples :**

- $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées **cylindriques** dans la **base cartésienne fixe** :

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

- $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées **cylindriques** dans la **base locale** associée :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

- $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées **sphériques** dans la **base cartésienne fixe** :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

- $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées **sphériques** dans la **base locale** associée :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

## Notions à retenir

- Courbes paramétrées
  - ★ Paramétrages des droites, segments et cercles
  - ★ Détermination de la tangente à une courbe en un point et tracé de son allure locale
- Surfaces paramétrées
  - ★ Paramétrages des plans, cylindres, cônes, sphères et tores
  - ★ Détermination du plan tangent à une surface en un point
- Systèmes de coordonnées classiques : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
  - ★ Passage d'un système à un autre
  - ★ Détermination des repères locaux associés
  - ★ Description des lignes et surfaces coordonnées
  - ★ Calcul des dérivées partielles des vecteurs des repères locaux
  - ★ Calcul des déplacements élémentaires correspondants

## Annexes

- Courbes paramétrées :  
cinématique
- Courbes paramétrées planes
- Surfaces planes : plan tangent

5 Annexe A – Courbes paramétrées : cinématique

- Cinématique
- Allure locale

6 Annexe B – Courbes paramétrées planes

7 Annexe C – Surfaces paramétrées

### Définition A.1 (Vecteur-dérivée ou tangent)

La courbe paramétrée  $\vec{F}$  est **dérivable** si et seulement si les fonctions  $f, g, h$  sont dérivables. Sa dérivée est donnée par :

$$\vec{F}'(t) = f'(t) \vec{e}_x + g'(t) \vec{e}_y + h'(t) \vec{e}_z.$$

On dit alors que  $\vec{F}'(t)$  est le **vecteur tangent** à la courbe paramétrée au point  $M(t)$ .

### Interprétation cinématique

Généralité	Cinématique
$t$	temps
support de la courbe paramétrée	trajectoire
$\vec{F}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$	vecteur position
$\vec{F}'(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$	vecteur vitesse
$\vec{F}''(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$	vecteur accélération

## Exemple A.2 (Chute dans le vide)

On se place dans un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Un corps ponctuel de masse  $m$  situé à une position initiale (à l'instant 0)  $M_0(x_0, 0, z_0)$  et animé d'une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$  se déplace dans le plan vertical ( $Oxz$ ) sous l'action d'une force de gravité constante  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  ( $g > 0$ ).

- Modélisation : soit  $M(t)(x(t), y(t), z(t))$  la position du corps à l'instant  $t$ .

On a les conditions initiales  $M(0)(x_0, 0, z_0)$  et  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$ .

Le vecteur **accélération** est donné par  $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = -g \vec{e}_z$ .

- En intégrant une première fois, on trouve le vecteur **vitesse** :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = -gt \vec{e}_z + \vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + (-gt + v_z) \vec{e}_z$$

- En intégrant une deuxième fois, on trouve le vecteur **position** :

$$\overrightarrow{OM}(t) = v_x t \vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2} g t^2 + v_z t\right) \vec{e}_z + \overrightarrow{OM}_0 = (v_x t + x_0) \vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2} g t^2 + v_z t + z_0\right) \vec{e}_z$$

Ainsi, dans  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$M(t)\left(v_x t + x_0, 0, -\frac{1}{2} g t^2 + v_z t + z_0\right)$$

**Exemple A.2 (Chute dans le vide)**

On se place dans un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Un corps ponctuel de masse  $m$  situé à une position initiale (à l'instant 0)  $M_0(x_0, 0, z_0)$  et animé d'une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$  se déplace dans le plan vertical ( $Oxz$ ) sous l'action d'une force de gravité constante  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  ( $g > 0$ ).

- La trajectoire du corps admet une représentation **paramétrique** donnée par

$$\begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0 \end{cases}, t \geq 0$$

En « éliminant » le paramètre  $t$  dans les équations précédentes, on tire  $t = (x - x_0)/v_x$  puis une équation **cartésienne** de la trajectoire

$$z = -\frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_z}{v_x}(x - x_0) + z_0, x \geq x_0$$

Il s'agit d'une **parabole** dans le plan ( $Oxz$ ).

### Exemple A.3 (Mouvement circulaire uniforme)

Considérons le cercle trigonométrique parcouru à une vitesse angulaire  $\omega > 0$  constante (**mouvement circulaire uniforme**) :

$$\vec{F}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y$$

- ① Le vecteur-dérivée est donné par

$$\vec{F}'(t_0) = -\omega \sin(\omega t_0)\vec{e}_x + \omega \cos(\omega t_0)\vec{e}_y$$

Puisque  $\|\vec{F}'(t_0)\| = \omega \neq 0$ , on a  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ , donc ce vecteur dirige la tangente au cercle en  $t_0$ .

C'est le **vecteur-vitesse**.

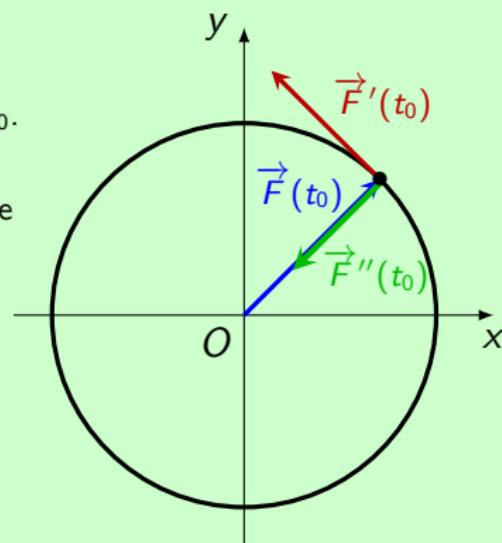
On remarque que  $\vec{F}(t_0) \cdot \vec{F}'(t_0) = 0$ , c'est-à-dire que les vecteurs  $\vec{F}(t_0)$  et  $\vec{F}'(t_0)$  sont **orthogonaux**.

- ② Le vecteur-dérivée seconde est donné par

$$\vec{F}''(t_0) = -\omega^2 \cos(\omega t_0)\vec{e}_x - \omega^2 \sin(\omega t_0)\vec{e}_y$$

On remarque que  $\vec{F}''(t_0) = -\omega^2 \vec{F}(t_0)$ .

Le **vecteur-accélération** est dirigé vers  $O$  selon l'opposé du rayon-vecteur, il s'agit d'un mouvement à **accélération centrale**.



**Définition A.4 (Point régulier/singulier)**

- Lorsque  $\vec{F}'(t) \neq \vec{0}$  on dit que  $M(t)$  est un point **régulier**.
- Lorsque  $\vec{F}'(t) = \vec{0}$ , on dit que  $M(t)$  est un point **stationnaire** (ou **singulier**).

**Propriété A.5 (Point régulier/singulier et tangente)**

Soit  $M_0$  le point de paramètre  $t_0$ .

- si  $M_0$  est **régulier**, alors la courbe admet en  $M_0$  une **tangente** de vecteur directeur  $\vec{F}'(t_0) = x'(t_0)\vec{e}_x + y'(t_0)\vec{e}_y + z'(t_0)\vec{e}_z$ .

Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0), \quad t \in \mathbb{R} \\ Z = z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0) \end{cases}$$

Si de plus  $\vec{F}''(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\vec{F}'(t_0)$ , alors la position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le sens de  $\vec{F}''(t_0)$  (il pointe du côté de la courbe indiquant la **concavité/convexité locale**).

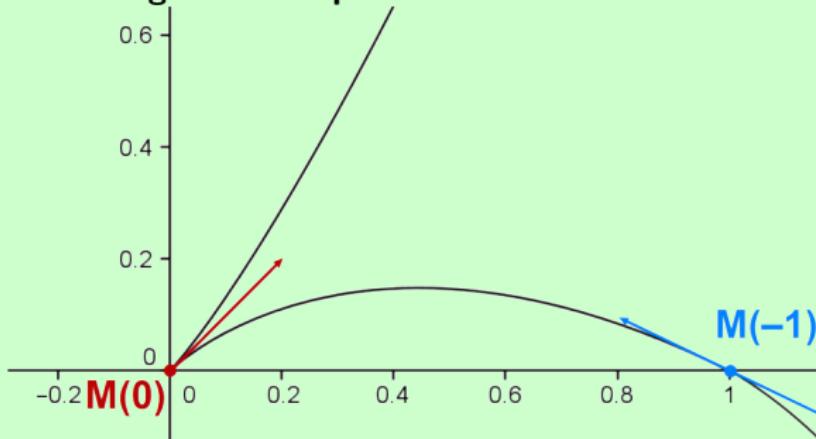
- si  $M_0$  est **stationnaire**,  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ , le premier vecteur-dérivé **non nul**  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$  dirigera la **tangente** à la courbe en  $M_0$ .

## Exemple A.6 (Une courbe plane)

Étude de l'allure de la **courbe paramétrée**  $t \mapsto \vec{F}(t) = t^2 \vec{e}_x + (t^2 + t^3) \vec{e}_y$  au voisinage des points de paramètres **-1** et **0**.

On calcule  $\vec{F}'(t) = 2t \vec{e}_x + (2t + 3t^2) \vec{e}_y$  et  $\vec{F}''(t) = 2\vec{e}_x + (2 + 6t) \vec{e}_y$ .

- $t = -1$  : le point **(1, 0)** est **régulier** et  $\vec{F}'(-1) = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y$  est **vecteur tangent** à la courbe, qui reste du même côté que le vecteur  $\vec{F}''(1) = 2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$ .
- $t = 0$  : le point **(0, 0)** est **stationnaire** car  $\vec{F}'(0) = \vec{0}$ . Un **vecteur tangent** est dans ce cas  $\vec{F}''(0) = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$  (et la position est donnée par  $\vec{F}'''(0) = 6\vec{e}_y$  ; on a une **demi-tangente** et un **point de rebroussement de 1<sup>re</sup> espèce**).



### Exemple A.7 (Hélice circulaire)

L'hélice circulaire d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$  et de pas  $h$  admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Notons  $\vec{F}$  la fonction vectorielle correspondante :

$$\vec{F}(t) = R \cos(t) \vec{e}_x + R \sin(t) \vec{e}_y + \frac{h}{2\pi} t_0 \vec{e}_z$$

Le vecteur tangent au point  $M_0$  de paramètre  $t_0$  vaut

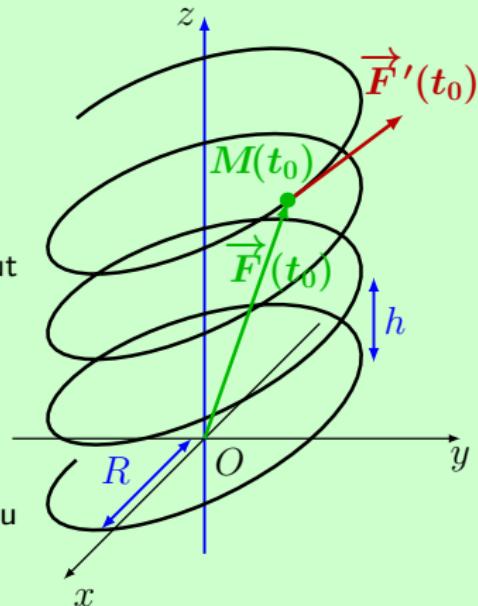
$$\vec{F}'(t_0) = -R \sin(t_0) \vec{e}_x + R \cos(t_0) \vec{e}_y + \frac{h}{2\pi} \vec{e}_z$$

Sa norme vaut  $\|\vec{F}'(t_0)\| = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} > 0$ .

Ainsi tous les points de l'hélice sont réguliers.

Une représentation paramétrique de la tangente au point  $M_0$  est donnée par :

$$\begin{cases} x = -R \sin(t_0)(t - t_0) + R \cos(t_0) \\ y = R \cos(t_0)(t - t_0) + R \sin(t_0) \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



5 Annexe A – Courbes paramétrées : cinématique

6 Annexe B – Courbes paramétrées planes

- Allure locale
- Construction
- Un exemple détaillé

7 Annexe C – Surfaces paramétrées

## Propriété B.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))

- ① Si  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$  (cas d'un **point régulier**), la courbe admet une **tangente** en  $M_0$  portée par  $\vec{F}'(t_0)$ . De plus :
- si  $\vec{F}''(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $\vec{F}'(t_0)$ ,  $\vec{F}''(t_0)$  indique la concavité locale.  
→ On dit que  $M_0$  est un **point ordinaire**;
  - si  $\vec{F}''(t_0)$  est colinéaire à  $\vec{F}'(t_0)$  et si  $\vec{F}'''(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $\vec{F}'(t_0)$ , alors la courbe traverse sa tangente au point  $M(t_0)$  en changeant de concavité localement.  
→ On dit que  $M_0$  est un **point d'inflexion**.
- ② Si  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$  (cas d'un **point singulier**) et si  $\vec{F}''(t_0) \neq \vec{0}$ , la courbe admet une **demi-tangente** en  $M_0$  portée par  $\vec{F}''(t_0)$ . De plus :
- si  $\vec{F}'''(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $\vec{F}''(t_0)$ , alors la courbe traverse sa demi-tangente au point  $M(t_0)$ .  
→ On dit que  $M_0$  est un **point de rebroussement de 1<sup>e</sup> espèce**;
  - si  $\vec{F}'''(t_0)$  est colinéaire à  $\vec{F}''(t_0)$  et si  $\vec{F}^{(4)}(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $\vec{F}'''(t_0)$ , alors la courbe reste d'un seul côté de sa demi-tangente au point  $M(t_0)$ .  
→ On dit que  $M_0$  est un **point de rebroussement de 2<sup>e</sup> espèce**.

**Propriété B.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))**

- ③ Plus généralement, lorsque  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$  (cas d'un **point singulier**) :  
 on recherche le premier entier  $p \geq 2$  tel que  $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$ ,  
 puis le premier entier  $q > p$  tel que  $\vec{F}^{(q)}(t_0)$  ne soit pas colinéaire à  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ .

- **Cas où  $p$  est impair**

La courbe admet une **tangente** en  $M_0$  portée par  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ .

De plus :

- ★ si  $q$  est **pair**, alors  $\vec{F}^{(q)}(t_0)$  indique la concavité locale.  
 ↪ On dit que  $M_0$  est un **point ordinaire** ;
- ★ si  $q$  est **impair**, alors la courbe traverse sa tangente au point  $M_0$  en changeant de concavité localement.  
 ↪ On dit que  $M_0$  est un **point d'inflexion**.

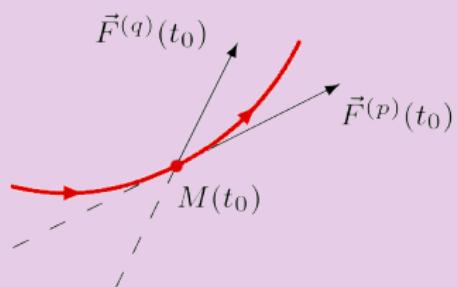
- **Cas où  $p$  est pair**

La courbe admet une **demi-tangente** en  $M_0$  dirigée par  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ .

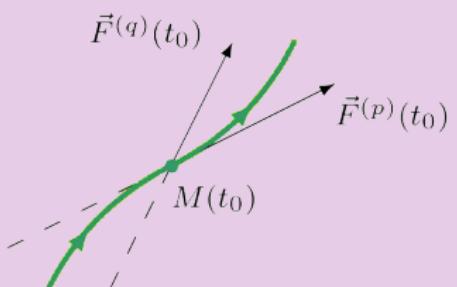
De plus :

- ★ si  $q$  **impair**, alors la courbe traverse sa demi-tangente au point  $M_0$ .  
 ↪ On dit que  $M_0$  est un **point de rebroussement de 1<sup>re</sup> espèce** ;
- ★ si  $q$  est **pair**, alors la courbe reste d'un seul côté de sa demi-tangente au point  $M(t_0)$ .  
 ↪ On dit que  $M_0$  est un **point de rebroussement de 2<sup>e</sup> espèce**.

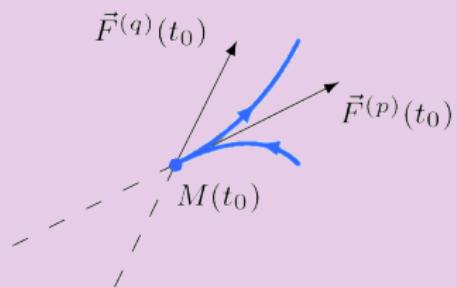
## Propriété B.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))



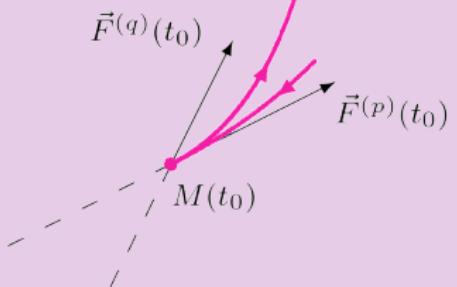
$p$  impair,  $q$  pair  
↪ point ordinaire



$p$  impair,  $q$  impair  
↪ point d'inflexion



$p$  pair,  $q$  impair  
↪ point de rebroussement  
de 1<sup>re</sup> espèce



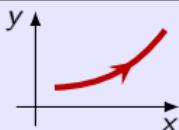
$p$  pair,  $q$  pair  
↪ point de rebroussement  
de 2<sup>e</sup> espèce

## Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée plane définie par la fonction vectorielle  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{F}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ , on suit le protocole suivant :

- ① on réduit au maximum l'intervalle d'étude  $I$  en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;
- ② on étudie les **variations simultanées** des fonctions  $x$  et  $y$  sur l'intervalle réduit ;

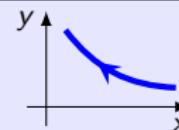
$t$	$t_0$	$t_1$
$x'(t)$	+	
$y'(t)$	+	
$x(t)$	↗	
$y(t)$	↗	



$t$	$t_0$	$t_1$
$x'(t)$		+
$y'(t)$		-
$x(t)$		↗ ↘
$y(t)$		↘ ↗



$t$	$t_0$	$t_1$
$x'(t)$		-
$y'(t)$		+
$x(t)$		↘ ↙
$y(t)$		↗ ↘



$t$	$t_0$	$t_1$
$x'(t)$		-
$y'(t)$		-
$x(t)$		↖ ↗
$y(t)$		↘ ↙



- ③ on commence à tracer le support en identifiant :

- des points particuliers (d'éventuels **points singuliers** non étudiés ici) ;
- les **tangentes** en ces points. En particulier lorsque  $y'(t) = 0$  et  $x'(t) \neq 0$  (resp.  $x'(t) = 0$  et  $y'(t) \neq 0$ ), la tangente correspondante est **horizontale** (resp. **verticale**) ;
- d'éventuelles **branches infinies** (non étudiées ici) ;

- ④ on termine le tracé en appliquant les **symétries** identifiées au début.

## Exemple B.2 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée  $\vec{F} = \overrightarrow{OM}$  :  $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

## Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall t \in [0, 2\pi], M(2\pi - t) = s_O(M(t))$

où  $s_O$  est la symétrie du plan par rapport à l'origine  $O$

$\implies$  l'arc de courbe relatif à  $[\pi, 2\pi]$  se déduit donc de celui relatif à  $[0, \pi]$  par la symétrie par rapport à  $O$

$\implies$  première réduction : étude sur  $[0, \pi]$

- $\forall t \in [0, \pi], M(\pi - t) = s_{Ox}(M(t))$

où  $s_{Ox}$  est la symétrie du plan par rapport à l'axe  $Ox$

$\implies$  l'arc de courbe relatif à  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

se déduit donc de celui relatif à  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par la symétrie par rapport à  $Ox$

$\implies$  deuxième réduction : étude sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

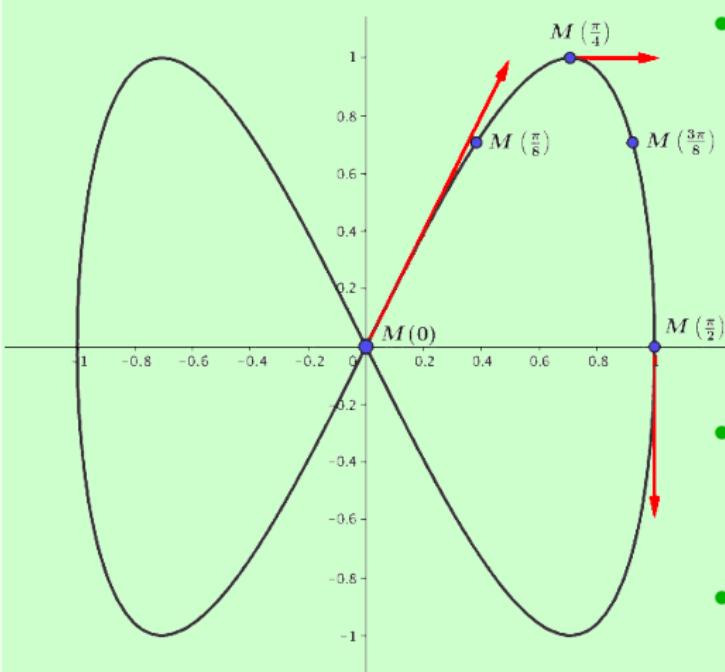
## Variations simultanées

$$\vec{F}'(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$$

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	+	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$y'(t)$	2	+	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	1

## Exemple B.2 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée  $\vec{F} = \overrightarrow{OM}$  :  $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$



- **Tracé sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$** 
  - Tangente au point  $M(0)$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
  - Tangente au point  $M(\frac{\pi}{4})$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
  - Tangente au point  $M(\frac{\pi}{2})$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$

- **Tracé sur  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$**   
On effectue la symétrie par rapport à l'axe  $Ox$

- **Tracé sur  $[\pi, 2\pi]$**   
On effectue la symétrie par rapport à l'origine  $O$

- 5 Annexe A – Courbes paramétrées : cinématique
- 6 Annexe B – Courbes paramétrées planes
- 7 Annexe C – Surfaces paramétrées
  - Plan tangent

## Plan tangent

Les vecteurs tangents aux courbes coordonnées, s'il existent, sont tangents à la surface.

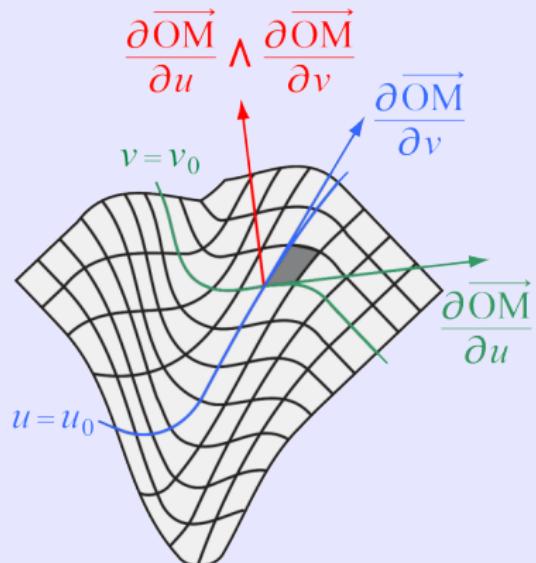
Par conséquent, les vecteurs  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$ , s'ils sont **non nuls**, sont **tangents** à la surface  $\Sigma$  au point  $M(u_0, v_0)$ .

S'ils sont de plus **non colinéaires**, ces vecteurs permettent de définir le **plan tangent** à la surface  $\Sigma$  au point  $M(u_0, v_0)$ . On dit que le point  $M$  est **régulier**. Dans ce cas, le vecteur

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

est un vecteur **normal** à ce plan tangent, donc à la surface  $\Sigma$ .

Si ces vecteurs sont **colinéaires** (éventuellement si l'un d'entre eux est nul), on a  $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{0}$ . On dit que le point  $M$  est **singulier**.





## Courbes de Lissajous

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_Lissajous/Lissajous.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous/Lissajous.html)



## Courbes cycloïdales

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_cycloides/cycloides0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides/cycloides0.html)



## Présentation Maple

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation\\_maple\\_html/presentation\\_maple4.html#/courbes\\_parametrees](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple4.html#/courbes_parametrees)