

# Intégrales multiples

*Aimé Lachal*

Cours d'OMNI  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## 1 Intégrale simple

- Définition
- Propriétés
- Généralisation

## 2 Intégrale double

- Définition
- Propriétés
- Calcul par intégrations successives
- Changement de variable

## 3 Intégrale triple

- Définition
- Propriétés
- Calcul par intégrations successives
- Changement de variable

- ① Intégrale simple
  - Définition
  - Propriétés
  - Généralisation
- ② Intégrale double
- ③ Intégrale triple

**Définition 1.1 (Sommes de Riemann)**

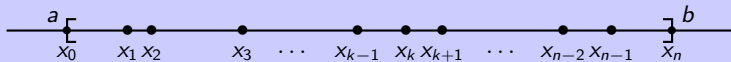
*Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.*



**Définition 1.1 (Sommes de Riemann)**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

- On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ , avec  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

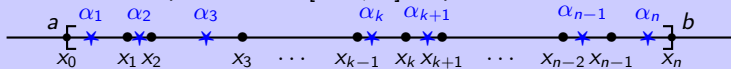


**Définition 1.1 (Sommes de Riemann)**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

- On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ , avec  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

On choisit dans chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  un point  $\alpha_k$ .

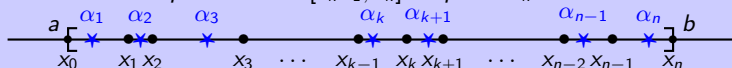


# Définition 1.1 (Sommes de Riemann)

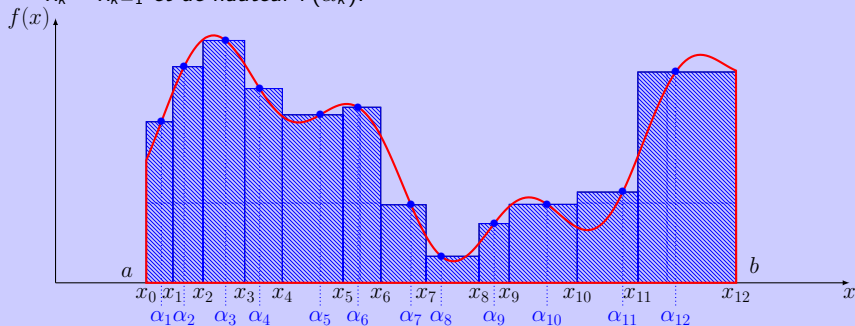
Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

- On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ , avec  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

On choisit dans chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  un point  $\alpha_k$ .



- On introduit la somme  $S_n(f)$  des aires algébriques des rectangles de largeur  $x_k - x_{k-1}$  et de hauteur  $f(\alpha_k)$ .

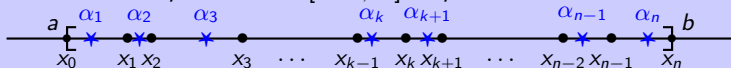


## Définition 1.1 (Sommes de Riemann)

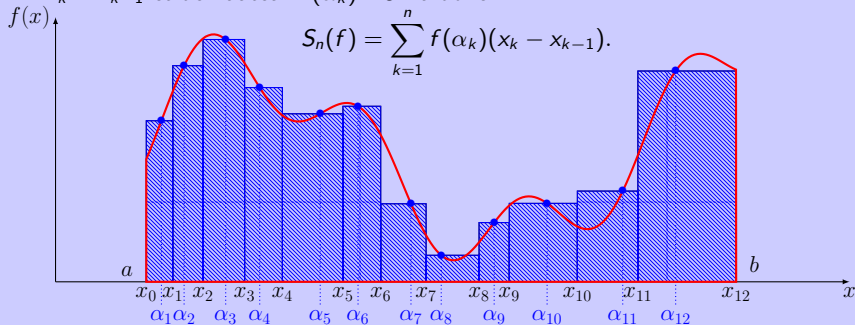
Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

- On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ , avec  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

On choisit dans chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  un point  $\alpha_k$ .



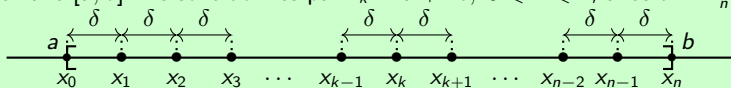
- On introduit la somme  $S_n(f)$  des aires algébriques des rectangles de largeur  $x_k - x_{k-1}$  et de hauteur  $f(\alpha_k)$ . On a donc



Cette somme est appelée **somme de Riemann** de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  relativement à la subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  et à la suite de points  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ .

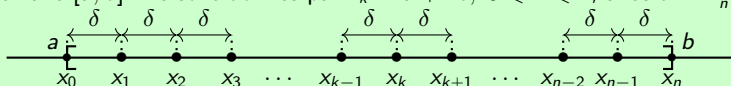
**Exemple 1.2 (Subdivision équidistante)**

- Un exemple fréquent est celui où les points de subdivision sont équirépartis dans l'intervalle  $[a, b]$  : ils sont donnés par  $x_k = a + k\delta$ ,  $0 \leq k \leq n$ , avec  $\delta = \frac{b-a}{n}$ .

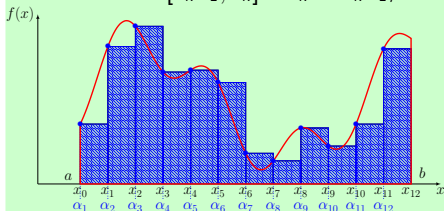


## Exemple 1.2 (Subdivision équidistante)

- Un exemple fréquent est celui où les points de subdivision sont équirépartis dans l'intervalle  $[a, b]$  : ils sont donnés par  $x_k = a + k\delta$ ,  $0 \leq k \leq n$ , avec  $\delta = \frac{b-a}{n}$ .

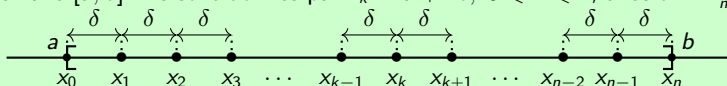


- On peut choisir pour les points intermédiaires  $\alpha_k$  une des bornes de chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  :  $\alpha_k = x_{k-1}$ ,

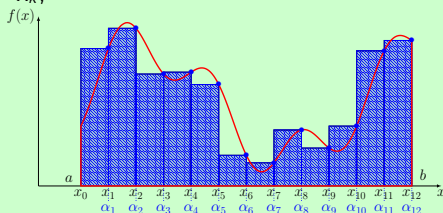
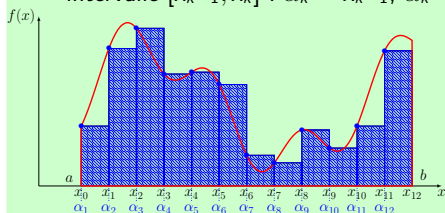


## Exemple 1.2 (Subdivision équidistante)

- Un exemple fréquent est celui où les points de subdivision sont équirépartis dans l'intervalle  $[a, b]$  : ils sont donnés par  $x_k = a + k\delta$ ,  $0 \leq k \leq n$ , avec  $\delta = \frac{b-a}{n}$ .

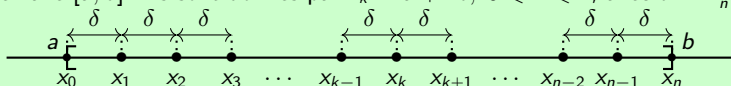


- On peut choisir pour les points intermédiaires  $\alpha_k$  une des bornes de chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  :  $\alpha_k = x_{k-1}$ ,  $\alpha_k = x_k$ ,

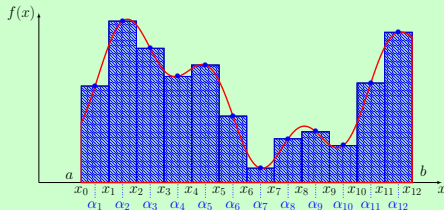
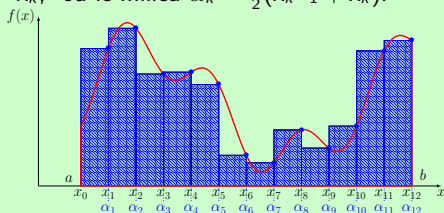
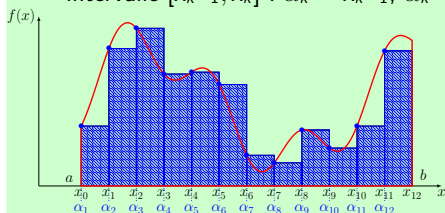


## Exemple 1.2 (Subdivision équidistante)

- Un exemple fréquent est celui où les points de subdivision sont équirépartis dans l'intervalle  $[a, b]$  : ils sont donnés par  $x_k = a + k\delta$ ,  $0 \leq k \leq n$ , avec  $\delta = \frac{b-a}{n}$ .



- On peut choisir pour les points intermédiaires  $\alpha_k$  une des bornes de chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  :  $\alpha_k = x_{k-1}$ ,  $\alpha_k = x_k$ , ou le milieu  $\alpha_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ .





**Théorème-définition 1.3 (Intégrale de Riemann)**

*Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.*

*Pour toute subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  et pour toute suite de points  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que  $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la suite des sommes de Riemann de  $f$  est convergente lorsque la plus grande des longueurs  $x_k - x_{k-1}$  tend vers 0 (et donc  $n \rightarrow +\infty$ ).*

**Théorème-définition 1.3 (Intégrale de Riemann)**

Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Pour toute subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  et pour toute suite de points  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que  $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la suite des sommes de Riemann de  $f$  est convergente lorsque la plus grande des longueurs  $x_k - x_{k-1}$  tend vers 0 (et donc  $n \rightarrow +\infty$ ).

Sa limite qui ne dépend que de  $f$  et de  $[a, b]$ , est appelée **l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  et notée  $\int_a^b f(x) dx$  ou simplement  $\int_a^b f$ .

**Théorème-définition 1.3 (Intégrale de Riemann)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Pour toute subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  et pour toute suite de points  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que  $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la suite des sommes de Riemann de  $f$  est convergente lorsque la plus grande des longueurs  $x_k - x_{k-1}$  tend vers 0 (et donc  $n \rightarrow +\infty$ ).

Sa limite qui ne dépend que de  $f$  et de  $[a, b]$ , est appelée **l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  et notée  $\int_a^b f(x) dx$  ou simplement  $\int_a^b f$ .

Autrement dit :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \right].$$

**Théorème-définition 1.3 (Intégrale de Riemann)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Pour toute subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  et pour toute suite de points  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que  $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la suite des sommes de Riemann de  $f$  est convergente lorsque la plus grande des longueurs  $x_k - x_{k-1}$  tend vers 0 (et donc  $n \rightarrow +\infty$ ).

Sa limite qui ne dépend que de  $f$  et de  $[a, b]$ , est appelée **l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  et notée  $\int_a^b f(x) dx$  ou simplement  $\int_a^b f$ .

Autrement dit :

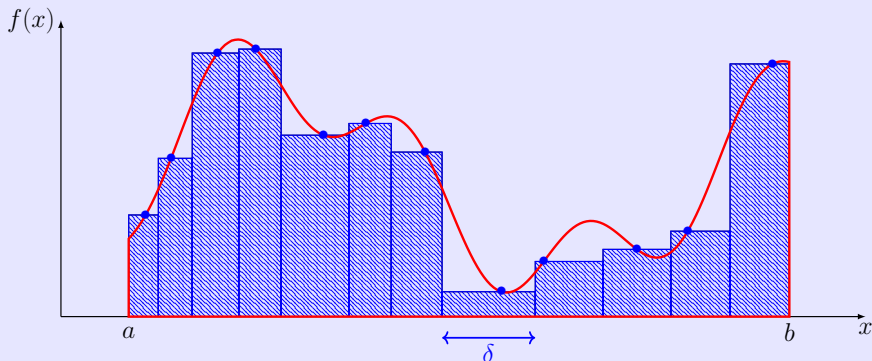
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \right].$$

**Remarque 1.4**

La variable d'intégration  $x$  n'a aucune importance, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre différente des bornes de l'intervalle (lettre muette) :

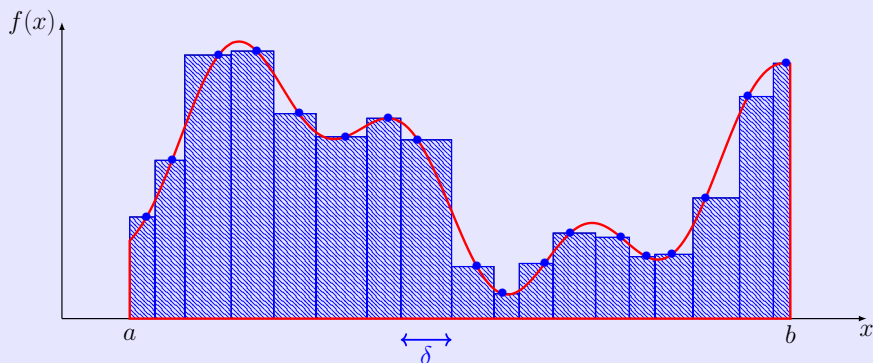
$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$$

## Visualisation (convergence des sommes de Riemann)



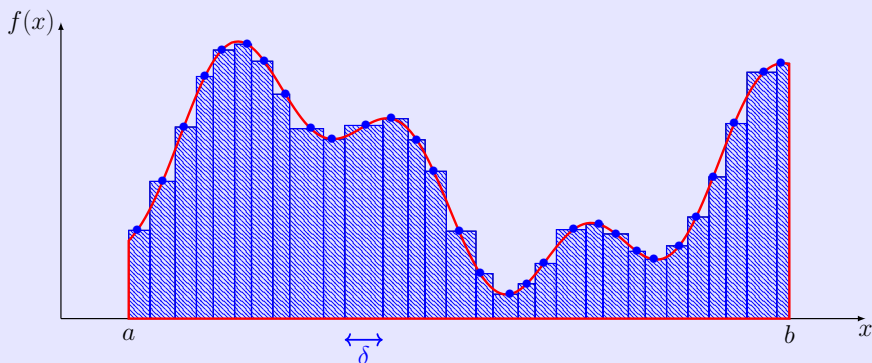
Somme des aires des rectangles de base  $\leq \delta$  avec  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

## Visualisation (convergence des sommes de Riemann)



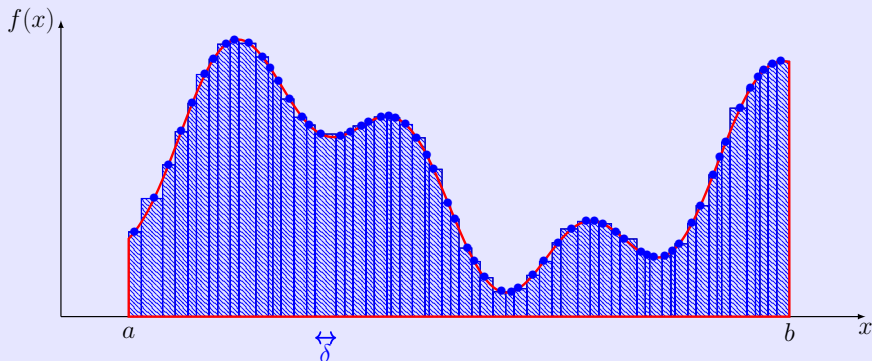
Somme des aires des rectangles de base  $\leq \delta$  avec  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

## Visualisation (convergence des sommes de Riemann)



Somme des aires des rectangles de base  $\leq \delta$  avec  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

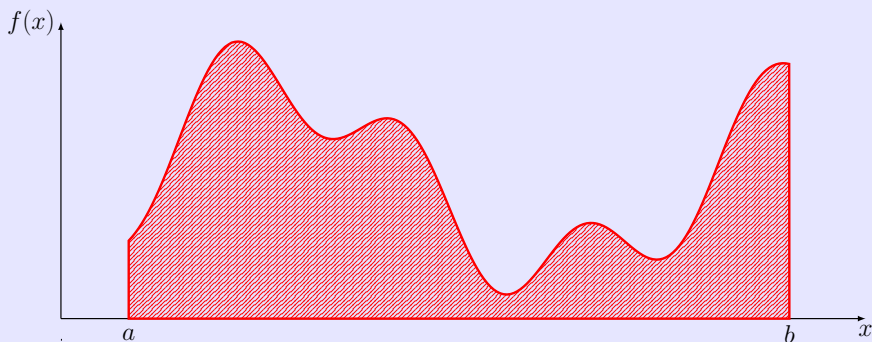
## Visualisation (convergence des sommes de Riemann)



Somme des aires des rectangles de base  $\leq \delta$  avec  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$



## Visualisation (convergence des sommes de Riemann)



Aire sous la courbe

## Interprétations géométriques de l'intégrale

### ① Interprétation

Le réel  $\int_a^b f$  représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de  $f$ , l'axe  $(Ox)$  et les droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ .

## Interprétations géométriques de l'intégrale

### ① Interprétation

Le réel  $\int_a^b f$  représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de  $f$ , l'axe  $(Ox)$  et les droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ .

« Algébrique » signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de  $(Ox)$  et positivement celles situées au-dessus.

## Interprétations géométriques de l'intégrale

## ① Interprétation

Le réel  $\int_a^b f$  représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de  $f$ , l'axe  $(Ox)$  et les droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ .

« Algébrique » signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de  $(Ox)$  et positivement celles situées au-dessus.

Lorsque  $f = 1$ , Le réel  $\int_a^b f = b - a$  représente simplement la **longueur** de l'intervalle  $[a, b]$ .

## Interprétations géométriques de l'intégrale

### ① Interprétation

Le réel  $\int_a^b f$  représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de  $f$ , l'axe  $(Ox)$  et les droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ .

« Algébrique » signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de  $(Ox)$  et positivement celles situées au-dessus.

Lorsque  $f = 1$ , Le réel  $\int_a^b f = b - a$  représente simplement la **longueur** de l'intervalle  $[a, b]$ .

### ② Interprétation de la notation

L'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  représente la somme infinie de toutes les aires des rectangles de hauteur  $f(x)$  et de largeur « **infinitésimale** »  $dx$ .

## Interprétations géométriques de l'intégrale

### ① Interprétation

Le réel  $\int_a^b f$  représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de  $f$ , l'axe  $(Ox)$  et les droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ .

« Algébrique » signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de  $(Ox)$  et positivement celles situées au-dessus.

Lorsque  $f = 1$ , Le réel  $\int_a^b f = b - a$  représente simplement la **longueur** de l'intervalle  $[a, b]$ .

### ② Interprétation de la notation

L'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  représente la somme infinie de toutes les aires des rectangles de hauteur  $f(x)$  et de largeur « **infinitésimale** »  $dx$ .

C'est le mathématicien allemand Leibniz qui en 1675 a introduit les notations  $dx$  et  $\int$ , qui représente un S déformé pour « **somme** », en latin *summa*.

Leibniz parlait de « **Calcul Sommatoire** ». Les Bernoulli préférèrent par la suite le terme « **Calcul Intégral** », c'est cette appellation qui l'a emportée mais le  $\int$  pratique d'utilisation est resté.

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

### Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

❶ **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$



Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

### Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

- ❶ **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
- ❷ **Relation de Chasles** : si  $c$  est un point de  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

### Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

- ❶ **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
- ❷ **Relation de Chasles** : si  $c$  est un point de  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
- ❸ **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f \geq 0.$

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

### Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

- ❶ **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
- ❷ **Relation de Chasles** : si  $c$  est un point de  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
- ❸ **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f \geq 0.$
- ❹ **Croissance** : si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g.$

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

### Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

- ❶ **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
- ❷ **Relation de Chasles** : si  $c$  est un point de  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
- ❸ **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f \geq 0.$
- ❹ **Croissance** : si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g.$
- ❺ **Inégalité « triangulaire »** :  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

### Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .

- ❶ **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
- ❷ **Relation de Chasles** : si  $c$  est un point de  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
- ❸ **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f \geq 0.$
- ❹ **Croissance** : si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g.$
- ❺ **Inégalité « triangulaire »** :  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$

### Remarque 1.6 (Calcul)

Calculer une intégrale peut se faire dans des cas simples à l'aide de calcul de primitive. On dispose de nombreuses techniques calculatoires. Sinon, dans le cas général on fait un calcul approché par des méthodes numériques.

### Généralisation à la dimension supérieure

- Intégrale **simple**  $\int \longleftrightarrow$  **aire** (parfois **longueur**) :  
définition par subdivision d'un intervalle + somme des aires de petits **rectangles**

### Généralisation à la dimension supérieure

- Intégrale **simple**  $\int \longleftrightarrow$  **aire** (parfois **longueur**) :  
définition par subdivision d'un intervalle + somme des aires de petits **rectangles**
- Intégrale **double**  $\iint \longleftrightarrow$  **volume** (parfois **aire**) :  
définition par subdivision d'un domaine du plan + somme des volumes de petits **parallélépipèdes**

## Généralisation à la dimension supérieure

- Intégrale **simple**  $\int \longleftrightarrow$  **aire** (parfois **longueur**) :  
définition par subdivision d'un intervalle + somme des aires de petits **rectangles**
- Intégrale **double**  $\iint \longleftrightarrow$  **volume** (parfois **aire**) :  
définition par subdivision d'un domaine du plan + somme des volumes de petits **parallélépipèdes**
- Intégrale **triple**  $\iiint \longleftrightarrow$  **hypervolume** (parfois **volume**) :  
définition par subdivision d'un domaine de l'espace + somme des volumes de petits **parallélotopes**...



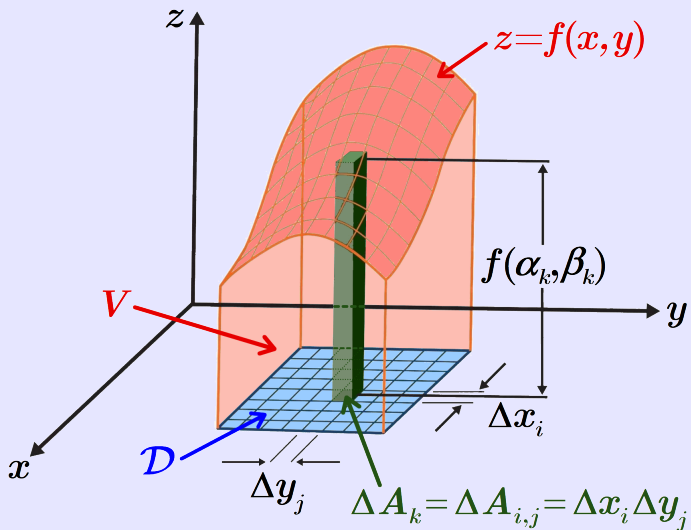
## 1 Intégrale simple

## 2 Intégrale double

- Définition
- Propriétés
- Calcul par intégrations successives
- Changement de variable

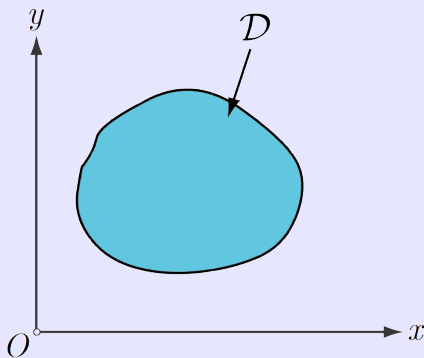
## 3 Intégrale triple

## Principe (pour une fonction définie sur un domaine rectangulaire)



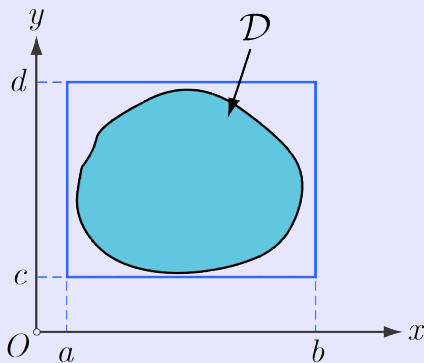
**Préliminaire : pavage d'un domaine**

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine du plan fermé et borné, de bord  $\mathcal{C}^1$ .



**Préliminaire : pavage d'un domaine**

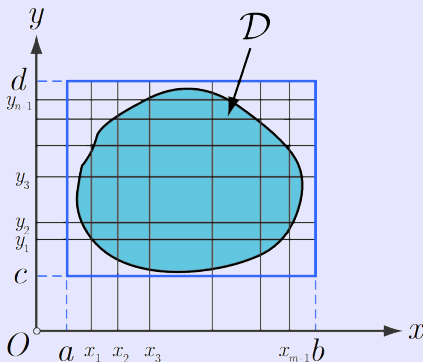
Soit  $\mathcal{D}$  un domaine du plan fermé et borné, de bord  $\mathcal{C}^1$ .  $\mathcal{D}$  est alors contenu dans un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ .



**Préliminaire : pavage d'un domaine**

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine du plan fermé et borné, de bord  $\mathcal{C}^1$ .  $\mathcal{D}$  est alors contenu dans un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ .

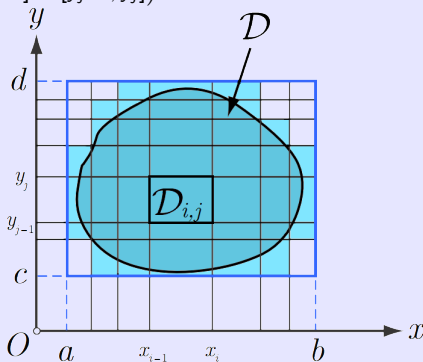
À partir de deux subdivisions  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  de  $[a, b]$  et  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  de  $[c, d]$ ,



### Préliminaire : pavage d'un domaine

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine du plan fermé et borné, de bord  $\mathcal{C}^1$ .  $\mathcal{D}$  est alors contenu dans un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ .

À partir de deux subdivisions  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  de  $[a, b]$  et  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  de  $[c, d]$ , on construit une subdivision (ou « **pavage** »)  $(\mathcal{D}_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  de  $\mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D}_{i,j} = ([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \cap \mathcal{D}$ .

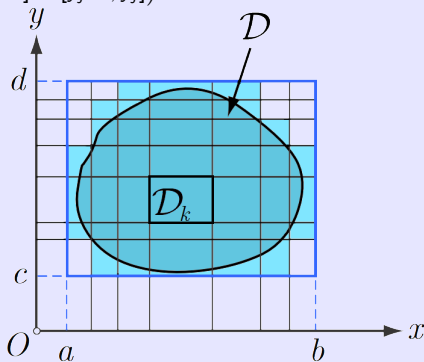


### Préliminaire : pavage d'un domaine

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine du plan fermé et borné, de bord  $\mathcal{C}^1$ .  $\mathcal{D}$  est alors contenu dans un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ .

À partir de deux subdivisions  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  de  $[a, b]$  et  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  de  $[c, d]$ , on construit une subdivision (ou « **pavage** »)  $(\mathcal{D}_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  de  $\mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D}_{i,j} = ([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \cap \mathcal{D}$ .

Si  $(\mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq mn}$  est un pavage du rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ , la somme des aires des  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$  tend vers l'aire de  $\mathcal{D}$  lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.



**Définition 2.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

**Principe :**

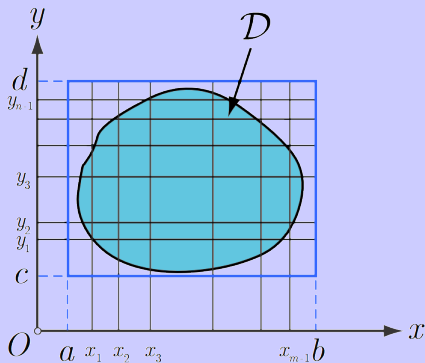


**Définition 2.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

**Principe :**

- on subdivise le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$

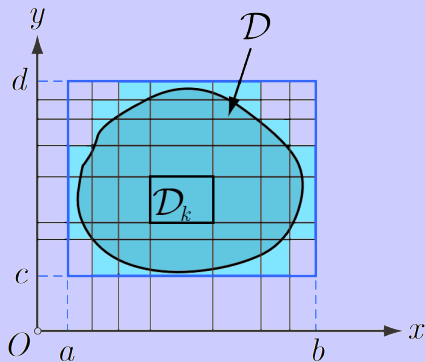


**Définition 2.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

**Principe :**

- on subdivise le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$
- dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$ ,

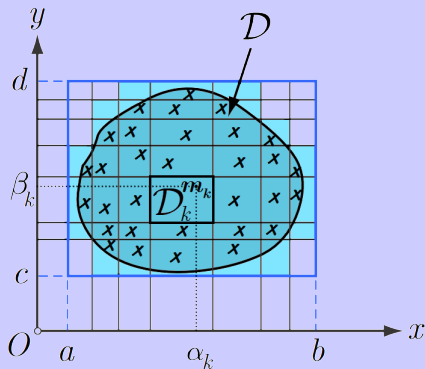


## Définition 2.1 (Somme de Riemann)

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

**Principe :**

- on subdivise le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$
- dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$ , on choisit un point  $m_k = (\alpha_k, \beta_k)$



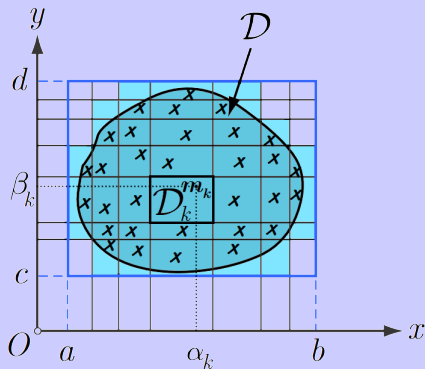
## Définition 2.1 (Somme de Riemann)

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

**Principe :**

- on subdivise le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$
- dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$ , on choisit un point  $m_k = (\alpha_k, \beta_k)$
- on définit la somme de Riemann correspondante :

$$S = \sum_k \text{Aire}(\mathcal{D}_k) \times f(m_k)$$



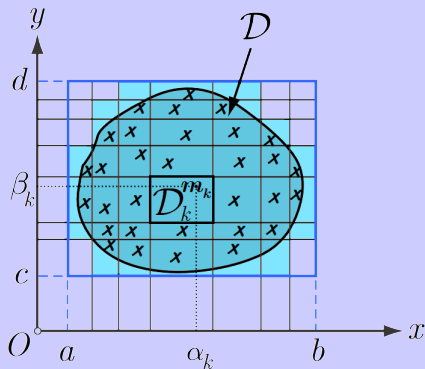
## Définition 2.1 (Somme de Riemann)

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

**Principe :**

- on subdivise le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$
- dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$ , on choisit un point  $m_k = (\alpha_k, \beta_k)$
- on définit la somme de Riemann correspondante :

$$S = \sum_k \text{Aire}(\mathcal{D}_k) \times f(m_k)$$



## Théorème-définition 2.2 (Intégrale double)

En affinant la subdivision, les sommes de Riemann convergent vers une limite ne dépendant que de  $f$  et de  $\mathcal{D}$ , qui définit l'**intégrale double** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ , notée

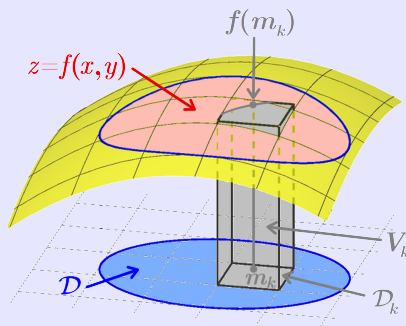
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy, \text{ ou en abrégé } \iint_{\mathcal{D}} f.$$

## Interprétations géométriques de l'intégrale

## • Interprétation de la notation

Le nombre réel  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$  représente la somme infinie de tous les volumes des parallélépipèdes rectangles de hauteur  $f(x, y)$  et de base infinitésimale le rectangle d'aire  $dx \times dy$ .

La somme est « double » car on somme suivant deux directions.



## Interprétations géométriques de l'intégrale

- Interprétation de la notation

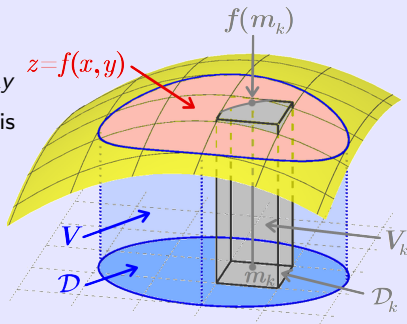
Le nombre réel  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$  représente la somme infinie de tous les volumes des parallélépipèdes rectangles de hauteur  $f(x, y)$  et de base infinitésimale le rectangle d'aire  $dx \times dy$ .

La somme est « double » car on somme suivant deux directions.

- Interprétation géométrique

La valeur de l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$  représente le **volume algébrique** compris entre :

- ★ la surface d'équation  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathcal{D}$
- ★ le plan  $z = 0$
- ★ la surface cylindrique s'appuyant sur le contour de  $\mathcal{D}$ .



## Interprétations géométriques de l'intégrale

## • Interprétation de la notation

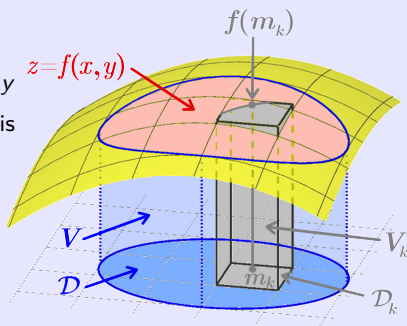
Le nombre réel  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$  représente la somme infinie de tous les volumes des parallélépipèdes rectangles de hauteur  $f(x, y)$  et de base infinitésimale le rectangle d'aire  $dx \times dy$ .

La somme est « double » car on somme suivant deux directions.

## • Interprétation géométrique

La valeur de l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$  représente le **volume algébrique** compris entre :

- ★ la surface d'équation  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathcal{D}$
- ★ le plan  $z = 0$
- ★ la surface cylindrique s'appuyant sur le contour de  $\mathcal{D}$ .



En particulier, pour  $f = 1$  :  $\iint_{\mathcal{D}} dx \, dy = \text{Aire}(\mathcal{D})$ .



Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 2.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \mu \iint_{\mathcal{D}} g$

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 2.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \mu \iint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iint_{\mathcal{D}_1} f + \iint_{\mathcal{D}_2} f$

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 2.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \mu \iint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iint_{\mathcal{D}_1} f + \iint_{\mathcal{D}_2} f$
- **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iint_{\mathcal{D}} f \geq 0$

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 2.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \mu \iint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iint_{\mathcal{D}_1} f + \iint_{\mathcal{D}_2} f$
- **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iint_{\mathcal{D}} f \geq 0$
- **Croissance** : si  $f \geq g$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iint_{\mathcal{D}} f \geq \iint_{\mathcal{D}} g$

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 2.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \mu \iint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iint_{\mathcal{D}_1} f + \iint_{\mathcal{D}_2} f$
- **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iint_{\mathcal{D}} f \geq 0$
- **Croissance** : si  $f \geq g$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iint_{\mathcal{D}} f \geq \iint_{\mathcal{D}} g$
- **Inégalité « triangulaire »** :  $\left| \iint_{\mathcal{D}} f \right| \leq \iint_{\mathcal{D}} |f|$

Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine  $\mathcal{D}$  (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...). On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

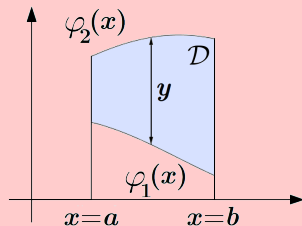
Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine  $\mathcal{D}$  (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...). On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

### Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en $y$ puis $x$ )

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $\mathcal{D}$  se décrive selon

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

avec  $\varphi_1, \varphi_2$  continues.





Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine  $\mathcal{D}$  (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...). On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

### Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en $y$ puis $x$ )

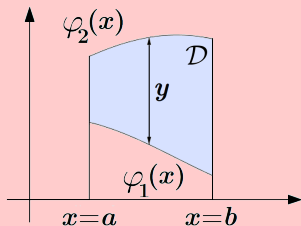
Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $\mathcal{D}$  se décrive selon

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

avec  $\varphi_1, \varphi_2$  continues.

Alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$



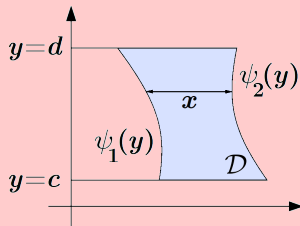
Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine  $\mathcal{D}$  (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...). On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

### Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en $x$ puis $y$ )

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $\mathcal{D}$  se décrive selon

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

avec  $\psi_1, \psi_2$  continues.



Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine  $\mathcal{D}$  (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...). On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

### Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en $x$ puis $y$ )

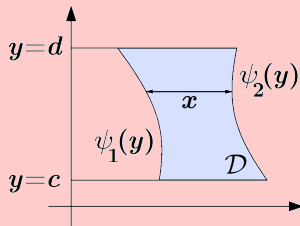
Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $\mathcal{D}$  se décrive selon

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

avec  $\psi_1, \psi_2$  continues.

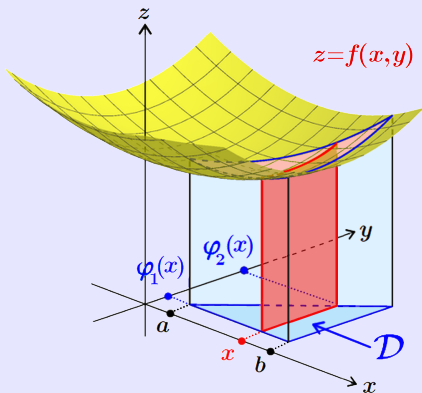
Alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$



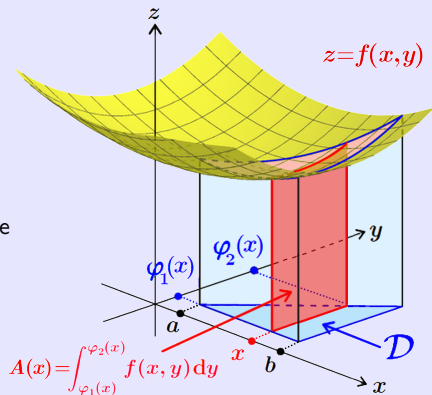
## Interprétation géométrique

- Domaine  $\mathcal{D}$  en bleu.
- Surface  $z = f(x, y)$  en jaune.
- Pour  $x$  fixé entre  $a$  et  $b$ ,  $y$  varie entre  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  (courbe rouge).



## Interprétation géométrique

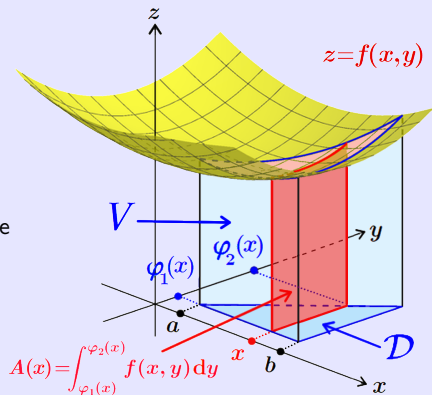
- Domaine  $\mathcal{D}$  en bleu.
- Surface  $z = f(x, y)$  en jaune.
- Pour  $x$  fixé entre  $a$  et  $b$ ,  $y$  varie entre  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  (courbe rouge).



- $A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  représente l'aire rouge située sous la courbe  $f(x, y)$  à  $x = \text{cste}$  (intégrale simple).

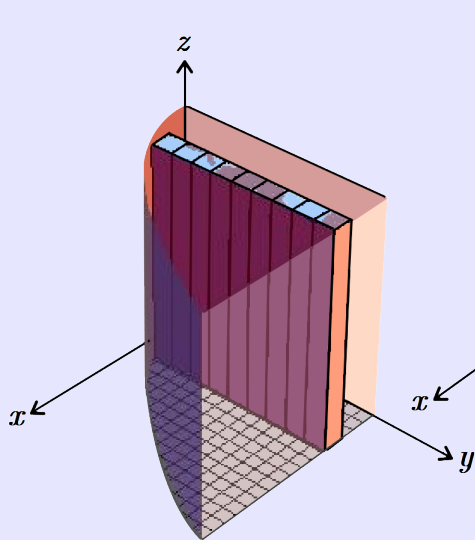
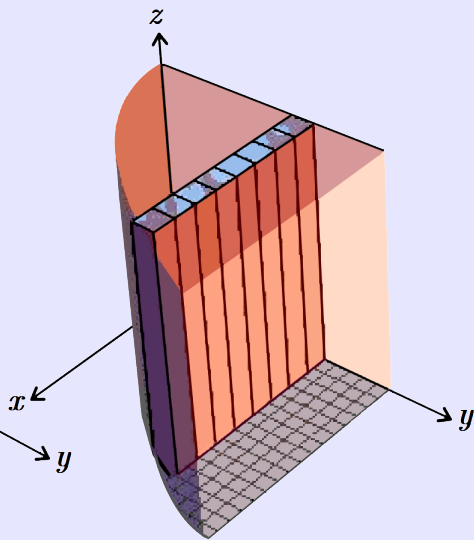
## Interprétation géométrique

- Domaine  $\mathcal{D}$  en bleu.
- Surface  $z = f(x, y)$  en jaune.
- Pour  $x$  fixé entre  $a$  et  $b$ ,  $y$  varie entre  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  (courbe rouge).

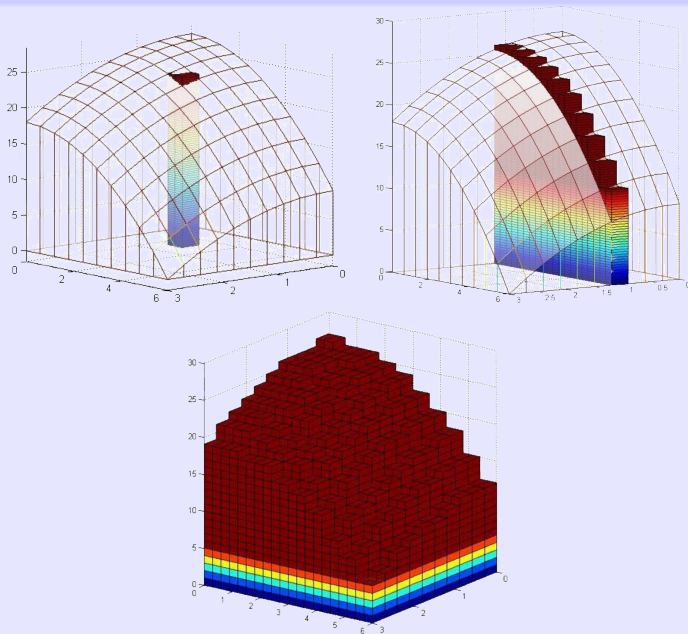


- $A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  représente l'aire rouge située sous la courbe  $f(x, y)$  à  $x = \text{cste}$  (intégrale simple).
- $V = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$  représente le volume du solide situé sous la surface jaune, à l'aplomb du domaine bleu.

## Interprétation géométrique

Intégration par rapport à  $y$  puis  $x$ Intégration par rapport à  $x$  puis  $y$

## Interprétation géométrique

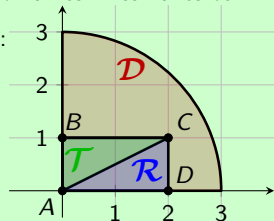




## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0)$  :

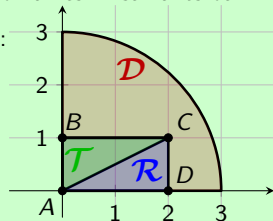
- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0)$  :

- 1 le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- 2 le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- 3 le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



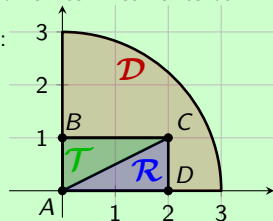
• Étape 1 — Description du domaine

- 1  $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 2$  et  $0 \leq y \leq 1$  ;

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



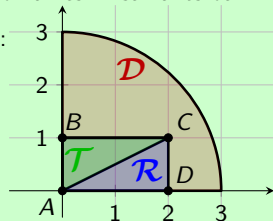
• Étape 1 — Description du domaine

- ①  $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 2$  et  $0 \leq y \leq 1$  ;
- ② (AC) a pour équation  $y = \frac{1}{2}x$  donc  $\mathcal{T} : 0 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2}x \leq y \leq 1$  ;

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



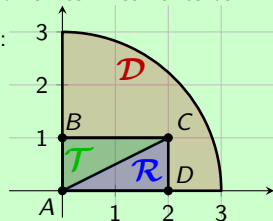
• Étape 1 — Description du domaine

- ①  $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 2$  et  $0 \leq y \leq 1$  ;
- ②  $(AC)$  a pour équation  $y = \frac{1}{2}x$  donc  $\mathcal{T} : 0 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2}x \leq y \leq 1$  ;
- ③ l'équation du cercle est  $x^2 + y^2 = 3^2$  donc  $\mathcal{D} : 0 \leq x \leq 3$  et  $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ .

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



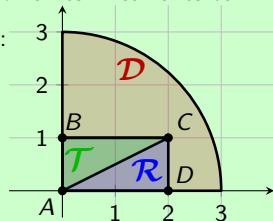
• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} \quad I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



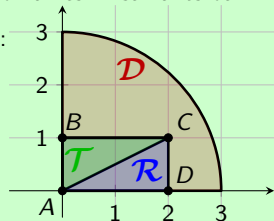
• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} \, I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



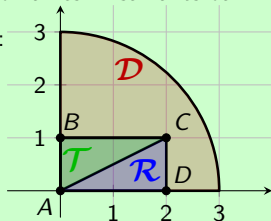
• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} \, I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

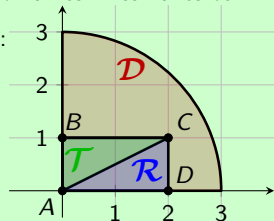
$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2$$



## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



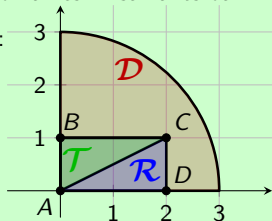
• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} \, I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

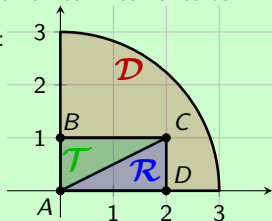
$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\textcircled{2} I_{\mathcal{T}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

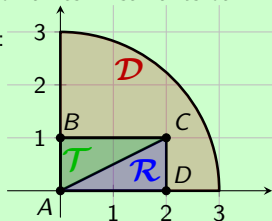
$$\textcircled{1} \, I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\textcircled{2} \, I_{\mathcal{T}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

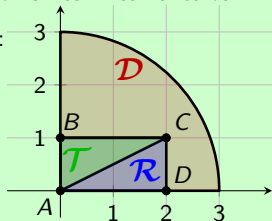
$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx \end{aligned}$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

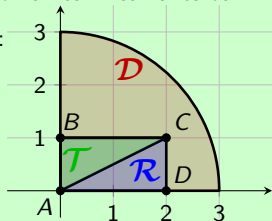
$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 \end{aligned}$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

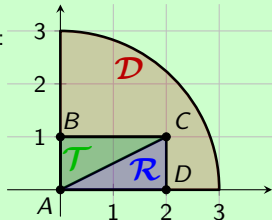
$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

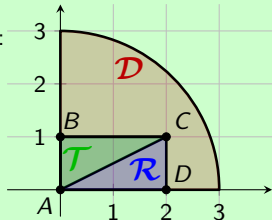
$$\begin{aligned} \textcircled{2} I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} I_{\mathcal{D}} = \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} (xy) \, dy \right) dx$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

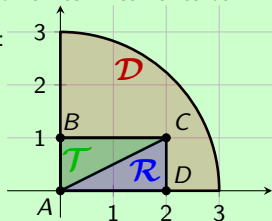
$$\textcircled{3} I_{\mathcal{D}} = \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx$$



## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



## • Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} \, I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

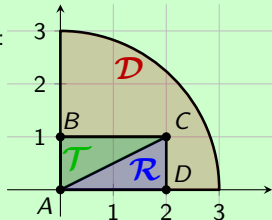
$$\begin{aligned} \textcircled{2} \, I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \, I_{\mathcal{D}} &= \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{2} x (9 - x^2) dx \end{aligned}$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



## • Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

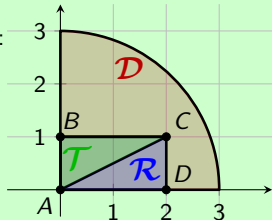
$$\begin{aligned} \textcircled{2} I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} I_{\mathcal{D}} &= \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{2} x (9 - x^2) dx = \left[ \frac{9}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_0^3 \end{aligned}$$

## Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double  $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) \, dx \, dy$  pour les domaines  $\Delta$  suivants où  $A, B, C, D$  sont les points  $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$  :

- ① le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $ABCD$  ;
- ② le triangle  $\mathcal{T}$  de sommets  $ABC$  ;
- ③ le quart de disque  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon 3.



### • Étape 2 — Calcul de l'intégrale

$$\textcircled{1} \, I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \, I_{\mathcal{T}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=x/2}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \, I_{\mathcal{D}} &= \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} (xy) \, dy \right) dx = \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{2} x (9 - x^2) dx = \left[ \frac{9}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{81}{8} = 10,125 \end{aligned}$$

**Corollaire 2.6 (Séparation des variables)**

Dans le cas particulier où  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  est un rectangle, et  $f$  est une fonction à « **variables séparables** », i.e.  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Corollaire 2.6 (Séparation des variables)**

Dans le cas particulier où  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  est un rectangle, et  $f$  est une fonction à « **variables séparables** », i.e.  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Exemple 2.7**

En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle  $\mathcal{R} = ABCD$ , on trouve

$$I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx$$

**Corollaire 2.6 (Séparation des variables)**

Dans le cas particulier où  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  est un rectangle, et  $f$  est une fonction à « **variables séparables** », i.e.  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Exemple 2.7**

En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle  $\mathcal{R} = ABCD$ , on trouve

$$I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \left( \int_0^2 x \, dx \right) \times \left( \int_0^1 y \, dy \right)$$

**Corollaire 2.6 (Séparation des variables)**

Dans le cas particulier où  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  est un rectangle, et  $f$  est une fonction à « **variables séparables** », i.e.  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Exemple 2.7**

En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle  $\mathcal{R} = ABCD$ , on trouve

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{R}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \left( \int_0^2 x \, dx \right) \times \left( \int_0^1 y \, dy \right) \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \times \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 \end{aligned}$$

**Corollaire 2.6 (Séparation des variables)**

Dans le cas particulier où  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  est un rectangle, et  $f$  est une fonction à « **variables séparables** », i.e.  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Exemple 2.7**

En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle  $\mathcal{R} = ABCD$ , on trouve

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{R}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \left( \int_0^2 x \, dx \right) \times \left( \int_0^1 y \, dy \right) \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \times \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$



**Corollaire 2.6 (Séparation des variables)**

Dans le cas particulier où  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  est un rectangle, et  $f$  est une fonction à « **variables séparables** », i.e.  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Exemple 2.7**

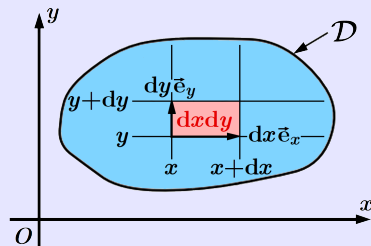
En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle  $\mathcal{R} = ABCD$ , on trouve

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{R}} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (xy) \, dy \right) dx = \left( \int_0^2 x \, dx \right) \times \left( \int_0^1 y \, dy \right) \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \times \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Les cas du triangle  $\mathcal{T} = ABC$  et du quart de disque  $\mathcal{D}$  ne permettent pas d'utiliser la séparation des variables car ces domaines ne sont pas des rectangles, donc les bornes sont dépendantes les unes des autres.

## Changement de variable

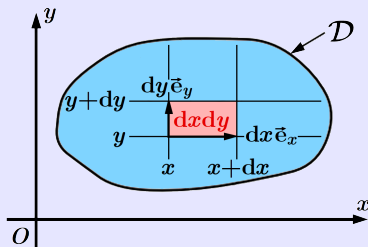
$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$  est la **somme infinie** pour chaque point  $M(x, y) \in \mathcal{D}$  des **volumes** algébriques des parallélépipèdes rectangles de hauteur  $f(x, y)$  et de base la **surface élémentaire**  $dS = dx \times dy$  en coordonnées cartésiennes.



## Changement de variable

$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$  est la **somme infinie** pour chaque point  $M(x, y) \in \mathcal{D}$  des **volumes** algébriques des parallélépipèdes rectangles de hauteur  $f(x, y)$  et de base la **surface élémentaire**  $dS = dx \times dy$  en coordonnées cartésiennes.

L'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} f$  peut donc s'écrire symboliquement  $\iint_{M \in \mathcal{D}} f(M) dS$ .  
Cette quantité ne dépend pas des coordonnées  $x$  et  $y$  mais uniquement du domaine  $\mathcal{D}$ .



## Changement de variable

$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$  est la **somme infinie** pour chaque point  $M(x, y) \in \mathcal{D}$  des **volumes** algébriques des parallélépipèdes rectangles de hauteur  $f(x, y)$  et de base la **surface élémentaire**  $dS = dx \times dy$  en coordonnées cartésiennes.

L'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} f$  peut donc s'écrire symboliquement  $\iint_{M \in \mathcal{D}} f(M) dS$ .

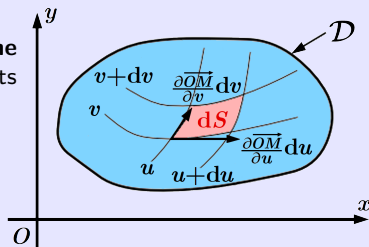
Cette quantité ne dépend pas des coordonnées  $x$  et  $y$  mais uniquement du domaine  $\mathcal{D}$ .

Si on choisit des coordonnées  $(u, v)$ , la subdivision de  $\mathcal{D}$  se fait le long des courbes coordonnées.

La surface élémentaire devient le **parallélogramme élémentaire** construit sur les vecteurs tangents

$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$  :

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv \right\|$$



- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) \, dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du$$

- 1 les variables :  $u$  au lieu de  $x$

- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- ① les variables :  $u$  au lieu de  $x$
- ② la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$

- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- ① les variables :  $u$  au lieu de  $x$
- ② la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
- ③ l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$



- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- ① les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - ② la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - ③ l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :

- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- ① les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - ② la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - ③ l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - ① les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,

- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dx dy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$

- Pour une **intégrale simple**, il y a trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dx dy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$
    - le domaine d'intégration :  $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$

- Pour une **intégrale simple**, il y a trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dx dy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$
    - le domaine d'intégration :  $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$
- Au final, après le changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$  :

- Pour une **intégrale simple**, il y a trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dx dy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$
    - le domaine d'intégration :  $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$

Au final, après le changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$  :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy =$$

- Pour une **intégrale simple**, il y a trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dx dy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$
    - le domaine d'intégration :  $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$

Au final, après le changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$  :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} g(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$$

- Pour une **intégrale simple**, il y a trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dx dy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$
    - le domaine d'intégration :  $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$

Au final, après le changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$  :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} g(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$$

- Exemple en **coordonnées polaires** :

$$\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\| dr d\theta$$



- Pour une **intégrale simple**, il y a trois modifications dues au changement de variable  $x = \varphi(u)$  :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- les variables :  $u$  au lieu de  $x$
  - la longueur élémentaire  $dx$  qui devient  $\varphi'(u) du$
  - l'intervalle d'intégration :  $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$
- Il en est de même pour une **intégrale double** :
    - les variables :  $(u, v)$  au lieu de  $(x, y)$ ,
    - la surface élémentaire :  $dS = dxdy$  qui devient  $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| dudv$
    - le domaine d'intégration :  $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$

Au final, après le changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$  :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dxdy = \iint_{\Delta} g(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| dudv$$

- Exemple en **coordonnées polaires** :

$$\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\| drd\theta = \left\| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\| drd\theta = r drd\theta$$

### Coordonnées polaires

Partant du vecteur déplacement

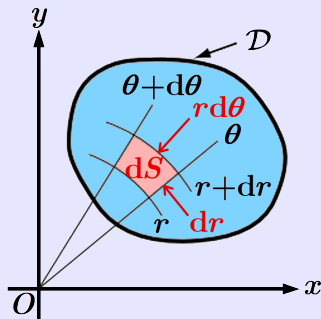
$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (r d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on en déduit intuitivement la **surface élémentaire**  $dS$  en coordonnées polaires :

$$dS = r dr d\theta$$



## Coordonnées polaires

Partant du vecteur déplacement

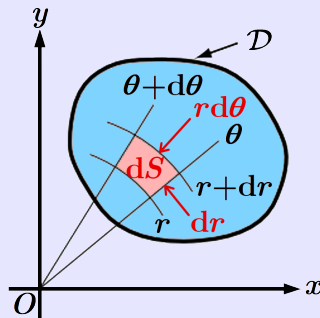
$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (r d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on en déduit intuitivement la **surface élémentaire**  $dS$  en coordonnées polaires :

$$dS = r dr d\theta$$



## Théorème 2.8 (Changement de variables en coordonnées polaires)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

## Coordonnées polaires

Partant du vecteur déplacement

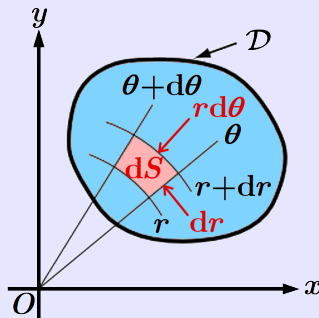
$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (r d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on en déduit intuitivement la **surface élémentaire**  $dS$  en coordonnées polaires :

$$dS = r dr d\theta$$



## Théorème 2.8 (Changement de variables en coordonnées polaires)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

❶ On remplace  $(x, y)$  par  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,

## Coordonnées polaires

Partant du vecteur déplacement

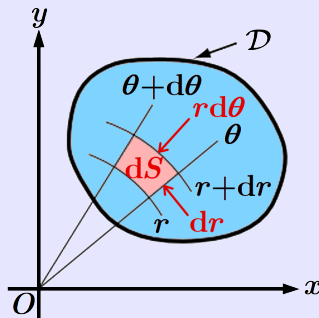
$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (r d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on en déduit intuitivement la **surface élémentaire**  $dS$  en coordonnées polaires :

$$dS = r dr d\theta$$



## Théorème 2.8 (Changement de variables en coordonnées polaires)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

- ① On remplace  $(x, y)$  par  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,
- ② On remplace  $dx dy$  par  $r dr d\theta$ ,

## Coordonnées polaires

Partant du vecteur déplacement

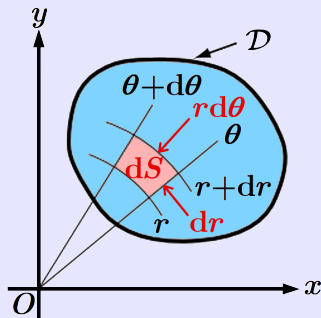
$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (r d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on en déduit intuitivement la **surface élémentaire**  $dS$  en coordonnées polaires :

$$dS = r dr d\theta$$



## Théorème 2.8 (Changement de variables en coordonnées polaires)

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

- ❶ On remplace  $(x, y)$  par  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,
- ❷ On remplace  $dx dy$  par  $r dr d\theta$ ,
- ❸ On trouve une description en polaire  $\Delta$  du domaine  $\mathcal{D}$ .

**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

### Exemple 2.9 (Aire d'un disque)

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...



**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

Avec cette approche :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$$

**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

Avec cette approche :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\Delta} r dr d\theta$$

**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

Avec cette approche :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r dr d\theta$$

**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

Avec cette approche :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r dr d\theta \\ &= \left( \int_0^R r dr \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \end{aligned}$$

**Exemple 2.9 (Aire d'un disque)**

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

Avec cette approche :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r dr d\theta \\ &= \left( \int_0^R r dr \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{1}{2} R^2 \times 2\pi = \pi R^2 \end{aligned}$$

1 Intégrale simple

2 Intégrale double

3 Intégrale triple

- Définition
- Propriétés
- Calcul par intégrations successives
- Changement de variable

**Définition 3.1 (Somme de Riemann)**

*Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  fermé borné et  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.*



**Définition 3.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  fermé borné et  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- $\mathcal{D}$  est contenu dans un pavé  $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$  sur lequel on peut définir des subdivisions de chacun des trois intervalles. Cela fournit un pavage  $(\mathcal{D}_k)$  du pavé.

**Définition 3.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  fermé borné et  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- $\mathcal{D}$  est contenu dans un pavé  $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$  sur lequel on peut définir des subdivisions de chacun des trois intervalles. Cela fournit un pavage  $(\mathcal{D}_k)$  du pavé.
- Dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$  on choisit un point  $m_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ .

**Définition 3.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  fermé borné et  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- $\mathcal{D}$  est contenu dans un pavé  $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$  sur lequel on peut définir des subdivisions de chacun des trois intervalles. Cela fournit un pavage  $(\mathcal{D}_k)$  du pavé.
- Dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$  on choisit un point  $m_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ .
- On définit la **somme de Riemann** correspondante :

$$S = \sum_k \text{Volume}(\mathcal{D}_k) \times f(m_k)$$

**Définition 3.1 (Somme de Riemann)**

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  fermé borné et  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- $\mathcal{D}$  est contenu dans un pavé  $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$  sur lequel on peut définir des subdivisions de chacun des trois intervalles. Cela fournit un pavage  $(\mathcal{D}_k)$  du pavé.
- Dans chaque  $\mathcal{D}_k$  intersectant  $\mathcal{D}$  on choisit un point  $m_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ .
- On définit la **somme de Riemann** correspondante :

$$S = \sum_k \text{Volume}(\mathcal{D}_k) \times f(m_k)$$

**Théorème-définition 3.2 (Intégrale triple)**

En affinant la subdivision, les sommes de Riemann convergent vers une limite ne dépendant que de  $f$  et de  $\mathcal{D}$ , qui définit l'**intégrale triple** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ , notée

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx dy dz \text{ ou en abrégé } \iiint_{\mathcal{D}} f.$$

### Interprétations géométriques de l'intégrale

- **Interprétation de la notation**

Le nombre réel  $\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  représente la somme infinie de tous les « **hypervolumes** » des parallélotopes de hauteur  $f(x, y, z)$  et de base infinitésimale le parallélépipède d'aire  $dx \times dy \times dz$ .

La somme est « triple » car on somme suivant trois directions.

## Interprétations géométriques de l'intégrale

- **Interprétation de la notation**

Le nombre réel  $\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$  représente la somme infinie de tous les « **hypervolumes** » des parallélotopes de hauteur  $f(x, y, z)$  et de base infinitésimale le parallélépipède d'aire  $dx \times dy \times dz$ .

La somme est « triple » car on somme suivant trois directions.

- **Interprétation géométrique**

La valeur de l'intégrale  $\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$  représente l'**hypervolume algébrique** compris entre :

- ★ l'« hypersurface » d'équation  $t = f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$
- ★ l'« hyperplan »  $t = 0$
- ★ l'« hypersurface » cylindrique s'appuyant sur le contour de  $\mathcal{D}$ .

## Interprétations géométriques de l'intégrale

- **Interprétation de la notation**

Le nombre réel  $\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  représente la somme infinie de tous les « **hypervolumes** » des parallélotopes de hauteur  $f(x, y, z)$  et de base infinitésimale le parallélépipède d'aire  $dx \times dy \times dz$ .

La somme est « triple » car on somme suivant trois directions.

- **Interprétation géométrique**

La valeur de l'intégrale  $\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  représente l'**hypervolume algébrique** compris entre :

- ★ l'« hypersurface » d'équation  $t = f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$
- ★ l'« hyperplan »  $t = 0$
- ★ l'« hypersurface » cylindrique s'appuyant sur le contour de  $\mathcal{D}$ .

En particulier, pour  $f = 1$  :  $\iiint_{\mathcal{D}} dx \, dy \, dz = \text{Volume}(\mathcal{D})$ .

Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).



Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 3.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \mu \iiint_{\mathcal{D}} g$

Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 3.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \mu \iiint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iiint_{\mathcal{D}_1} f + \iiint_{\mathcal{D}_2} f$

Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 3.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \mu \iiint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iiint_{\mathcal{D}_1} f + \iiint_{\mathcal{D}_2} f$
- **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iiint_{\mathcal{D}} f \geq 0$

Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 3.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \mu \iiint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iiint_{\mathcal{D}_1} f + \iiint_{\mathcal{D}_2} f$
- **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iiint_{\mathcal{D}} f \geq 0$
- **Croissance** : si  $f \geq g$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iiint_{\mathcal{D}} f \geq \iiint_{\mathcal{D}} g$

Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).

### Propriété 3.3 (Propriétés)

- **Linéarité** :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \mu \iiint_{\mathcal{D}} g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** :  
si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$  alors  $\iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iiint_{\mathcal{D}_1} f + \iiint_{\mathcal{D}_2} f$
- **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iiint_{\mathcal{D}} f \geq 0$
- **Croissance** : si  $f \geq g$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\iiint_{\mathcal{D}} f \geq \iiint_{\mathcal{D}} g$
- **Inégalité « triangulaire »** :  $\left| \iiint_{\mathcal{D}} f \right| \leq \iiint_{\mathcal{D}} |f|$

### Principe d'intégrations successives

Une **intégrale triple** va pouvoir se décomposer en :

### Principe d'intégrations successives

Une **intégrale triple** va pouvoir se décomposer en :

- une **intégrale simple** suivie d'une **intégrale double** :  $\iiint_{\mathcal{D}} = \iint_{\dots} \int_{\dots}$

### Principe d'intégrations successives

Une **intégrale triple** va pouvoir se décomposer en :

- une **intégrale simple** suivie d'une **intégrale double** :  $\iiint_{\mathcal{D}} = \iint_{\dots} \int_{\dots}$
- une **intégrale double** suivie d'une **intégrale simple** :  $\iiint_{\mathcal{D}} = \int_{\dots} \iint_{\dots}$



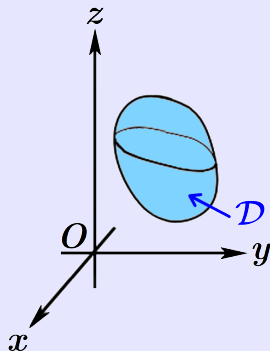
### Principe d'intégrations successives

Une **intégrale triple** va pouvoir se décomposer en :

- une **intégrale simple** suivie d'une **intégrale double** :  $\iiint_{\mathcal{D}} = \iint_{\dots} \int_{\dots}$
- une **intégrale double** suivie d'une **intégrale simple** :  $\iiint_{\mathcal{D}} = \int_{\dots} \iint_{\dots}$
- trois **intégrales simples** successives :  $\iiint_{\mathcal{D}} = \int_{\dots} \int_{\dots} \int_{\dots}$

## Intégrale double suivie d'une simple

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de l'espace.



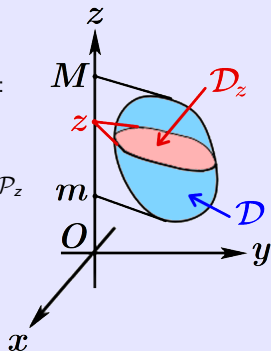
## Intégrale double suivie d'une simple

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de l'espace.

Supposons que  $\mathcal{D}$  soit défini par ses coupes horizontales :

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : m \leq z \leq M, (x, y) \in \mathcal{D}_z\}$$

où  $\mathcal{D}_z$  représente la section du domaine  $\mathcal{D}$  par le plan  $\mathcal{P}_z$  horizontal de cote  $z$  :  $\mathcal{D}_z = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_z$



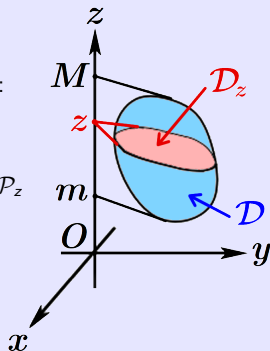
## Intégrale double suivie d'une simple

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de l'espace.

Supposons que  $\mathcal{D}$  soit défini par ses coupes horizontales :

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : m \leq z \leq M, (x, y) \in \mathcal{D}_z\}$$

où  $\mathcal{D}_z$  représente la section du domaine  $\mathcal{D}$  par le plan  $\mathcal{P}_z$  horizontal de cote  $z$  :  $\mathcal{D}_z = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_z$



## Théorème 3.4 (Théorème de Fubini)

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{z=m}^{z=M} \left( \iint_{\mathcal{D}_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz$$

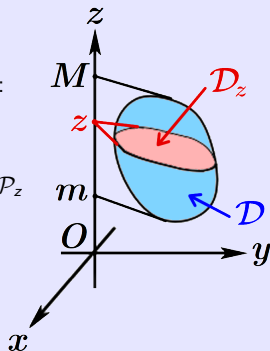
## Intégrale double suivie d'une simple

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de l'espace.

Supposons que  $\mathcal{D}$  soit défini par ses coupes horizontales :

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : m \leq z \leq M, (x, y) \in \mathcal{D}_z\}$$

où  $\mathcal{D}_z$  représente la section du domaine  $\mathcal{D}$  par le plan  $\mathcal{P}_z$  horizontal de cote  $z$  :  $\mathcal{D}_z = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_z$



## Théorème 3.4 (Théorème de Fubini)

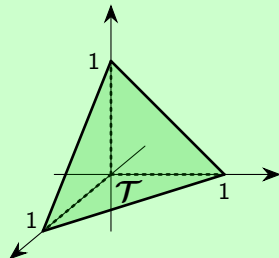
$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{z=m}^{z=M} \left( \iint_{\mathcal{D}_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz$$

## Remarque 3.5

On a privilégié la variable  $z$ , mais on pourrait faire de même en privilégiant  $x$  ou  $y$ .

**Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)**

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

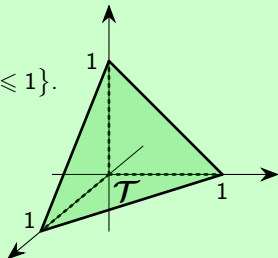


**Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)**

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

- **Première méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

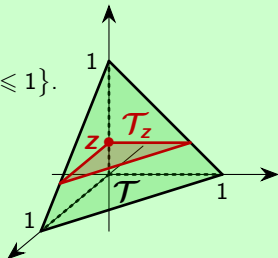
$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$



**Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)**

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

- Première méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :  
$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$
  
Pour  $z \in [0, 1]$  fixé,  $\mathcal{T}_z$  est un triangle rectangle de côtés  $1 - z$ , donc d'aire  $\frac{1}{2}(1 - z)^2$ .





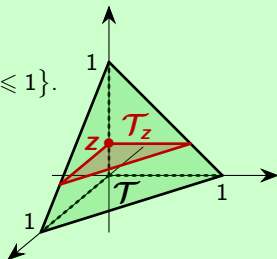
**Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)**

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

- **Première méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Pour  $z \in [0, 1]$  fixé,  $\mathcal{T}_z$  est un triangle rectangle de côtés  $1 - z$ , donc d'aire  $\frac{1}{2}(1 - z)^2$ .



$$\text{Volume}(\mathcal{T}) = \iiint_{\mathcal{T}} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \iint_{\mathcal{T}_z} dx dy \right) dz = \int_0^1 (\text{Aire}(\mathcal{T}_z)) dz$$

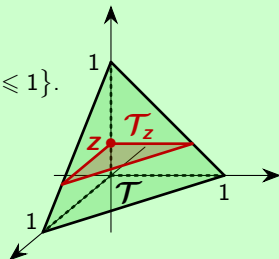
## Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

- **Première méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Pour  $z \in [0, 1]$  fixé,  $\mathcal{T}_z$  est un triangle rectangle de côtés  $1 - z$ , donc d'aire  $\frac{1}{2}(1 - z)^2$ .



$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{T}) &= \iiint_{\mathcal{T}} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \iint_{\mathcal{T}_z} dx dy \right) dz = \int_0^1 (\text{Aire}(\mathcal{T}_z)) dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z)^2 dz = \left[ -\frac{1}{6}(1 - z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

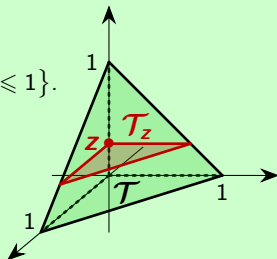
## Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

- **Première méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Pour  $z \in [0, 1]$  fixé,  $\mathcal{T}_z$  est un triangle rectangle de côtés  $1 - z$ , donc d'aire  $\frac{1}{2}(1 - z)^2$ .



$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{T}) &= \iiint_{\mathcal{T}} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \iint_{\mathcal{T}_z} dx dy \right) dz = \int_0^1 (\text{Aire}(\mathcal{T}_z)) dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z)^2 dz = \left[ -\frac{1}{6}(1 - z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- **Deuxième méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

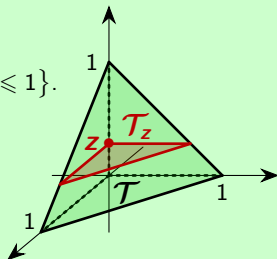
## Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier  $\mathcal{T}$  de côté 1.

- **Première méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Pour  $z \in [0, 1]$  fixé,  $\mathcal{T}_z$  est un triangle rectangle de côtés  $1 - z$ , donc d'aire  $\frac{1}{2}(1 - z)^2$ .



$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{T}) &= \iiint_{\mathcal{T}} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \iint_{\mathcal{T}_z} dx dy \right) dz = \int_0^1 (\text{Aire}(\mathcal{T}_z)) dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z)^2 dz = \left[ -\frac{1}{6}(1 - z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

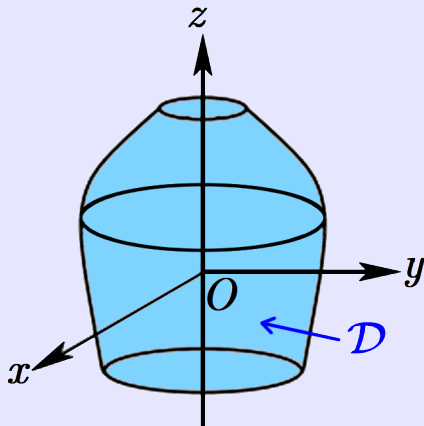
- **Deuxième méthode.** Description cartésienne de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

$$\text{Donc } \text{Volume}(\mathcal{T}) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{6}.$$

**Application : volume d'un solide de révolution**

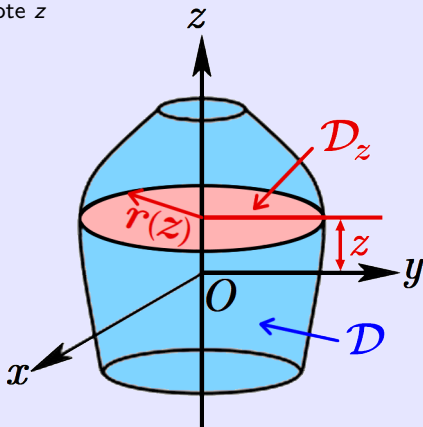
En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .



**Application : volume d'un solide de révolution**

En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .

La coupe de  $\mathcal{D}$  avec le plan horizontal de cote  $z$  est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z)$ .



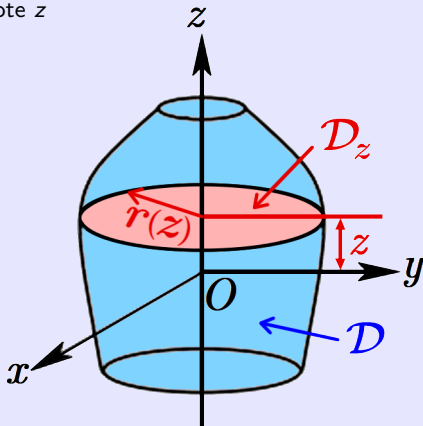
**Application : volume d'un solide de révolution**

En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .

La coupe de  $\mathcal{D}$  avec le plan horizontal de cote  $z$  est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z)$ .

Le volume de  $\mathcal{D}$  est égal à :

$$\text{Volume}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz$$



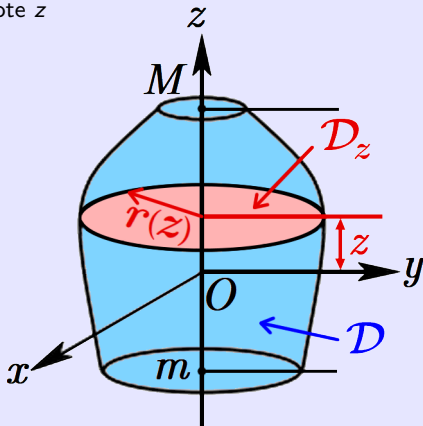
### Application : volume d'un solide de révolution

En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .

La coupe de  $\mathcal{D}$  avec le plan horizontal de cote  $z$  est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z)$ .

Le volume de  $\mathcal{D}$  est égal à :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz \\ &= \int_{z=m}^{z=M} \left( \iint_{\mathcal{D}_z} dx dy \right) dz\end{aligned}$$





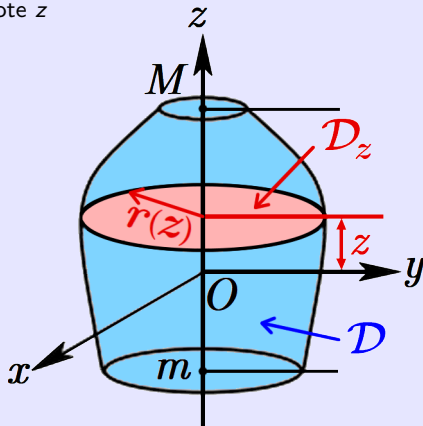
### Application : volume d'un solide de révolution

En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .

La coupe de  $\mathcal{D}$  avec le plan horizontal de cote  $z$  est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z)$ .

Le volume de  $\mathcal{D}$  est égal à :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz \\ &= \int_{z=m}^{z=M} \left( \iint_{\mathcal{D}_z} dx dy \right) dz \\ &= \int_m^M (\text{Aire}(\mathcal{D}_z)) dz\end{aligned}$$



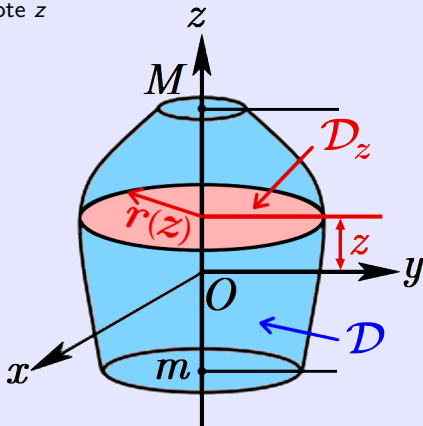
### Application : volume d'un solide de révolution

En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .

La coupe de  $\mathcal{D}$  avec le plan horizontal de cote  $z$  est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z)$ .

Le volume de  $\mathcal{D}$  est égal à :

$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz \\
 &= \int_{z=m}^{z=M} \left( \iint_{\mathcal{D}_z} dx dy \right) dz \\
 &= \int_m^M (\text{Aire}(\mathcal{D}_z)) dz \\
 &= \int_m^M \pi r^2(z) dz
 \end{aligned}$$



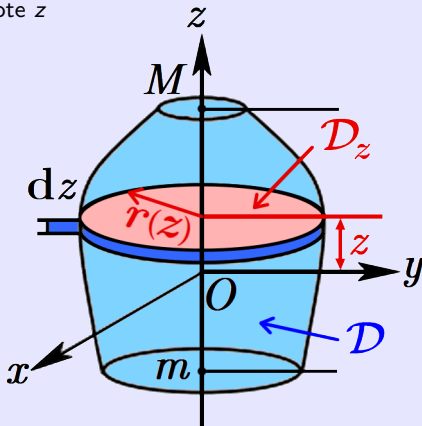
### Application : volume d'un solide de révolution

En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , une courbe engendre un **solide de révolution**  $\mathcal{D}$ .

La coupe de  $\mathcal{D}$  avec le plan horizontal de cote  $z$  est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z)$ .

Le volume de  $\mathcal{D}$  est égal à :

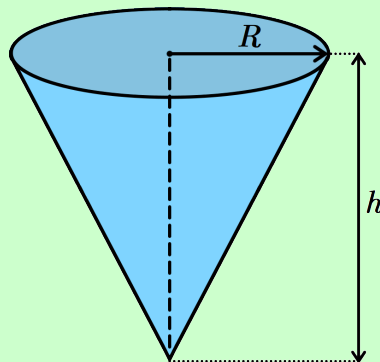
$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz \\ &= \int_{z=m}^{z=M} \left( \iint_{\mathcal{D}_z} dx dy \right) dz \\ &= \int_m^M (\text{Aire}(\mathcal{D}_z)) dz \\ &= \int_m^M \pi r^2(z) dz \end{aligned}$$



**Interprétation** : on découpe le solide  $\mathcal{D}$  en un nombre infini de tranches cylindriques élémentaires d'épaisseur  $dz$  et de volume  $dV(z) = \pi r^2(z) dz$  :  $\text{Volume}(\mathcal{D}) = \int_m^M dV(z)$ .

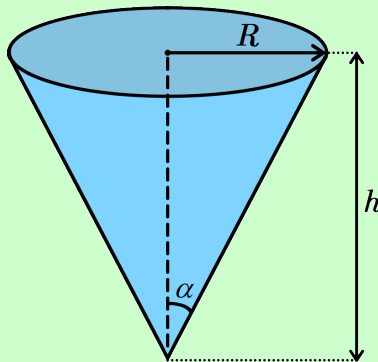
**Exemple 3.7 (Volume d'un cône de révolution)**

Calculons le volume d'un **cône de révolution**  $\mathcal{C}$  de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .



**Exemple 3.7 (Volume d'un cône de révolution)**

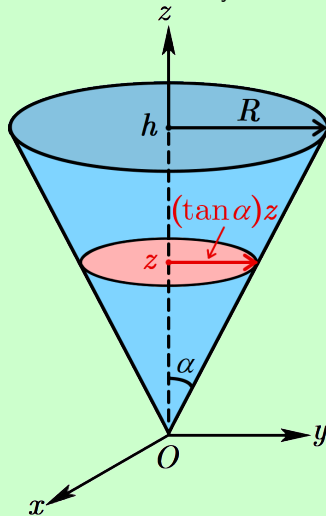
Calculons le volume d'un **cône de révolution**  $\mathcal{C}$  de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .  
Notons  $\alpha$  le demi-angle au sommet.



**Exemple 3.7 (Volume d'un cône de révolution)**

Calculons le volume d'un **cône de révolution**  $\mathcal{C}$  de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .  
Notons  $\alpha$  le demi-angle au sommet.

La coupe de  $\mathcal{C}$  avec le plan horizontal de cote  $z$   
est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z) = (\tan \alpha)z$ .



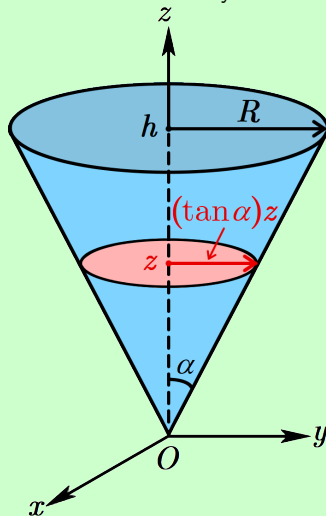
**Exemple 3.7 (Volume d'un cône de révolution)**

Calculons le volume d'un **cône de révolution**  $\mathcal{C}$  de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .  
Notons  $\alpha$  le demi-angle au sommet.

La coupe de  $\mathcal{C}$  avec le plan horizontal de cote  $z$   
est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z) = (\tan \alpha)z$ .

Le volume de  $\mathcal{C}$  est égal à :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{C}) &= \int_0^h (\text{Aire}(\mathcal{D}_z)) dz \\ &= \int_0^h \pi r^2(z) dz \\ &= \frac{\pi}{3} (\tan^2 \alpha) h^3\end{aligned}$$



## Exemple 3.7 (Volume d'un cône de révolution)

Calculons le volume d'un **cône de révolution**  $\mathcal{C}$  de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .  
Notons  $\alpha$  le demi-angle au sommet.

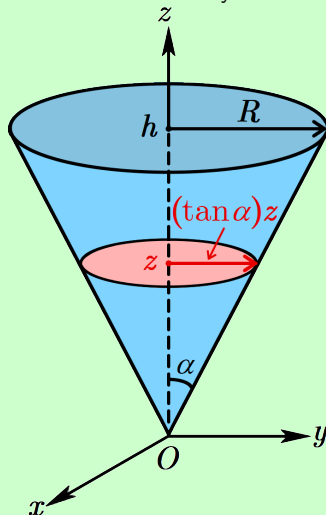
La coupe de  $\mathcal{C}$  avec le plan horizontal de cote  $z$   
est un disque  $\mathcal{D}_z$  de rayon  $r(z) = (\tan \alpha)z$ .

Le volume de  $\mathcal{C}$  est égal à :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{C}) &= \int_0^h (\text{Aire}(\mathcal{D}_z)) dz \\ &= \int_0^h \pi r^2(z) dz \\ &= \frac{\pi}{3} (\tan^2 \alpha) h^3\end{aligned}$$

Or  $R = (\tan \alpha)h$ , d'où :

$$\text{Volume}(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{3} R^2 h$$





### Volume élémentaire

- Si les nouvelles variables sont  $(u, v, w) \in \Delta$  au lieu de  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ , alors l'expression  $f(x, y, z)$  devient une expression de la forme  $g(u, v, w)$ .

### Volume élémentaire

- Si les nouvelles variables sont  $(u, v, w) \in \Delta$  au lieu de  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ , alors l'expression  $f(x, y, z)$  devient une expression de la forme  $g(u, v, w)$ .
- Le **déplacement élémentaire**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$  issu du point  $M$  génère un **parallélépipède élémentaire** dont les arêtes sont construites selon les trois déplacements élémentaires  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du$ ,  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$ .

## Volume élémentaire

- Si les nouvelles variables sont  $(u, v, w) \in \Delta$  au lieu de  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ , alors l'expression  $f(x, y, z)$  devient une expression de la forme  $g(u, v, w)$ .
- Le **déplacement élémentaire**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$  issu du point  $M$  génère un **parallélépipède élémentaire** dont les arêtes sont construites selon les trois déplacements élémentaires  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du$ ,  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$ .
- Le volume de ce parallélépipède est donné par le produit mixte

$$\left| \left( \left( \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw \right) \right) \right|$$

### Volume élémentaire

- Si les nouvelles variables sont  $(u, v, w) \in \Delta$  au lieu de  $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ , alors l'expression  $f(x, y, z)$  devient une expression de la forme  $g(u, v, w)$ .
- Le **déplacement élémentaire**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$  issu du point  $M$  génère un **parallélépipède élémentaire** dont les arêtes sont construites selon les trois déplacements élémentaires  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du$ ,  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$ .
- Le volume de ce parallélépipède est donné par le produit mixte

$$\left| \left( \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw \right) \right|$$

### Théorème 3.8 (Changement de variables)

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} g(u, v, w) \left| \left( \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} \right) \right| du dv dw$$

## Volume élémentaire en cylindriques

Partant du vecteur déplacement

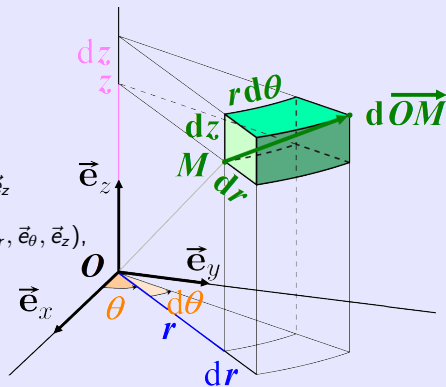
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (rd\theta)\vec{e}_\theta + (dz)\vec{e}_z$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ,  
on en tire le **volume élémentaire** :

$$dV = r dr d\theta dz$$



## Volume élémentaire en cylindriques

Partant du vecteur déplacement

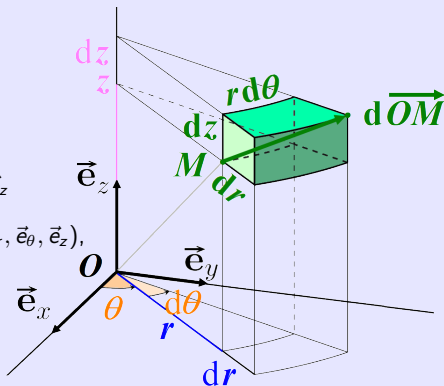
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (dr)\vec{e}_r + (rd\theta)\vec{e}_\theta + (dz)\vec{e}_z$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ,  
on en tire le **volume élémentaire** :

$$dV = r dr d\theta dz$$



## Théorème 3.9 (En coordonnées cylindriques)

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

## Volume élémentaire en sphériques

Partant du vecteur déplacement

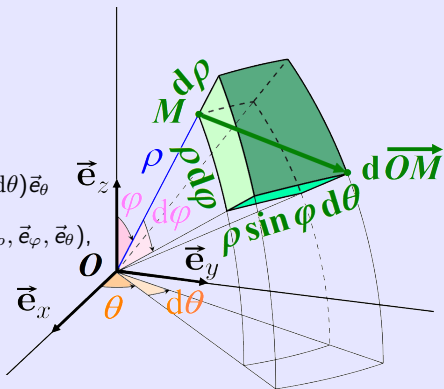
$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (d\rho)\vec{e}_\rho + (\rho d\varphi)\vec{e}_\varphi + (\rho \sin \varphi d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ ,  
on en tire le **volume élémentaire** :

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$



## Volume élémentaire en sphériques

Partant du vecteur déplacement

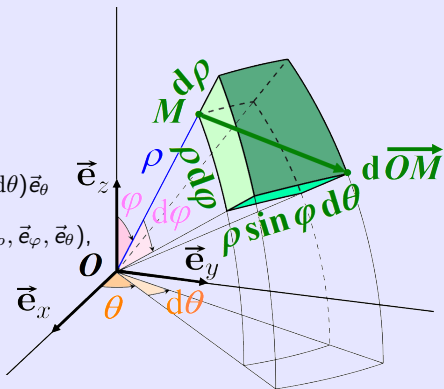
$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = (d\rho)\vec{e}_\rho + (\rho d\varphi)\vec{e}_\varphi + (\rho \sin \varphi d\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ ,  
on en tire le **volume élémentaire** :

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$



## Théorème 3.10 (En coordonnées sphériques)

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$



**Exemple 3.11 (Volume d'une boule)**

Le volume de la boule  $\mathcal{B}$  de rayon  $R$  se calcule facilement en coordonnées sphériques :

**Exemple 3.11 (Volume d'une boule)**

Le volume de la boule  $\mathcal{B}$  de rayon  $R$  se calcule facilement en coordonnées sphériques :

$$V = \iiint_{\mathcal{B}} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \, d\rho) (d\theta) (\sin \varphi \, d\varphi)$$

**Exemple 3.11 (Volume d'une boule)**

Le volume de la boule  $\mathcal{B}$  de rayon  $R$  se calcule facilement en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{B}} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \, d\rho) (d\theta) (\sin \varphi \, d\varphi) \\ &= \left( \int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) \times \left( \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = 2 \times 2\pi \times \frac{1}{3} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

**Exemple 3.11 (Volume d'une boule)**

Le volume de la boule  $\mathcal{B}$  de rayon  $R$  se calcule facilement en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{B}} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \, d\rho) (d\theta) (\sin \varphi \, d\varphi) \\ &= \left( \int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) \times \left( \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = 2 \times 2\pi \times \frac{1}{3} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

**Résumé des changements de variables usuels (2D/3D)**

$$\begin{aligned} dS &= dx dy && \text{(cartésiennes)} \\ &= r \, d\rho d\theta && \text{(polaires)} \end{aligned}$$

**Exemple 3.11 (Volume d'une boule)**

Le volume de la boule  $\mathcal{B}$  de rayon  $R$  se calcule facilement en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{B}} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \, d\rho) (d\theta) (\sin \varphi \, d\varphi) \\ &= \left( \int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) \times \left( \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = 2 \times 2\pi \times \frac{1}{3} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

**Résumé des changements de variables usuels (2D/3D)**

$$\begin{aligned} dS &= dx dy && \text{(cartésiennes)} \\ &= r \, d\rho d\theta && \text{(polaires)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz && \text{(cartésiennes)} \\ &= r \, dr d\theta dz && \text{(cylindriques)} \\ &= \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\theta d\varphi && \text{(sphériques)} \end{aligned}$$

## Notions à retenir

- Intégrales doubles et triples
  - ★ Interprétation géométrique
  - ★ Maîtrise du calcul analytique :
    - \* intégrations successives (théorème de Fubini)
    - \* changements de variables (polaires, cylindriques, sphériques)
  - ★ Utilisation en géométrie et en physique

# Annexes

- Quelques exercices
- Valeur moyenne
- Intégrale curviligne/surfacique
- Applications à la géométrie des masses

- 4 Annexe A – Quelques exercices
  - Calcul par intégrations successives
  - Changement de variable
- 5 Annexe B – Valeur moyenne
- 6 Annexe C – Intégrale curviligne/surfacique
- 7 Annexe D – Applications à la géométrie des masses



**Exercice A.1 (Domaine triangulaire)**

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

---

**Exercice A.1 (Domaine triangulaire)**

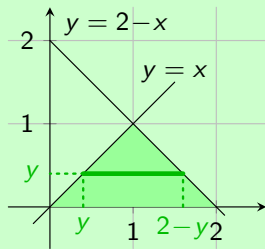
Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

**Solution**

*Première méthode : intégration en  $x$  puis en  $y$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y \leq x \leq 2 - y\}$$



**Exercice A.1 (Domaine triangulaire)**

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

**Solution**

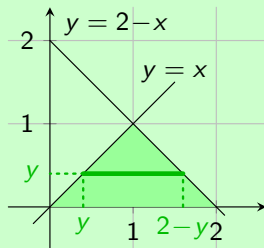
*Première méthode : intégration en  $x$  puis en  $y$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y \leq x \leq 2 - y\}$$

Le théorème de Fubini donne

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=y}^{x=2-y} y \, dx \right) dy$$



## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

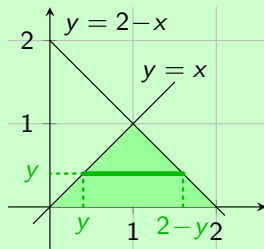
Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

*Première méthode : intégration en  $x$  puis en  $y$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y \leq x \leq 2 - y\}$$



Le théorème de Fubini donne

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=y}^{x=2-y} y \, dx \right) dy = \int_0^1 [xy]_{x=y}^{x=2-y} dy$$

## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

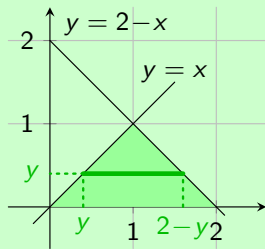
Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

*Première méthode : intégration en  $x$  puis en  $y$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y \leq x \leq 2 - y\}$$



Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=y}^{x=2-y} y \, dx \right) dy = \int_0^1 [xy]_{x=y}^{x=2-y} dy \\ &= \int_0^1 (2y - y^2) dy \end{aligned}$$

## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

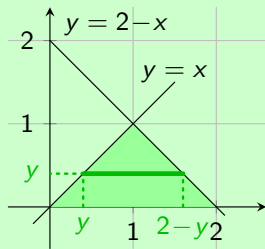
Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

*Première méthode : intégration en  $x$  puis en  $y$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y \leq x \leq 2 - y\}$$



Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=y}^{x=2-y} y \, dx \right) dy = \int_0^1 [xy]_{x=y}^{x=2-y} dy \\ &= \int_0^1 (2y - y^2) dy = \left[ y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

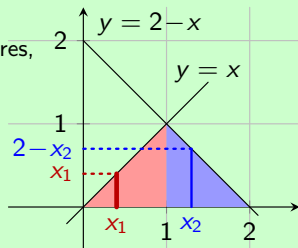
*Deuxième méthode : intégration en y puis en x*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières, il se décompose selon  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  où

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

avec  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ .



## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

*Deuxième méthode : intégration en  $y$  puis en  $x$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières, il se décompose selon  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  où

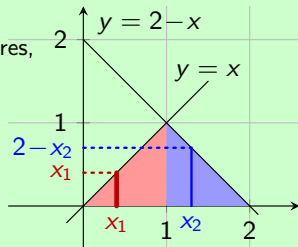
$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

avec  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ .

La relation de Chasles et le théorème de Fubini donnent

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=x} y \, dy \right) dx + \int_{x=1}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=2-x} y \, dy \right) dx$$





## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

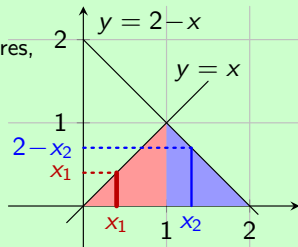
*Deuxième méthode : intégration en  $y$  puis en  $x$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières, il se décompose selon  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  où

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

avec  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ .



La relation de Chasles et le théorème de Fubini donnent

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=x} y \, dy \right) dx + \int_{x=1}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=2-x} y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx + \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \end{aligned}$$

## Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$  sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$ .

## Solution

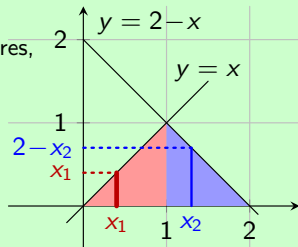
*Deuxième méthode : intégration en  $y$  puis en  $x$*

$\mathcal{D}$  est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières, il se décompose selon  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  où

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

avec  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ .



La relation de Chasles et le théorème de Fubini donnent

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=x} y \, dy \right) dx + \int_{x=1}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=2-x} y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx + \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \, dx + \int_1^2 \frac{1}{2} (2-x)^2 \, dx = \left[ \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{6} (2-x)^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Exercice A.2 (Domaine rectangulaire)**

Calculer  $J = \iint_{\mathcal{R}} x e^{x+y} dx dy$  sur le rectangle  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

---

**Exercice A.2 (Domaine rectangulaire)**

Calculer  $J = \iint_{\mathcal{R}} x e^{x+y} dx dy$  sur le rectangle  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solution**

La fonction à intégrer est à variables séparables. L'intégrale double est donc le produit de deux intégrales simples :

$$J = \int_0^1 x e^x dx \times \int_0^1 e^y dy = 1 \times (e - 1)$$

(à l'aide d'une intégration par parties pour la première intégrale).

**Exercice A.2 (Domaine rectangulaire)**

Calculer  $J = \iint_{\mathcal{R}} x e^{x+y} dx dy$  sur le rectangle  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solution**

La fonction à intégrer est à variables séparables. L'intégrale double est donc le produit de deux intégrales simples :

$$J = \int_0^1 x e^x dx \times \int_0^1 e^y dy = 1 \times (e - 1)$$

(à l'aide d'une intégration par parties pour la première intégrale).

**Exercice A.3 (Domaine rectangulaire)**

Calculer  $K = \iint_{\mathcal{R}} (x + y)^2 dx dy$  sur le domaine  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$ .

**Exercice A.2 (Domaine rectangulaire)**

Calculer  $J = \iint_{\mathcal{R}} x e^{x+y} dx dy$  sur le rectangle  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solution**

La fonction à intégrer est à variables séparables. L'intégrale double est donc le produit de deux intégrales simples :

$$J = \int_0^1 x e^x dx \times \int_0^1 e^y dy = 1 \times (e - 1)$$

(à l'aide d'une intégration par parties pour la première intégrale).

**Exercice A.3 (Domaine rectangulaire)**

Calculer  $K = \iint_{\mathcal{R}} (x + y)^2 dx dy$  sur le domaine  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$ .

**Solution**

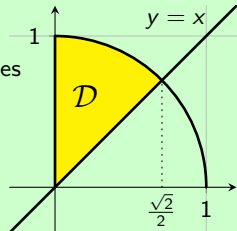
On peut intégrer en  $x$  puis  $y$ , ou  $y$  puis  $x$ . Par exemple

$$\begin{aligned} K &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} (x + y)^2 dx dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} (x + y)^3 \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} ((x + 2)^3 - x^3) dx = \left[ \frac{1}{12} ((x + 2)^4 - x^4) \right]_0^1 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

## Exercice A.4 (Domaine circulaire)

Soit  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

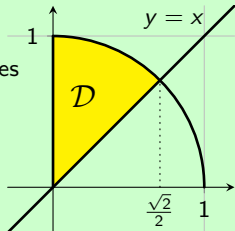
Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  à l'aide des coordonnées cartésiennes puis des coordonnées polaires.



## Exercice A.4 (Domaine circulaire)

Soit  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  à l'aide des coordonnées cartésiennes puis des coordonnées polaires.



## Solution

- **En cartésien** (pas adapté!) :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ .

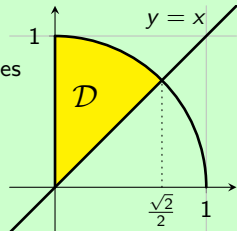
$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} \int_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} x [y]_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}/2} (x\sqrt{1-x^2} - x^2) \, dx = \left[ -\frac{1}{3} \left( (1-x^2)^{3/2} + x^3 \right) \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}
 \end{aligned}$$



## Exercice A.4 (Domaine circulaire)

Soit  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  à l'aide des coordonnées cartésiennes puis des coordonnées polaires.



## Solution

- **En cartésien** (pas adapté!) :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} \int_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} x [y]_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} (x\sqrt{1-x^2} - x^2) \, dx = \left[ -\frac{1}{3} \left( (1-x^2)^{3/2} + x^3 \right) \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

- **En polaire** (bien adapté!) :  $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

$$I = \iint_{\Delta} (r \cos \theta) (r \, dr \, d\theta) = \left( \int_0^1 r^2 \, dr \right) \times \left( \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

- 4 Annexe A – Quelques exercices
- 5 **Annexe B – Valeur moyenne**
- 6 Annexe C – Intégrale curviligne/surfacique
- 7 Annexe D – Applications à la géométrie des masses

Définition B.1 (Valeur moyenne de  $f$ )

- **Cas 1D** : pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Définition B.1 (Valeur moyenne de  $f$ )

- **Cas 1D** : pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- **Cas 2D** : pour une fonction  $f$  continue sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$$

Définition B.1 (Valeur moyenne de  $f$ )

- **Cas 1D** : pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- **Cas 2D** : pour une fonction  $f$  continue sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$$

- **Cas 3D** : pour une fonction  $f$  continue sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{\text{Volume}(\mathcal{D})} \iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Définition B.1 (Valeur moyenne de  $f$ )

- **Cas 1D** : pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- **Cas 2D** : pour une fonction  $f$  continue sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$$

- **Cas 3D** : pour une fonction  $f$  continue sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  est le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{\text{Volume}(\mathcal{D})} \iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$$

## Remarque B.2 (Moyenne arithmétique)

La notion de valeur moyenne généralise celle de **moyenne arithmétique** en statistiques : pour une suite de nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la **moyenne arithmétique** est le nombre

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

- 4 Annexe A – Quelques exercices
- 5 Annexe B – Valeur moyenne
- 6 Annexe C – Intégrale curviligne/surfacique
  - Champs scalaires/vectoriels
  - Intégrale curviligne
  - Intégrale de surface
- 7 Annexe D – Applications à la géométrie des masses

**Définition C.1 (Champ scalaire)**

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Un **champ scalaire**  $F$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **nombre** (ou **scalaire**) :

$$\begin{array}{ccc} F : U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & F(M) \end{array}$$



**Définition C.1 (Champ scalaire)**

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Un **champ scalaire**  $F$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **nombre** (ou **scalaire**) :

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto F(M) \end{aligned}$$

**Définition C.2 (Champ vectoriel)**

- Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 2$  ou  $3$ .

Un **champ vectoriel**  $\vec{F}$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **vecteur** de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M &\longmapsto \vec{F}(M) \end{aligned}$$

### Définition C.1 (Champ scalaire)

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Un **champ scalaire**  $F$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **nombre** (ou **scalaire**) :

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto F(M) \end{aligned}$$

### Définition C.2 (Champ vectoriel)

- Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 2$  ou  $3$ .  
Un **champ vectoriel**  $\vec{F}$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **vecteur** de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M &\longmapsto \vec{F}(M) \end{aligned}$$

- Lorsque l'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni d'un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , la donnée d'un champ vectoriel sur  $\mathbb{R}^3$  équivaut à la donnée de trois champs scalaires  $P, Q, R$  :

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{e}_x + Q(M)\vec{e}_y + R(M)\vec{e}_z$$

### Définition C.1 (Champ scalaire)

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Un **champ scalaire**  $F$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **nombre** (ou **scalaire**) :

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto F(M) \end{aligned}$$

### Définition C.2 (Champ vectoriel)

- Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n = 2$  ou  $3$ .

Un **champ vectoriel**  $\vec{F}$  est une application qui à tout **point**  $M \in U$  associe un **vecteur** de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M &\longmapsto \vec{F}(M) \end{aligned}$$

- Lorsque l'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni d'un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , la donnée d'un champ vectoriel sur  $\mathbb{R}^3$  équivaut à la donnée de trois champs scalaires  $P, Q, R$  :

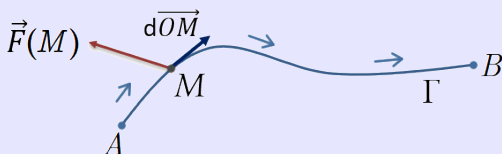
$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{e}_x + Q(M)\vec{e}_y + R(M)\vec{e}_z$$

On lui associe naturellement la **forme différentielle** suivante :

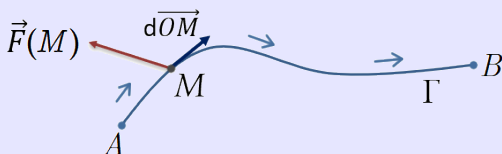
$$\omega_M = \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz$$

ou en abrégé :  $\omega = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = Pdx + Qdy + Rdz$

Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et  $\Gamma$  une courbe orientée d'extrémités des points  $A$  et  $B$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  contenue dans  $U$ .



Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et  $\Gamma$  une courbe orientée d'extrémités des points  $A$  et  $B$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  contenue dans  $U$ .



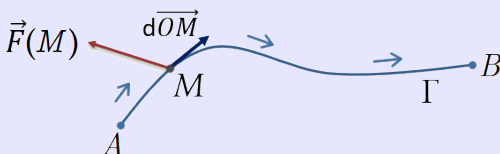
### Définition C.3 (Intégrale curviligne/Circulation)

La **circulation** du champ vectoriel  $\vec{F}$  le long de l'arc de courbe  $\Gamma$  parcouru de  $A$  à  $B$  est égale à l'**intégrale curviligne** de la forme différentielle  $\omega_M = \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM}$  :

$$C_\Gamma = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_{\widehat{AB}} \omega$$

On parle d'intégrale **curviligne** car on intègre le long d'une courbe.

Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et  $\Gamma$  une courbe orientée d'extrémités des points  $A$  et  $B$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  contenue dans  $U$ .



### Définition C.3 (Intégrale curviligne/Circulation)

La **circulation** du champ vectoriel  $\vec{F}$  le long de l'arc de courbe  $\Gamma$  parcouru de  $A$  à  $B$  est égale à l'**intégrale curviligne** de la forme différentielle  $\omega_M = \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM}$  :

$$C_\Gamma = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_{\widehat{AB}} \omega$$

On parle d'intégrale **curviligne** car on intègre le long d'une courbe.

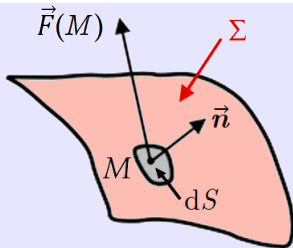
### Théorème C.4 (Calcul)

Si la courbe  $\Gamma$  est définie par une paramétrisation  $t \in [a, b] \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  et le champ  $\vec{F}$  est donné par  $\vec{F}(M) = P(M)\vec{e}_x + Q(M)\vec{e}_y + R(M)\vec{e}_z$ , la circulation  $C_\Gamma$  se calcule selon :

$$C_\Gamma = \int_a^b \vec{F}(M(t)) \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt}(t) dt = \int_a^b [P(M(t))x'(t) + Q(M(t))y'(t) + R(M(t))z'(t)] dt$$

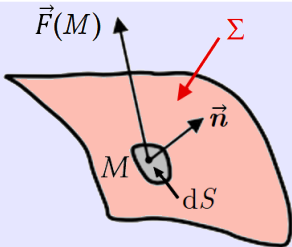
Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  
 $\Sigma$  une surface orientée.

On note  $dS$  la petite surface élémentaire autour de  $M$ ,  
 $\vec{n}$  un vecteur normal **unitaire** définissant l'orientation.  
On pose alors  $\vec{dS} = (dS)\vec{n}$ .



Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma$  une surface orientée.

On note  $dS$  la petite surface élémentaire autour de  $M$ ,  $\vec{n}$  un vecteur normal **unitaire** définissant l'orientation. On pose alors  $\vec{dS} = (dS)\vec{n}$ .



### Définition C.5 (Intégrale de surface/Flux)

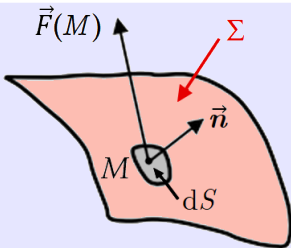
Le **flux** du champ vectoriel  $\vec{F}$  à travers la surface orientée  $\Sigma$  est défini par l'**intégrale de surface** :

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{dS}(M) = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS}$$



Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  
 $\Sigma$  une surface orientée.

On note  $dS$  la petite surface élémentaire autour de  $M$ ,  
 $\vec{n}$  un vecteur normal **unitaire** définissant l'orientation.  
 On pose alors  $\vec{dS} = (dS)\vec{n}$ .



### Définition C.5 (Intégrale de surface/Flux)

Le **flux** du champ vectoriel  $\vec{F}$  à travers la surface orientée  $\Sigma$  est défini par l'**intégrale de surface** :

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{dS}(M) = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS}$$

### Théorème C.6 (Calcul)

Si  $\Sigma$  est définie par une paramétrisation  $(u, v) \in \Delta \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  
 le flux  $\Phi_{\Sigma}$  se calcule selon :

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Delta} \vec{F}(M(u, v)) \cdot \vec{dS}(u, v) \quad \text{avec} \quad \vec{dS}(u, v) = \left( \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(u, v) \right) du dv$$

- 4 Annexe A – Quelques exercices
- 5 Annexe B – Valeur moyenne
- 6 Annexe C – Intégrale curviligne/surfacique
- 7 Annexe D – Applications à la géométrie des masses
  - Masse
  - Centre d'inertie
  - Moment d'inertie

## Objet à différentes échelles

- ① **Échelle atomique** : il y a de l'espace entre la matière. La répartition des masses est **discrète** et la masse d'un objet  $\mathcal{D}$  est

$$M = \sum_{\text{particules} \in \mathcal{D}} m_{\text{particules}}$$

## Objet à différentes échelles

- ① **Échelle atomique** : il y a de l'espace entre la matière. La répartition des masses est **discrète** et la masse d'un objet  $\mathcal{D}$  est

$$M = \sum_{particules \in \mathcal{D}} m_{particules}$$

→ non calculable en pratique.

## Objet à différentes échelles

- ① **Échelle atomique** : il y a de l'espace entre la matière. La répartition des masses est **discrète** et la masse d'un objet  $\mathcal{D}$  est

$$M = \sum_{\text{particules} \in \mathcal{D}} m_{\text{particules}}$$

→ non calculable en pratique.

- ② **Échelle intermédiaire** : la matière n'est plus considérée comme **discrète** mais **continue**. Autour de chaque point  $P$  de l'objet, la répartition des masses est considérée comme homogène et symboliquement

$$M = \int_{P \in \mathcal{D}} dm(P)$$

(« somme continue » de toutes les « petites masses élémentaires » ).

### Masse volumique d'un solide homogène

La **masse volumique** ou **densité volumique** d'un solide est la masse par unité de volume (référence 1 pour l'eau : 1 litre d'eau pèse 1 kg) :

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$$

donc

$$\boxed{M = \rho V}$$

### Masse volumique d'un solide homogène

La **masse volumique** ou **densité volumique** d'un solide est la masse par unité de volume (référence 1 pour l'eau : 1 litre d'eau pèse 1 kg) :

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$$

donc

$$\boxed{M = \rho V}$$

### Masse volumique d'un solide non homogène

La **densité volumique** est définie localement en tout point  $P$  par  $\rho(P)$ . Un bout infinitésimal du solide autour du point  $P$  aura donc une densité volumique

$$\rho(P) = \frac{dm(P)}{dV}$$

### Masse volumique d'un solide homogène

La **masse volumique** ou **densité volumique** d'un solide est la masse par unité de volume (référence 1 pour l'eau : 1 litre d'eau pèse 1 kg) :

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$$

donc

$$\boxed{M = \rho V}$$

### Masse volumique d'un solide non homogène

La **densité volumique** est définie localement en tout point  $P$  par  $\rho(P)$ . Un bout infinitésimal du solide autour du point  $P$  aura donc une densité volumique

$$\rho(P) = \frac{dm(P)}{dV}$$

Dans ce cas :

$$\boxed{M = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) dV}$$



### Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

## Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Gamma$  de masse linéique  $\lambda$  :

Homogène :  $M = \lambda L$

Non homogène :  $M = \int_{\Gamma} \lambda(P) d\ell$

## Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Gamma$  de masse linéique  $\lambda$  :

Homogène : $M = \lambda L$	Non homogène : $M = \int_{\Gamma} \lambda(P) d\ell$
----------------------------	---

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire  $S$  (portion de surface  $\Sigma$ ), on parle de masse ou densité **surfactive** et un morceau infinitésimal est  $dS$ .

## Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Gamma$  de masse linéique  $\lambda$  :

Homogène : $M = \lambda L$	Non homogène : $M = \int_{\Gamma} \lambda(P) d\ell$
----------------------------	---

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire  $S$  (portion de surface  $\Sigma$ ), on parle de masse ou densité **surfactive** et un morceau infinitésimal est  $dS$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Sigma$  de masse surfactive  $\sigma$  :

Homogène : $M = \sigma S$	Non homogène : $M = \iint_{\Sigma} \sigma(P) dS$
---------------------------	--

## Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Gamma$  de masse linéique  $\lambda$  :

Homogène : $M = \lambda L$	Non homogène : $M = \int_{\Gamma} \lambda(P) d\ell$
----------------------------	---

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire  $S$  (portion de surface  $\Sigma$ ), on parle de masse ou densité **surfactive** et un morceau infinitésimal est  $dS$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Sigma$  de masse surfactive  $\sigma$  :

Homogène : $M = \sigma S$	Non homogène : $M = \iint_{\Sigma} \sigma(P) dS$
---------------------------	--

### Exemple D.1 (Masse d'un cube)

Le cube  $\mathcal{C}$  est défini par les inégalités  $0 \leq x, y, z \leq 2$  et de densité volumique donnée par  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1} \text{ Kg.m}^{-3}$ . Calculons sa masse.

## Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Gamma$  de masse linéique  $\lambda$  :

Homogène : $M = \lambda L$	Non homogène : $M = \int_{\Gamma} \lambda(P) d\ell$
----------------------------	---

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire  $S$  (portion de surface  $\Sigma$ ), on parle de masse ou densité **surfactive** et un morceau infinitésimal est  $dS$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Sigma$  de masse surfactive  $\sigma$  :

Homogène : $M = \sigma S$	Non homogène : $M = \iint_{\Sigma} \sigma(P) dS$
---------------------------	--

### Exemple D.1 (Masse d'un cube)

Le cube  $\mathcal{C}$  est défini par les inégalités  $0 \leq x, y, z \leq 2$  et de densité volumique donnée par  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1} \text{ Kg.m}^{-3}$ . Calculons sa masse.

$$M = \iiint_{\mathcal{C}} \rho(P) dV = \iiint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1} dx dy dz = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{z+1} dx dy dz$$

## Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur  $L$  (portion de courbe  $\Gamma$ ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est  $d\ell$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Gamma$  de masse linéique  $\lambda$  :

Homogène : $M = \lambda L$	Non homogène : $M = \int_{\Gamma} \lambda(P) d\ell$
----------------------------	---

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire  $S$  (portion de surface  $\Sigma$ ), on parle de masse ou densité **surfactive** et un morceau infinitésimal est  $dS$ .

Masse  $M$  d'un solide  $\Sigma$  de masse surfactive  $\sigma$  :

Homogène : $M = \sigma S$	Non homogène : $M = \iint_{\Sigma} \sigma(P) dS$
---------------------------	--

### Exemple D.1 (Masse d'un cube)

Le cube  $\mathcal{C}$  est défini par les inégalités  $0 \leq x, y, z \leq 2$  et de densité volumique donnée par  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1} \text{ Kg.m}^{-3}$ . Calculons sa masse.

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_{\mathcal{C}} \rho(P) dV = \iiint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1} dx dy dz = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{z+1} dx dy dz \\
 &= \left( \int_0^2 dx \right) \left( \int_0^2 dy \right) \left( \int_0^2 \frac{1}{z+1} dz \right) = 2 \times 2 \times [\ln(|z+1|)]_0^2 = (4 \ln 3) \text{ kg}
 \end{aligned}$$

**Définition D.2 (Centre d'inertie : cas discret)**

Le **centre d'inertie** d'un objet assimilé à un ensemble de  $n$  points  $P_i$  de masse  $m_i$  est le barycentre des  $(P_i, m_i)$ . On le nomme aussi **centre de masse**, ou **centre de gravité** si le champ de gravité est uniforme. Il est donc défini par

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i} \quad \text{avec} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$



**Définition D.2 (Centre d'inertie : cas discret)**

Le **centre d'inertie** d'un objet assimilé à un ensemble de  $n$  points  $P_i$  de masse  $m_i$  est le barycentre des  $(P_i, m_i)$ . On le nomme aussi **centre de masse**, ou **centre de gravité** si le champ de gravité est uniforme. Il est donc défini par

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i} \quad \text{avec} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

En projetant cette relation vectorielle sur chacun des trois axes (on passe aux coordonnées), on obtient ses coordonnées :

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ y_G &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \\ z_G &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i \end{aligned}}$$

**Définition D.3 (Centre d'inertie : cas continu)**

Dans le cas continu : le **centre d'inertie** d'un solide  $\mathcal{D}$  de masse  $M$  et de masse volumique  $\rho$  est le point  $G$  défini par

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{OP} \rho(P) dV} \quad \text{avec} \quad M = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

**Définition D.3 (Centre d'inertie : cas continu)**

Dans le cas continu : le **centre d'inertie** d'un solide  $\mathcal{D}$  de masse  $M$  et de masse volumique  $\rho$  est le point  $G$  défini par

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{OP} \rho(P) dV} \quad \text{avec} \quad M = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

De même cette relation vectorielle se traduit en projetant sur chaque axe par :

**Définition D.3 (Centre d'inertie : cas continu)**

Dans le cas continu : le **centre d'inertie** d'un solide  $\mathcal{D}$  de masse  $M$  et de masse volumique  $\rho$  est le point  $G$  défini par

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{OP} \rho(P) dV} \quad \text{avec} \quad M = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

De même cette relation vectorielle se traduit en projetant sur chaque axe par :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

L'étude des symétries permet de simplifier l'étude du centre d'inertie.

### Propriété D.4 (Plan de symétrie)

*Si l'objet  $\mathcal{D}$  et sa distribution de masses admettent un plan de symétrie  $\mathcal{P}$ , alors le centre d'inertie  $G$  appartient à  $\mathcal{P}$ .*

L'étude des symétries permet de simplifier l'étude du centre d'inertie.

### Propriété D.4 (Plan de symétrie)

*Si l'objet  $\mathcal{D}$  et sa distribution de masses admettent un plan de symétrie  $\mathcal{P}$ , alors le centre d'inertie  $G$  appartient à  $\mathcal{P}$ .*

### Exemple D.5 (Centre d'inertie d'une sphère)

Le centre d'inertie d'une sphère homogène est son centre car elle admet une infinité de plans de symétries passant tous par le centre.

L'étude des symétries permet de simplifier l'étude du centre d'inertie.

### Propriété D.4 (Plan de symétrie)

*Si l'objet  $\mathcal{D}$  et sa distribution de masses admettent un plan de symétrie  $\mathcal{P}$ , alors le centre d'inertie  $G$  appartient à  $\mathcal{P}$ .*

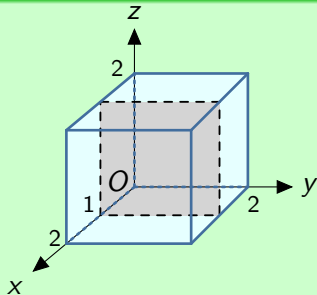
### Exemple D.5 (Centre d'inertie d'une sphère)

Le centre d'inertie d'une sphère homogène est son centre car elle admet une infinité de plans de symétries passant tous par le centre.

### Exemple D.6 (Centre d'inertie d'un cube)

Le cube de l'exemple D.1 est symétrique par rapport au plan d'équation  $x = 1$ .

Sa distribution de masses  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1}$  aussi.  
Donc son centre d'inertie est dans le plan  $x = 1$ .



### Exercice D.7 (Centre d'inertie d'un cube)

Déterminer le centre d'inertie  $G$  du cube  $\mathcal{C}$  de l'exemple [D.1](#).

---

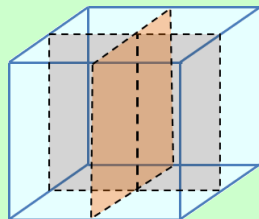


### Exercice D.7 (Centre d'inertie d'un cube)

Déterminer le centre d'inertie  $G$  du cube  $\mathcal{C}$  de l'exemple [D.1](#).

#### Solution

- $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont symétriques par rapport au plan  $x = 1$  donc  $x_G = 1$ .
- $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont symétriques par rapport au plan  $y = 1$  donc  $y_G = 1$ .

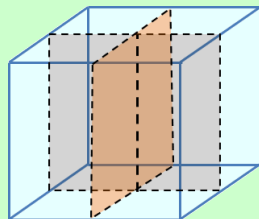


### Exercice D.7 (Centre d'inertie d'un cube)

Déterminer le centre d'inertie  $G$  du cube  $\mathcal{C}$  de l'exemple D.1.

#### Solution

- $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont symétriques par rapport au plan  $x = 1$  donc  $x_G = 1$ .
- $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont symétriques par rapport au plan  $y = 1$  donc  $y_G = 1$ .
- Calcul explicite :



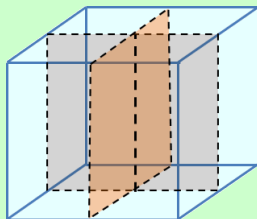
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{C}} z \frac{1}{z+1} dx dy dz = \frac{1}{4 \ln 3} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{z}{z+1} dx dy dz$$

## Exercice D.7 (Centre d'inertie d'un cube)

Déterminer le centre d'inertie  $G$  du cube  $\mathcal{C}$  de l'exemple D.1.

### Solution

- $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont symétriques par rapport au plan  $x = 1$  donc  $x_G = 1$ .
- $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont symétriques par rapport au plan  $y = 1$  donc  $y_G = 1$ .
- Calcul explicite :



$$\begin{aligned}
 z_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{C}} z \frac{1}{z+1} dx dy dz = \frac{1}{4 \ln 3} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{z}{z+1} dx dy dz \\
 &= \frac{1}{4 \ln 3} \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 \frac{(z+1) - 1}{z+1} dz = \frac{1}{\ln 3} [z - \ln |z+1|]_0^2 \\
 &= \frac{2 - \ln 3}{\ln 3} \simeq 0,82
 \end{aligned}$$

Le **moment d'inertie**  $J_{\Delta}$  d'un solide  $\mathcal{D}$  par rapport à un axe  $\Delta$  caractérise sa distribution de masse autour de  $\Delta$ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe  $\Delta$ .

Le **moment d'inertie**  $J_{\Delta}$  d'un solide  $\mathcal{D}$  par rapport à un axe  $\Delta$  caractérise sa distribution de masse autour de  $\Delta$ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe  $\Delta$ .

### Définition D.8 (Moment d'inertie)

- ① **Cas discret** : pour un solide constitué de  $n$  point  $P_i$  de masse  $m_i$  à une distance  $r_i$  d'un axe  $\Delta$ ,  $J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$ .

Le **moment d'inertie**  $J_{\Delta}$  d'un solide  $\mathcal{D}$  par rapport à un axe  $\Delta$  caractérise sa distribution de masse autour de  $\Delta$ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe  $\Delta$ .

### Définition D.8 (Moment d'inertie)

① **Cas discret** : pour un solide constitué de  $n$  point  $P_i$  de masse  $m_i$  à une distance  $r_i$  d'un axe  $\Delta$ ,  $J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$ .

② **Cas continu** : pour un solide de densité  $\rho$  telle que  $dm(P) = \rho(P) dV$ ,

$$J_{\Delta} = \iiint_{\mathcal{D}} r^2(P) dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) r^2(P) dV$$

Il dépend de la masse et du carré de la distance par rapport à l'axe de rotation.

Le **moment d'inertie**  $J_\Delta$  d'un solide  $\mathcal{D}$  par rapport à un axe  $\Delta$  caractérise sa distribution de masse autour de  $\Delta$ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe  $\Delta$ .

### Définition D.8 (Moment d'inertie)

① **Cas discret** : pour un solide constitué de  $n$  point  $P_i$  de masse  $m_i$  à une distance  $r_i$  d'un axe  $\Delta$ ,  $J_\Delta = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$ .

② **Cas continu** : pour un solide de densité  $\rho$  telle que  $dm(P) = \rho(P) dV$ ,

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{D}} r^2(P) dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) r^2(P) dV$$

Il dépend de la masse et du carré de la distance par rapport à l'axe de rotation.

### Remarque D.9

- Comme  $r$  représente la distance par rapport à l'axe de rotation, on utilisera fréquemment les coordonnées cylindriques.

Le **moment d'inertie**  $J_\Delta$  d'un solide  $\mathcal{D}$  par rapport à un axe  $\Delta$  caractérise sa distribution de masse autour de  $\Delta$ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe  $\Delta$ .

### Définition D.8 (Moment d'inertie)

① **Cas discret** : pour un solide constitué de  $n$  point  $P_i$  de masse  $m_i$  à une distance  $r_i$  d'un axe  $\Delta$ ,  $J_\Delta = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$ .

② **Cas continu** : pour un solide de densité  $\rho$  telle que  $dm(P) = \rho(P) dV$ ,

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{D}} r^2(P) dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) r^2(P) dV$$

Il dépend de la masse et du carré de la distance par rapport à l'axe de rotation.

### Remarque D.9

- Comme  $r$  représente la distance par rapport à l'axe de rotation, on utilisera fréquemment les coordonnées cylindriques.
- On peut de même définir le moment d'inertie  $J_O$  par rapport à un point  $O$  en prenant la distance par rapport à  $O$ .



Le **moment d'inertie**  $J_\Delta$  d'un solide  $\mathcal{D}$  par rapport à un axe  $\Delta$  caractérise sa distribution de masse autour de  $\Delta$ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe  $\Delta$ .

### Définition D.8 (Moment d'inertie)

① **Cas discret** : pour un solide constitué de  $n$  point  $P_i$  de masse  $m_i$  à une distance  $r_i$  d'un axe  $\Delta$ ,  $J_\Delta = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$ .

② **Cas continu** : pour un solide de densité  $\rho$  telle que  $dm(P) = \rho(P) dV$ ,

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{D}} r^2(P) dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) r^2(P) dV$$

Il dépend de la masse et du carré de la distance par rapport à l'axe de rotation.

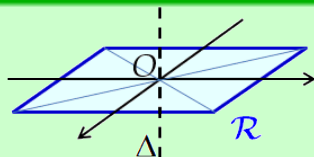
### Remarque D.9

- Comme  $r$  représente la distance par rapport à l'axe de rotation, on utilisera fréquemment les coordonnées cylindriques.
- On peut de même définir le moment d'inertie  $J_O$  par rapport à un point  $O$  en prenant la distance par rapport à  $O$ .
- La formule s'adapte en dimensions 1 et 2 :

$$J_\Delta = \int_{\Gamma} \lambda(P) r^2(P) d\ell \quad \text{et} \quad J_\Delta = \iint_{\Sigma} \sigma(P) r^2(P) dS$$

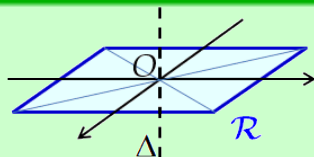
**Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)**

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



**Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)**

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.

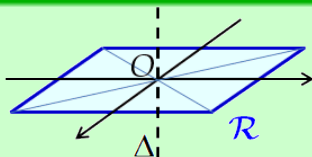
**Solution**

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

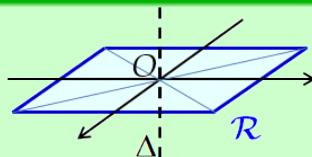
$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

# Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

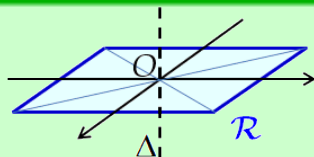
- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

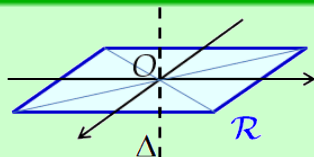
- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Calcul :  $J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy$

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

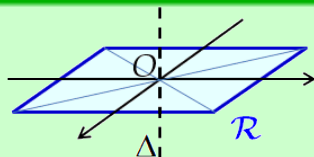
- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Calcul :  $J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy \right] dx$

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



### Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

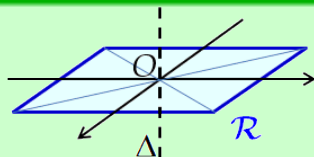
$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Calcul : 
$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy \right] dx$$
$$= \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dx$$



## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



**Solution**

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

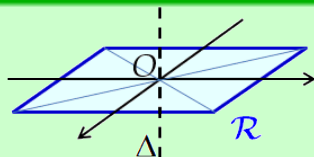
$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{• Calcul : } J_{\Delta} &= \iint_{\mathcal{R}} \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy \right] dx \\ &= \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dx = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left( bx^2 + \frac{b^3}{12} \right) dx \end{aligned}$$

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



### Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = ab$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

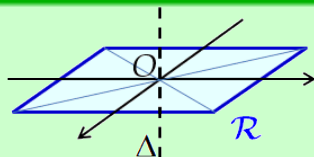
$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Calcul : } J_{\Delta} &= \iint_{\mathcal{R}} \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy \right] dx \\ &= \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dx = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left( bx^2 + \frac{b^3}{12} \right) dx \\ &= \frac{M}{ab} \left[ b \frac{x^3}{3} + \frac{b^3}{12} x \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} \end{aligned}$$

**Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)**

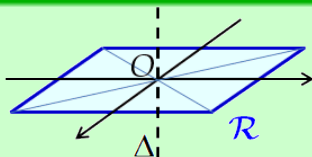
Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.

**Solution (complément)**

Déterminons les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent  $J_{\Delta}$  en gardant  $M$  et  $S$  constants.

**Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)**

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.

**Solution (complément)**

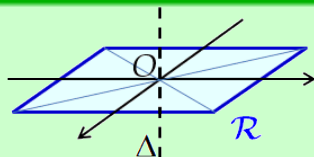
Déterminons les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent  $J_{\Delta}$  en gardant  $M$  et  $S$  constants.

- Comme  $S$  est constante,  $b = \frac{S}{a}$ , donc

$$J_{\Delta} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{12} \left( a^2 + \frac{S^2}{a^2} \right)$$

### Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



#### Solution (complément)

Déterminons les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent  $J_{\Delta}$  en gardant  $M$  et  $S$  constants.

- Comme  $S$  est constante,  $b = \frac{S}{a}$ , donc

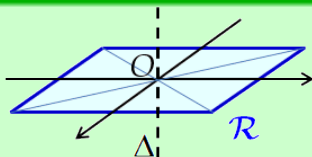
$$J_{\Delta} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{12} \left( a^2 + \frac{S^2}{a^2} \right)$$

- En dérivant cette fonction de  $a$  on obtient :

$$J'_{\Delta}(a) = \frac{M}{12} \left( 2a - 2\frac{S^2}{a^3} \right) = \frac{M}{6} \left( \frac{a^4 - S^2}{a^3} \right)$$

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



### Solution (complément)

Déterminons les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent  $J_{\Delta}$  en gardant  $M$  et  $S$  constants.

- Comme  $S$  est constante,  $b = \frac{S}{a}$ , donc

$$J_{\Delta} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{12} \left( a^2 + \frac{S^2}{a^2} \right)$$

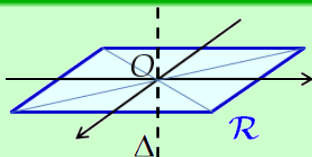
- En dérivant cette fonction de  $a$  on obtient :

$$J'_{\Delta}(a) = \frac{M}{12} \left( 2a - 2\frac{S^2}{a^3} \right) = \frac{M}{6} \left( \frac{a^4 - S^2}{a^3} \right)$$

- Le minimum est atteint au point d'annulation de  $J'_{\Delta}$  (on vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum en contrôlant que  $J'_{\Delta}$  est bien négative puis positive) :

## Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



### Solution (complément)

Déterminons les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent  $J_{\Delta}$  en gardant  $M$  et  $S$  constants.

- Comme  $S$  est constante,  $b = \frac{S}{a}$ , donc

$$J_{\Delta} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{12} \left( a^2 + \frac{S^2}{a^2} \right)$$

- En dérivant cette fonction de  $a$  on obtient :

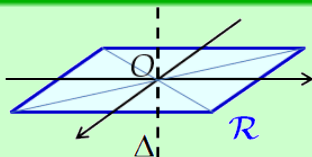
$$J'_{\Delta}(a) = \frac{M}{12} \left( 2a - 2\frac{S^2}{a^3} \right) = \frac{M}{6} \left( \frac{a^4 - S^2}{a^3} \right)$$

- Le minimum est atteint au point d'annulation de  $J'_{\Delta}$  (on vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum en contrôlant que  $J'_{\Delta}$  est bien négative puis positive) :

$$J'_{\Delta}(a) = 0 \iff a^4 - S^2 = 0 \iff a = \sqrt{S} \iff a = b$$

### Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire  $\mathcal{R}$  de côtés  $a$  et  $b$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



#### Solution (complément)

Déterminons les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent  $J_{\Delta}$  en gardant  $M$  et  $S$  constants.

- Comme  $S$  est constante,  $b = \frac{S}{a}$ , donc

$$J_{\Delta} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{12} \left( a^2 + \frac{S^2}{a^2} \right)$$

- En dérivant cette fonction de  $a$  on obtient :

$$J'_{\Delta}(a) = \frac{M}{12} \left( 2a - 2\frac{S^2}{a^3} \right) = \frac{M}{6} \left( \frac{a^4 - S^2}{a^3} \right)$$

- Le minimum est atteint au point d'annulation de  $J'_{\Delta}$  (on vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum en contrôlant que  $J'_{\Delta}$  est bien négative puis positive) :

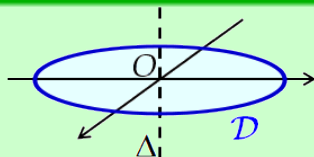
$$J'_{\Delta}(a) = 0 \iff a^4 - S^2 = 0 \iff a = \sqrt{S} \iff a = b$$

Ainsi la plaque est carrée.



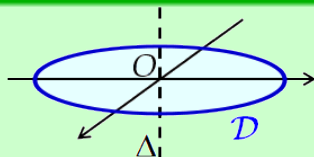
**Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)**

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



**Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)**

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.

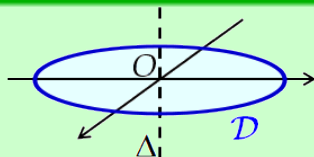
**Solution**

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .

## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



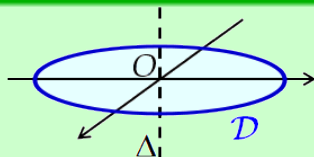
## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$

## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



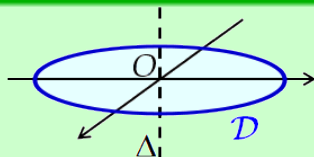
## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$
- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .

## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



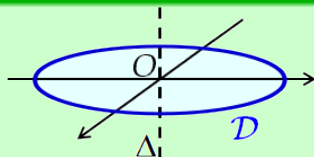
## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$
- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .
- Calcul : 
$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \frac{M}{\pi R^2} (x^2 + y^2) dx dy$$

## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



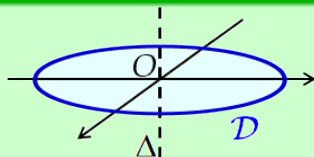
## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$
- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .
- Calcul : 
$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \frac{M}{\pi R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta$$

## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

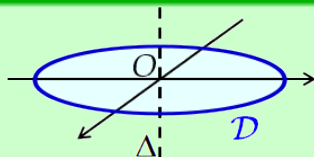
$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$
- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .

$$\begin{aligned}
 \text{• Calcul : } J_{\Delta} &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{M}{\pi R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \\
 &= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta
 \end{aligned}$$

## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

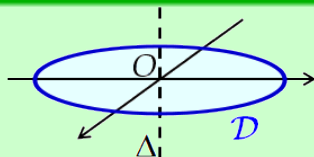
- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$
- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .

$$\begin{aligned}
 \text{• Calcul : } J_{\Delta} &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{M}{\pi R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \\
 &= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi R^2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi}
 \end{aligned}$$



## Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire  $\mathcal{D}$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire en son centre.



## Solution

$$J_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse  $M$ , de surface  $S = \pi R^2$  donc  $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - ★ en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$
  - ★ en coordonnées polaires :  
 $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] : r \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi]$
- Axe  $\Delta = (Oz)$ , distance d'un point  $P(x, y)$  à  $\Delta$  :  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Calcul : } J_{\Delta} &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{M}{\pi R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \\
 &= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi R^2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} MR^2
 \end{aligned}$$

## Intégrale de Riemann

**Aimé Lachal**

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/  
cours\\_PC/chap08\\_Integrale\\_Riemann\\_WEB.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap08_Integrale_Riemann_WEB.pdf)



## Calcul de primitives

**Aimé Lachal**

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/  
cours\\_PC/chap08\\_Primitives\\_WEB.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap08_Primitives_WEB.pdf)



## Intégrale de Gauss

**Aimé Lachal**

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/  
diaporama\\_gauss.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_gauss.pdf)

