INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Intégrales multiples

Aimé Lachal

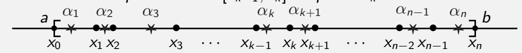
Cours d'OMNI
1er cycle, 1re année

Sommaire

Définition 1.1 (Sommes de Riemann)

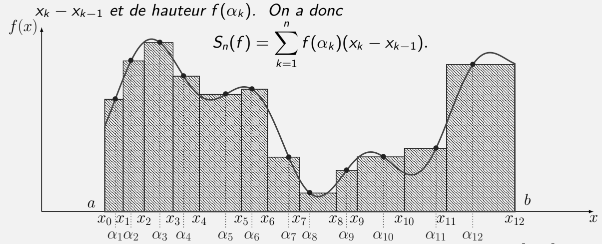
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

- *On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*
  On choisit dans chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ un point α_k.



- *On introduit la somme $S_n(f)$ des aires algébriques des rectangles de largeur $x_k - x_{k-1}$ et de hauteur $f(\alpha_k)$. On a donc*

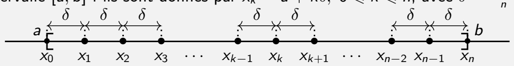
$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}).$$



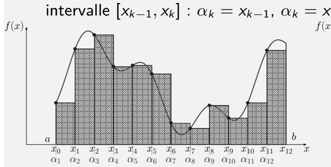
*Cette somme est appelée **somme de Riemann** de la fonction f sur $[a,b]$ relativement à la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et à la suite de points $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.*

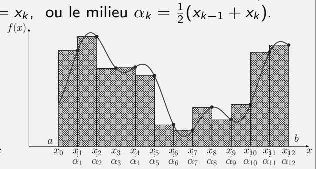
Exemple 1.2 (Subdivision équidistante)

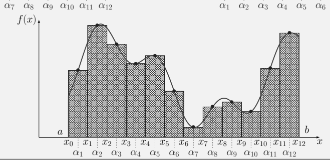
- Un exemple fréquent est celui où les points de subdivision sont équirépartis dans l'intervalle $[a,b]$: ils sont donnés par $x_k = a + k\delta$, $0 \leqslant k \leqslant n$, avec $\delta = \frac{b-a}{n}$.



- On peut choisir pour les points intermédiaires α_k une des bornes de chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$: $\alpha_k = x_{k-1}$, $\alpha_k = x_k$, ou le milieu $\alpha_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$.







Théorème-définition 1.3 (Intégrale de Riemann)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Pour toute subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et pour toute suite de points $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la suite des sommes de Riemann de f est convergente lorsque la plus grande des longueurs $x_k - x_{k-1}$ tend vers 0 (et donc $n \to +\infty$).
*Sa limite qui ne dépend que de f et de $[a,b]$, est appelée **l'intégrale de f sur $[a,b]$** et notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou simplement $\int_a^b f$.*
Autrement dit :

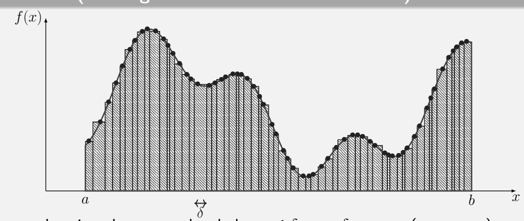
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1})\right].$$

Remarque 1.4

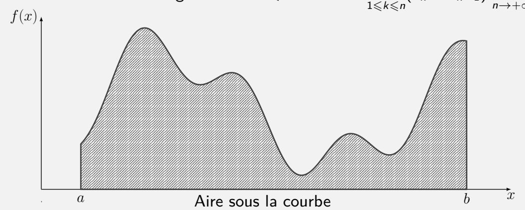
La variable d'intégration x n'a aucune importance, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre différente des bornes de l'intervalle (lettre muette) :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \cdots$$

Visualisation (convergence des sommes de Riemann)



Somme des aires des rectangles de base $\leqslant \delta$ avec $\delta = \max_{1\leqslant k\leqslant n} (x_k - x_{k-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$



Interprétations géométriques de l'intégrale

1. **Interprétation**

   Le réel $\int_a^b f$ représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de f, l'axe (Ox) et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
   « Algébrique » signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de (Ox) et positivement celles situées au-dessus.

   Lorsque $f = 1$, Le réel $\int_a^b f = b - a$ représente simplement la **longueur** de l'intervalle $[a,b]$.

2. **Interprétation de la notation**

   L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente la somme infinie de toutes les aires des rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur **« infinitésimale »** $\mathrm{d}x$.

   C'est le mathématicien allemand Leibniz qui en 1675 a introduit les notations $\mathrm{d}x$ et $\int$, qui représente un S déformé pour **« somme »**, en latin *summa*.

   Leibniz parlait de **« Calcul Sommatoire »**. Les Bernoulli préférèrent par la suite le terme **« Calcul Intégral »**, c'est cette appellation qui l'a emportée mais le $\int$ pratique d'utilisation est resté.

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

Propriété 1.5 (Propriétés)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec $a < b$.

1. ***Linéarité :*** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. ***Relation de Chasles :*** *si c est un point de $[a,b]$ alors* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. ***Positivité :*** *si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f \geqslant 0$.
4. ***Croissance :*** *si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
5. ***Inégalité « triangulaire » :*** $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

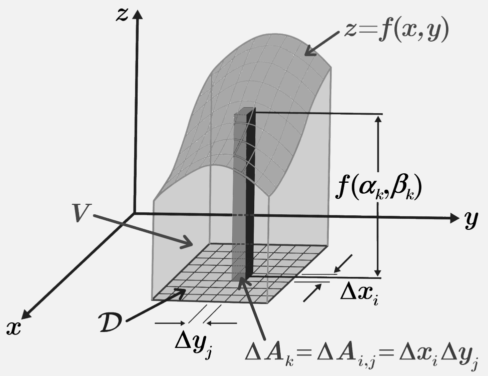
Remarque 1.6 (Calcul)

Calculer une intégrale peut se faire dans des cas simples à l'aide de calcul de primitive. On dispose de nombreuses techniques calculatoires. Sinon, dans le cas général on fait un calcul approché par des méthodes numériques.

Généralisation à la dimension supérieure

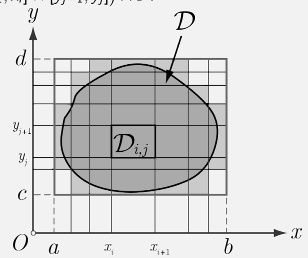
- **Intégrale** simple $\int$ $\longleftrightarrow$ aire (parfois longueur) :
  définition par subdivision d'un intervalle + somme des aires de petits **rectangles**
- **Intégrale** double $\iint$ $\longleftrightarrow$ volume (parfois aire) :
  définition par subdivision d'un domaine du plan + somme des volumes de petits **parallélépipèdes**
- **Intégrale** triple $\iiint$ $\longleftrightarrow$ hypervolume (parfois volume) :
  définition par subdivision d'un domaine de l'espace + somme des volumes de petits **parallélotopes**...

Principe (pour une fonction définie sur un domaine rectangulaire)



Préliminaire : pavage d'un domaine

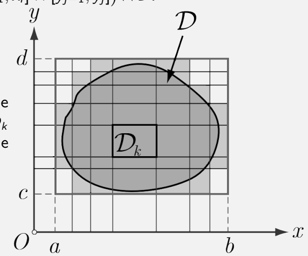
Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan fermé et borné, de bord $\mathcal{C}^1$. $\mathcal{D}$ est alors contenu dans un rectangle $[a,b]\times[c,d]$.
À partir de deux subdivisions $a=x_0<x_1\cdots<x_m=b$ de $[a,b]$ et $c=y_0<y_1\cdots<y_n=d$ de $[c,d]$, on construit une subdivision (ou « **pavage** ») $(\mathcal{D}_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_{i,j}=([x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j])\cap\mathcal{D}$.



Préliminaire : pavage d'un domaine

Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan fermé et borné, de bord $\mathcal{C}^1$. $\mathcal{D}$ est alors contenu dans un rectangle $[a,b]\times[c,d]$.
À partir de deux subdivisions $a=x_0<x_1\cdots<x_m=b$ de $[a,b]$ et $c=y_0<y_1\cdots<y_n=d$ de $[c,d]$, on construit une subdivision (ou « **pavage** ») $(\mathcal{D}_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_{i,j}=([x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j])\cap\mathcal{D}$.

Si $(\mathcal{D}_k)_{1\leqslant k\leqslant mn}$ est un pavage du rectangle $[a,b]\times[c,d]$, la somme des aires des $\mathcal{D}_k$ intersectant $\mathcal{D}$ tend vers l'aire de $\mathcal{D}$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.



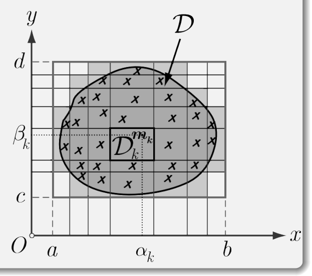
Définition 2.1 (Somme de Riemann)

Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)\end{array}$ *une fonction continue.*

Principe :

- *on subdivise le rectangle* $[a,b]\times[c,d]$
- *dans chaque* $\mathcal{D}_k$ *intersectant* $\mathcal{D}$, *on choisit un point* $m_k=(\alpha_k,\beta_k)$
- *on définit la somme de Riemann correspondante :*

$$S=\sum_k \mathit{Aire}(\mathcal{D}_k)\times f(m_k)$$



Théorème-définition 2.2 (Intégrale double)

En affinant la subdivision, les sommes de Riemann convergent vers une limite ne dépendant que de f *et de* $\mathcal{D}$, *qui définit l'**intégrale double** de* f *sur* $\mathcal{D}$, *notée* $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *ou en abrégé* $\iint_{\mathcal{D}} f$.

Interprétations géométriques de l'intégrale

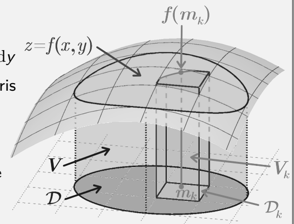
- **Interprétation de la notation**

  Le nombre réel $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ représente la somme infinie de tous les volumes des parallélépipèdes rectangles de hauteur $f(x,y)$ et de base infinitésimale le rectangle d'aire $\mathrm{d}x\times\mathrm{d}y$.

  La somme est « double » car on somme suivant deux directions.

- **Interprétation géométrique**

  La valeur de l'intégrale $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ représente le **volume algébrique** compris entre :
  - la surface d'équation $z=f(x,y)$, $(x,y)\in\mathcal{D}$
  - le plan $z=0$
  - la surface cylindrique s'appuyant sur le contour de $\mathcal{D}$.



En particulier, pour $f=1$: $\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{Aire}(\mathcal{D})$.

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

Propriété 2.3 (Propriétés)

- ***Linéarité :*** $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\iint_{\mathcal{D}}(\lambda f+\mu g)=\lambda\iint_{\mathcal{D}} f+\mu\iint_{\mathcal{D}} g$
- ***Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints :*** *si* $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\varnothing$ *alors* $\iint_{\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2} f=\iint_{\mathcal{D}_1} f+\iint_{\mathcal{D}_2} f$
- ***Positivité :*** *si* $f\geqslant 0$ *sur* $\mathcal{D}$, *alors* $\iint_{\mathcal{D}} f\geqslant 0$
- ***Croissance :*** *si* $f\geqslant g$ *sur* $\mathcal{D}$, *alors* $\iint_{\mathcal{D}} f\geqslant\iint_{\mathcal{D}} g$
- ***Inégalité « triangulaire » :*** $\left|\iint_{\mathcal{D}} f\right|\leqslant\iint_{\mathcal{D}}|f|$

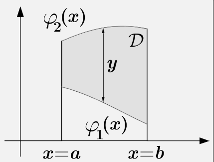
Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine $\mathcal{D}$ (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...).
On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en y puis x)

Soit $\mathcal{D}$ *un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ *une fonction continue. Supposons que* $\mathcal{D}$ *se décrive selon*

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leqslant x\leqslant b \text{ et } \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\right\}$$

avec φ_1,φ_2 *continues.*



Alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

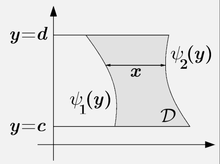
Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine $\mathcal{D}$ (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...).
On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en x puis y)

Soit $\mathcal{D}$ *un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ *une fonction continue. Supposons que* $\mathcal{D}$ *se décrive selon*

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\leqslant y\leqslant d \text{ et } \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\right\}$$

avec ψ_1,ψ_2 *continues.*

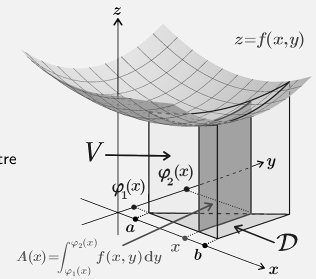


Alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

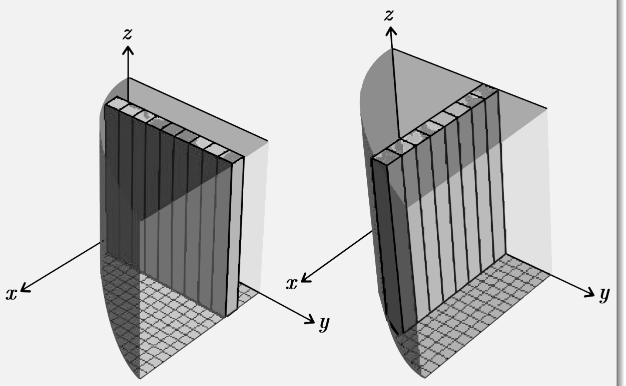
Interprétation géométrique

- Domaine $\mathcal{D}$ en bleu.
- Surface $z=f(x,y)$ en jaune.
- Pour x fixé entre a et b, y varie entre $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ (courbe rouge).



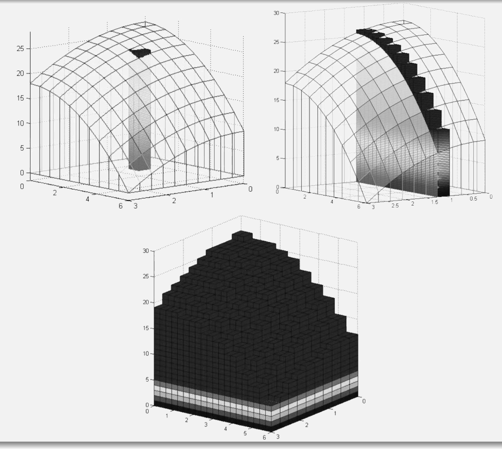
- $A(x)=\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ représente l'**aire** rouge située sous la courbe $f(x,y)$ à $x=\mathit{cste}$ (intégrale simple).
- $V=\displaystyle\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ représente le **volume** du solide situé sous la surface jaune, à l'aplomb du domaine bleu.

Interprétation géométrique



Intégration par rapport à y puis x — Intégration par rapport à x puis y

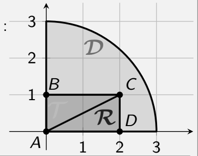
Interprétation géométrique



Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double $I_\Delta = \iint_\Delta (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour les domaines Δ suivants où A, B, C, D sont les points $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(2,1)$, $D(2,0)$:

1. le rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $ABCD$;
2. le triangle $\mathcal{T}$ de sommets ABC ;
3. le quart de disque $\mathcal{D}$ de centre A et de rayon 3.

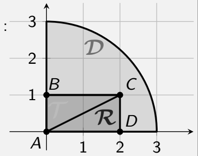


- **Étape 1 — Description du domaine**
  1. $\mathcal{R} : 0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$;
  2. (AC) a pour équation $y = \frac{1}{2}x$ donc $\mathcal{T} : 0 \leqslant x \leqslant 2$ et $\frac{1}{2}x \leqslant y \leqslant 1$;
  3. l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 3^2$ donc $\mathcal{D} : 0 \leqslant x \leqslant 3$ et $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}$.

Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double $I_\Delta = \iint_\Delta (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour les domaines Δ suivants où A, B, C, D sont les points $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(2,1)$, $D(2,0)$:

1. le rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $ABCD$;
2. le triangle $\mathcal{T}$ de sommets ABC ;
3. le quart de disque $\mathcal{D}$ de centre A et de rayon 3.



- **Étape 2 — Calcul de l'intégrale**
  1. $I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}(xy)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2 = 1$
  2. $I_{\mathcal{T}} = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=x/2}^{y=1}(xy)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x/2}^{y=1}\mathrm{d}x$
     $= \int_0^2 x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}x^4\right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$
  3. $I_{\mathcal{D}} = \int_{x=0}^{x=3}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}}(xy)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$
     $= \int_0^3 \frac{1}{2}x\left(9 - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{81}{8} = 10{,}125$

Corollaire 2.6 (Séparation des variables)

*Dans le cas particulier où $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ est un rectangle, et f est une fonction à **« variables séparables »**, i.e. $\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ f(x,y) = g(x) \times h(y)$, alors :*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\right)$$

Exemple 2.7

En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle $\mathcal{R} = ABCD$, on trouve

$$I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}(xy)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int_0^2 x\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \times \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Les cas du triangle $\mathcal{T} = ABC$ et du quart de disque $\mathcal{D}$ ne permettent pas d'utiliser la séparation des variables car ces domaines ne sont pas des rectangles, donc les bornes sont dépendantes les unes des autres.

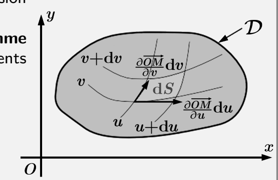
Changement de variable

$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est la **somme infinie** pour chaque point $M(x,y) \in \mathcal{D}$ des **volumes** algébriques des parallélépipèdes rectangles de hauteur $f(x,y)$ et de base la **surface élémentaire** $\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y}$ en coordonnées cartésiennes.

L'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f$ peut donc s'écrire symboliquement $\iint_{M \in \mathcal{D}} f(M)\,\mathrm{d}S$.
Cette quantité ne dépend pas des coordonnées x et y mais uniquement du domaine $\mathcal{D}$.

Si on choisit des coordonnées (u,v), la subdivision de $\mathcal{D}$ se fait le long des courbes coordonnées.
La surface élémentaire devient le **parallélogramme élémentaire** construit sur les vecteurs tangents $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\mathrm{d}u$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\mathrm{d}v$:

$$\boxed{\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\mathrm{d}u \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\mathrm{d}v \right\|}$$



- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable $x = \varphi(u)$:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u}$$

  1. les variables : u au lieu de x
  2. la longueur élémentaire $\mathrm{d}x$ qui devient $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$
  3. l'intervalle d'intégration : $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a,b]$

- Il en est de même pour une **intégrale double** :
  1. les variables : (u,v) au lieu de (x,y),
  2. la surface élémentaire : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ qui devient $\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$
  3. le domaine d'intégration : $(x,y) \in \mathcal{D} \iff (u,v) \in \Delta$

  Au final, après le changement de variables $(x,y) = \varphi(u,v)$:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta g(u,v) \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

- Exemple en **coordonnées polaires** :

$$\boxed{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

Coordonnées polaires

Partant du vecteur déplacement

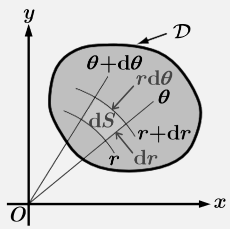
$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}r)\vec{e}_r + (r\mathrm{d}\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, on en déduit intuitivement la **surface élémentaire** $\mathrm{d}S$ en coordonnées polaires :

$$\boxed{\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$



Théorème 2.8 (Changement de variables en coordonnées polaires)

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

1. *On remplace (x,y) par $(r\cos\theta, r\sin\theta)$,*
2. *On remplace $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par $r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,*
3. *On trouve une description en polaire Δ du domaine $\mathcal{D}$.*

Exemple 2.9 (Aire d'un disque)

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon R à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$ n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\} = [0,R] \times [0, 2\pi[$$

  Avec cette approche :

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \left(\int_0^R r\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi = \pi R^2$$

Définition 3.1 (Somme de Riemann)

Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ fermé borné et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- *$\mathcal{D}$ est contenu dans un pavé $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ sur lequel on peut définir des subdivisions de chacun des trois intervalles. Cela fournit un pavage $(\mathcal{D}_k)$ du pavé.*
- *Dans chaque $\mathcal{D}_k$ intersectant $\mathcal{D}$ on choisit un point $m_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$.*
- *On définit la **somme de Riemann** correspondante :*

$$S = \sum_k Volume(\mathcal{D}_k) \times f(m_k)$$

Théorème-définition 3.2 (Intégrale triple)

*En affinant la subdivision, les sommes de Riemann convergent vers une limite ne dépendant que de f et de $\mathcal{D}$, qui définit l'**intégrale triple** de f sur $\mathcal{D}$, notée $\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ou en abrégé $\iiint_{\mathcal{D}} f$.*

Interprétations géométriques de l'intégrale

- **Interprétation de la notation**

  Le nombre réel $\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ représente la somme infinie de tous les **« hypervolumes »** des parallélotopes de hauteur $f(x,y,z)$ et de base infinitésimale le parallélépipède d'aire $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$.

  La somme est « triple » car on somme suivant trois directions.

- **Interprétation géométrique**

  La valeur de l'intégrale $\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ représente l'**hypervolume algébrique** compris entre :
  - l'« hypersurface » d'équation $t = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathcal{D}$
  - l'« hyperplan » $t = 0$
  - l'« hypersurface » cylindrique s'appuyant sur le contour de $\mathcal{D}$.

  En particulier, pour $f = 1$: $\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \text{Volume}(\mathcal{D})$.

Généralisation des propriétés de l'intégrale double (interprétation géométrique similaire).

Propriété 3.3 (Propriétés)

- ***Linéarité :*** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f + \mu \iiint_{\mathcal{D}} g$
- ***Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints :*** *si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$ alors* $\iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} f = \iiint_{\mathcal{D}_1} f + \iiint_{\mathcal{D}_2} f$
- ***Positivité :*** *si $f \geqslant 0$ sur $\mathcal{D}$, alors* $\iiint_{\mathcal{D}} f \geqslant 0$
- ***Croissance :*** *si $f \geqslant g$ sur $\mathcal{D}$, alors* $\iiint_{\mathcal{D}} f \geqslant \iiint_{\mathcal{D}} g$
- ***Inégalité « triangulaire » :*** $\left|\iiint_{\mathcal{D}} f\right| \leqslant \iiint_{\mathcal{D}} |f|$

Principe d'intégrations successives

Une **intégrale triple** va pouvoir se décomposer en :

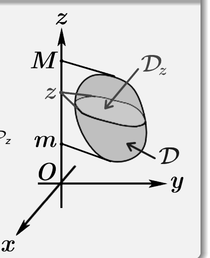
- une **intégrale simple** suivie d'une **intégrale double** : $\iiint_{\mathcal{D}} = \iint_{\dots} \int_{\dots}^{\dots}$
- une **intégrale double** suivie d'une **intégrale simple** : $\iiint_{\mathcal{D}} = \int_{\dots}^{\dots} \iint_{\dots}$
- trois **intégrales simples** successives : $\iiint_{\mathcal{D}} = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots}$

Intégrale double suivie d'une simple

Soit $\mathcal{D}$ un domaine de l'espace.
Supposons que $\mathcal{D}$ soit défini par ses coupes horizontales :

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : m \leqslant z \leqslant M,\ (x,y) \in \mathcal{D}_z\}$$

où $\mathcal{D}_z$ représente la section du domaine $\mathcal{D}$ par le plan $\mathcal{P}_z$ horizontal de cote z : $\mathcal{D}_z = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_z$



Théorème 3.4 (Théorème de Fubini)

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{z=m}^{z=M} \left(\iint_{\mathcal{D}_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z}$$

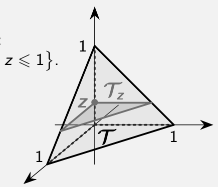
Remarque 3.5

On a privilégié la variable z, mais on pourrait faire de même en privilégiant x ou y.

Exemple 3.6 (Volume d'un tétraèdre)

Calculons le volume d'un tétraèdre régulier $\mathcal{T}$ de côté 1.

- ***Première méthode.*** Description cartésienne de $\mathcal{T}$:
  $\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1\}$.
  Pour $z \in [0,1]$ fixé, $\mathcal{T}_z$ est un triangle rectangle de côtés $1-z$, donc d'aire $\frac{1}{2}(1-z)^2$.



$$\text{Volume}(\mathcal{T}) = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{z=1} \left(\iint_{\mathcal{T}_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \int_0^1 (\text{Aire}(\mathcal{T}_z))\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-z)^2 \mathrm{d}z = \left[-\tfrac{1}{6}(1-z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

- ***Deuxième méthode.*** Description cartésienne de $\mathcal{T}$:
  $\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y\}$.
  Donc $\text{Volume}(\mathcal{T}) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

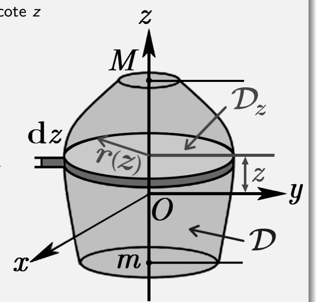
Application : volume d'un solide de révolution

En tournant autour de l'axe (Oz), une courbe engendre un **solide de révolution** $\mathcal{D}$.

La coupe de $\mathcal{D}$ avec le plan horizontal de cote z est un disque $\mathcal{D}_z$ de rayon $r(z)$.

Le volume de $\mathcal{D}$ est égal à :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_{z=m}^{z=M} \left(\iint_{\mathcal{D}_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_m^M (\text{Aire}(\mathcal{D}_z))\mathrm{d}z \\ &= \int_m^M \pi r^2(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$



Interprétation : on découpe le solide $\mathcal{D}$ en un nombre infini de tranches cylindriques élémentaires d'épaisseur $\mathrm{d}z$ et de volume $\mathrm{d}V(z) = \pi r^2(z)\,\mathrm{d}z$: $\text{Volume}(\mathcal{D}) = \int_m^M \mathrm{d}V(z)$.

Exemple 3.7 (Volume d'un cône de révolution)

Calculons le volume d'un **cône de révolution** $\mathcal{C}$ de hauteur h et de rayon R.

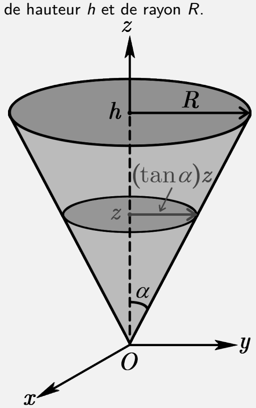
Notons α le demi-angle au sommet.
La coupe de $\mathcal{C}$ avec le plan horizontal de cote z est un disque $\mathcal{D}_z$ de rayon $r(z) = (\tan\alpha)z$.

Le volume de $\mathcal{C}$ est égal à :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{C}) &= \int_0^h (\text{Aire}(\mathcal{D}_z))\mathrm{d}z \\ &= \int_0^h \pi r^2(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{3}(\tan^2\alpha)h^3\end{aligned}$$

Or $R = (\tan\alpha)h$, d'où :

$$\boxed{\text{Volume}(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{3}R^2 h}$$



Volume élémentaire

- Si les nouvelles variables sont $(u,v,w) \in \Delta$ au lieu de $(x,y,z) \in \mathcal{D}$, alors l'expression $f(x,y,z)$ devient une expression de la forme $g(u,v,w)$.
- Le **déplacement élémentaire** $d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}\mathrm{d}w$ issu du point M génère un **parallélépipède élémentaire** dont les arêtes sont construites selon les trois déplacements élémentaires $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\mathrm{d}u$, $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\mathrm{d}v$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}\mathrm{d}w$.
- Le volume de ce parallélépipède est donné par le produit mixte

$$\left| \left(\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\mathrm{d}u, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\mathrm{d}v, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}\mathrm{d}w \right) \right) \right|$$

Théorème 3.8 (Changement de variables)

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} g(u,v,w) \left| \left(\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} \right) \right) \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}$$

3. Intégrale triple — d) Changement de variable

Volume élémentaire en cylindriques

Partant du vecteur déplacement

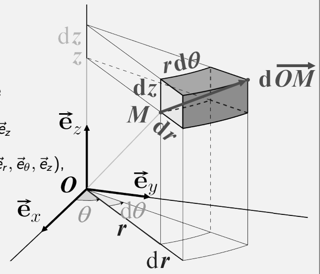
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}r)\vec{e}_r + (r\mathrm{d}\theta)\vec{e}_\theta + (\mathrm{d}z)\vec{e}_z$$

dans la base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on en tire le **volume élémentaire :**

$$\boxed{\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$



Théorème 3.9 (En coordonnées cylindriques)

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

3. Intégrale triple — d) Changement de variable

Volume élémentaire en sphériques

Partant du vecteur déplacement

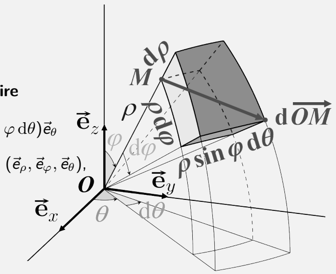
$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}\rho)\vec{e}_\rho + (\rho\mathrm{d}\varphi)\vec{e}_\varphi + (\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta)\vec{e}_\theta$$

dans la base locale orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$, on en tire le **volume élémentaire :**

$$\boxed{\mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$



Théorème 3.10 (En coordonnées sphériques)

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$

3. Intégrale triple — d) Changement de variable

Exemple 3.11 (Volume d'une boule)

Le volume de la boule $\mathcal{B}$ de rayon R se calcule facilement en coordonnées sphériques :

$$V = \iiint_{\mathcal{B}} \mathrm{d}V = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\rho^2\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\rho^2\,\mathrm{d}\rho)\,(\mathrm{d}\theta)\,(\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi)$$
$$= \left(\int_0^R \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right) \times \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) \times \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = 2 \times 2\pi \times \tfrac{1}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Résumé des changements de variables usuels (2D/3D)

$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$	(cartésiennes)
$= r\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$	(polaires)
$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	(cartésiennes)
$= r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$	(cylindriques)
$= \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$	(sphériques)

En résumé...

Notions à retenir

- Intégrales doubles et triples
  - Interprétation géométrique
  - Maîtrise du calcul analytique :
    - intégrations successives (théorème de Fubini)
    - changements de variables (polaires, cylindriques, sphériques)
  - Utilisation en géométrie et en physique

Annexes

- Quelques exercices
- Valeur moyenne
- Intégrale curviligne/surfacique
- Applications à la géométrie des masses

A. Quelques exercices — a) Calcul par intégrations successives

Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

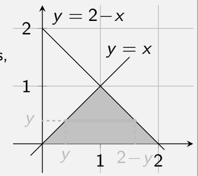
Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \text{ et } x + y \leqslant 2\}$.

Solution

Première méthode : intégration en x puis en y

$\mathcal{D}$ est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières,

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } y \leqslant x \leqslant 2 - y\}$$



Le théorème de Fubini donne

$$I = \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=y}^{x=2-y} y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 [xy]_{x=y}^{x=2-y}\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 (2y - 2y^2)\,\mathrm{d}y = \left[y^2 - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

A. Quelques exercices — a) Calcul par intégrations successives

Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \text{ et } x + y \leqslant 2\}$.

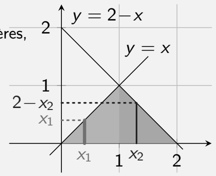
Solution

Deuxième méthode : intégration en y puis en x

$\mathcal{D}$ est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières, il se décompose selon $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ où

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x < 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x\}$$
$$\mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2 - x\}$$

avec $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$.



La relation de Chasles et le théorème de Fubini donnent

$$I = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=x} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=2-x} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2-x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \tfrac{1}{2}(2-x)^2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{6}x^3\right]_0^1 + \left[-\tfrac{1}{6}(2-x)^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}$$

A. Quelques exercices — a) Calcul par intégrations successives

Exercice A.2 (Domaine rectangulaire)

Calculer $J = \iint_{\mathcal{R}} xe^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur le rectangle $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$.

Solution

La fonction à intégrer est à variables séparables. L'intégrale double est donc le produit de deux intégrales simples :

$$J = \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 e^y\mathrm{d}y = 1 \times (e - 1)$$

(à l'aide d'une intégration par parties pour la première intégrale).

Exercice A.3 (Domaine rectangulaire)

Calculer $K = \iint_{\mathcal{R}} (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur le domaine $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,2]$.

Solution

On peut intégrer en x puis y, ou y puis x. Par exemple

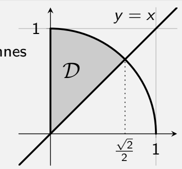
$$K = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\left((x+2)^3 - x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{12}\left((x+2)^4 - x^4\right)\right]_0^1 = \frac{16}{3}$$

A. Quelques exercices — b) Changement de variable

Exercice A.4 (Domaine circulaire)

Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant x, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ à l'aide des coordonnées cartésiennes puis des coordonnées polaires.



Solution

- **En cartésien** (pas adapté !) : $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$.

$$I = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2}\int_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} x\left[y\right]_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}/2}\left(x\sqrt{1-x^2} - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}\left((1-x^2)^{3/2} + x^3\right)\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

- **En polaire** (bien adapté !) : $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant 1,\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

$$I = \iint_{\Delta} (r\cos\theta)(r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta) = \left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Définition B.1 (Valeur moyenne de f)

- ***Cas 1D :*** *pour une fonction f continue sur $[a,b]$, la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est le nombre*
$$\mu(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- ***Cas 2D :*** *pour une fonction f continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, la **valeur moyenne** de f sur $\mathcal{D}$ est le nombre*
$$\mu(f) = \frac{1}{Aire(\mathcal{D})}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- ***Cas 3D :*** *pour une fonction f continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, la **valeur moyenne** de f sur $\mathcal{D}$ est le nombre*
$$\mu(f) = \frac{1}{Volume(\mathcal{D})}\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Remarque B.2 (Moyenne arithmétique)

La notion de valeur moyenne généralise celle de **moyenne arithmétique** en statistiques : pour une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la **moyenne arithmétique** est le nombre
$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

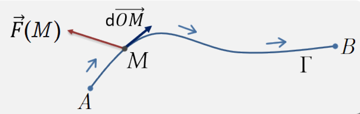
Définition C.1 (Champ scalaire)

*Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n = 1, 2$ ou 3. Un **champ scalaire F** est une application qui à tout **point** $M \in U$ associe un **nombre** (ou **scalaire**) :*
$$F : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & F(M) \end{array}$$

Définition C.2 (Champ vectoriel)

- *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou 3. Un **champ vectoriel $\vec{F}$** est une application qui à tout **point** $M \in U$ associe un **vecteur** de $\mathbb{R}^n$:*
$$\vec{F} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & \vec{F}(M) \end{array}$$
- *Lorsque l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la donnée d'un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ équivaut à la donnée de trois champs scalaires P, Q, R :*
$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{e}_x + Q(M)\vec{e}_y + R(M)\vec{e}_z$$
*On lui associe naturellement la **forme différentielle** suivante :*
$$\omega_M = \vec{F}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = P(M)\mathrm{d}x + Q(M)\mathrm{d}y + R(M)\mathrm{d}z$$
ou en abrégé : $\quad \omega = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et Γ une courbe orientée d'extrémités des points A et B, de classe $\mathcal{C}^1$ contenue dans U.



Définition C.3 (Intégrale curviligne/Circulation)

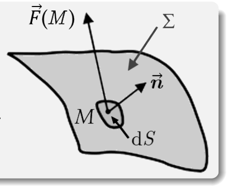
*La **circulation** du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de l'arc de courbe Γ parcouru de A à B est égale à l'**intégrale curviligne** de la forme différentielle $\omega_M = \vec{F}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:*
$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{\widehat{AB}} \omega$$
*On parle d'intégrale **curviligne** car on intègre le long d'une courbe.*

Théorème C.4 (Calcul)

Si la courbe Γ est définie par une paramétrisation $t \in [a,b] \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ et le champ $\vec{F}$ est donné par $\vec{F}(M) = P(M)\vec{e}_x + Q(M)\vec{e}_y + R(M)\vec{e}_z$, la circulation $\mathcal{C}_\Gamma$ se calcule selon :
$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_a^b \vec{F}(M(t))\cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big[P(M(t))x'(t) + Q(M(t))y'(t) + R(M(t))z'(t)\Big]\mathrm{d}t$$

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, Σ une surface orientée.

On note $\mathrm{d}S$ la petite surface élémentaire autour de M, $\vec{n}$ un vecteur normal **unitaire** définissant l'orientation. On pose alors $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = (\mathrm{d}S)\vec{n}$.



Définition C.5 (Intégrale de surface/Flux)

*Le **flux** du champ vectoriel $\vec{F}$ à travers la surface orientée Σ est défini par l'**intégrale de surface** :*
$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{F}(M)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}(M) = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Théorème C.6 (Calcul)

Si Σ est définie par une paramétrisation $(u,v) \in \Delta \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, le flux Φ_Σ se calcule selon :
$$\Phi_\Sigma = \iint_\Delta \vec{F}(M(u,v))\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}(u,v) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\mathrm{d}S}(u,v) = \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u,v)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Objet à différentes échelles

1. **Échelle atomique** : il y a de l'espace entre la matière. La répartition des masses est **discrète** et la masse d'un objet $\mathcal{D}$ est
$$M = \sum_{particules \in \mathcal{D}} m_{particules}$$
$\to$ non calculable en pratique.
2. **Échelle intermédiaire** : la matière n'est plus considérée comme **discrète** mais **continue**. Autour de chaque point P de l'objet, la répartition des masses est considérée comme homogène et symboliquement
$$M = \int_{P \in \mathcal{D}} dm(P)$$
(« somme continue » de toutes les « petites masses élémentaires »).

Masse volumique d'un solide homogène

La ***masse volumique*** ou ***densité volumique*** d'un solide est la masse par unité de volume (référence 1 pour l'eau : 1 litre d'eau pèse 1 kg) :
$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$$
donc
$$\boxed{M = \rho V}$$

Masse volumique d'un solide non homogène

La ***densité volumique*** est définie localement en tout point P par $\rho(P)$. Un bout infinitésimal du solide autour du point P aura donc une densité volumique
$$\rho(P) = \frac{\mathrm{d}m(P)}{\mathrm{d}V}$$
Dans ce cas :
$$\boxed{M = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P)\,\mathrm{d}V}$$

Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur L (portion de courbe Γ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est $\mathrm{d}\ell$.

  Masse M d'un solide Γ de masse linéique λ :

Homogène : $M = \lambda L$	Non homogène : $M = \int_\Gamma \lambda(P)\,\mathrm{d}\ell$

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire S (portion de surface Σ), on parle de masse ou densité **surfacique** et un morceau infinitésimal est $\mathrm{d}S$.

  Masse M d'un solide Σ de masse surfacique σ :

Homogène : $M = \sigma S$	Non homogène : $M = \iint_\Sigma \sigma(P)\,\mathrm{d}S$

Exemple D.1 (Masse d'un cube)

Le cube $\mathcal{C}$ est défini par les inégalités $0 \leqslant x, y, z \leqslant 2$ et de densité volumique donnée par $\rho(x,y,z) = \dfrac{1}{z+1}$ Kg.m^{-3}. Calculons sa masse.
$$M = \iiint_{\mathcal{C}} \rho(P)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_0^2\int_0^2\int_0^2 \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \left(\int_0^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^2 \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^2 \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z\right) = 2\times 2\times \big[\ln(|z+1|)\big]_0^2 = (4\ln 3)\text{ kg}$$

Définition D.2 (Centre d'inertie : cas discret)

Le **centre d'inertie** d'un objet assimilé à un ensemble de n points P_i de masse m_i est le barycentre des (P_i, m_i). On le nomme aussi **centre de masse**, ou **centre de gravité** si le champ de gravité est uniforme. Il est donc défini par
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{OM_i}} \quad \text{avec} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$
En projetant cette relation vectorielle sur chacun des trois axes (on passe aux coordonnées), on obtient ses coordonnées :
$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i x_i \\ y_G &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i y_i \\ z_G &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i z_i \end{aligned}}$$

Définition D.3 (Centre d'inertie : cas continu)

Dans le cas continu : le **centre d'inertie** d'un solide $\mathcal{D}$ de masse M et de masse volumique ρ est le point G défini par
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OP}\rho(P)\,\mathrm{d}V} \quad \text{avec} \quad M = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
De même cette relation vectorielle se traduit en projetant sur chaque axe par :
$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{D}} x\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ y_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{D}} y\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ z_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{D}} z\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned}}$$

L'étude des symétries permet de simplifier l'étude du centre d'inertie.

Propriété D.4 (Plan de symétrie)

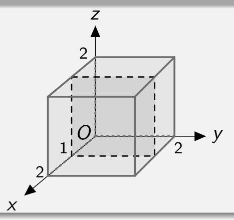
Si l'objet $\mathcal{D}$ et sa distribution de masses admettent un plan de symétrie $\mathcal{P}$, alors le centre d'inertie G appartient à $\mathcal{P}$.

Exemple D.5 (Centre d'inertie d'une sphère)

Le centre d'inertie d'une sphère homogène est son centre car elle admet une infinité de plans de symétries passant tous par le centre.

Exemple D.6 (Centre d'inertie d'un cube)

Le cube de l'exemple D.1 est symétrique par rapport au plan d'équation $x = 1$.
Sa distribution de masses $\rho(x,y,z) = \frac{1}{z+1}$ aussi.
Donc son centre d'inertie est dans le plan $x = 1$.

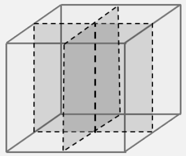


Exercice D.7 (Centre d'inertie d'un cube)

Déterminer le centre d'inertie G du cube $\mathcal{C}$ de l'exemple D.1.

Solution

- $\mathcal{C}$ et ρ sont symétriques par rapport au plan $x = 1$ donc $x_G = 1$.
- $\mathcal{C}$ et ρ sont symétriques par rapport au plan $y = 1$ donc $y_G = 1$.



- Calcul explicite :

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{C}} z\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{4\ln 3}\int_0^2\int_0^2\int_0^2 \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{4\ln 3}\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^2 \frac{(z+1)-1}{z+1}\mathrm{d}z = \frac{1}{\ln 3}\big[z - \ln|z+1|\big]_0^2$$
$$= \frac{2-\ln 3}{\ln 3} \simeq 0,82$$

Le **moment d'inertie** J_Δ d'un solide $\mathcal{D}$ par rapport à un axe Δ caractérise sa distribution de masse autour de Δ. Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe Δ.

Définition D.8 (Moment d'inertie)

1. ***Cas discret :*** *pour un solide constitué de n point P_i de masse m_i à une distance r_i d'un axe Δ, $J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i$.*
2. ***Cas continu :*** *pour un solide de densité ρ telle que $\mathrm{d}m(P) = \rho(P)\,\mathrm{d}V$,*

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{D}} r^2(P)\,\mathrm{d}m = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P)\,r^2(P)\,\mathrm{d}V$$

Il dépend de la masse et du carré de la distance par rapport à l'axe de rotation.

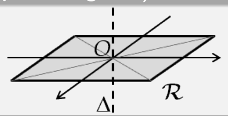
Remarque D.9

- Comme r représente la distance par rapport à l'axe de rotation, on utilisera fréquemment les coordonnées cylindriques.
- On peut de même définir le moment d'inertie J_O par rapport à un point O en prenant la distance par rapport à O.
- La formule s'adapte en dimensions 1 et 2 :

$$J_\Delta = \int_\Gamma \lambda(P)\,r^2(P)\,\mathrm{d}\ell \quad\text{et}\quad J_\Delta = \iint_\Sigma \sigma(P)\,r^2(P)\,\mathrm{d}S$$

Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire $\mathcal{R}$ de côtés a et b de masse M par rapport à un axe Δ perpendiculaire en son centre.



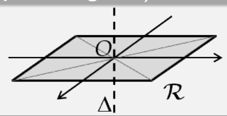
Solution

$$J_\Delta = \iint_{\mathcal{R}} \sigma(x,y)r(x,y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- Plaque homogène de masse M, de surface $S = ab$ donc $\sigma(x,y) = \sigma = \dfrac{M}{ab}$.
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :
$$\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\leqslant y\leqslant\frac{b}{2}\right\}$$
- Axe $\Delta = (Oz)$, distance d'un point $P(x,y)$ à Δ : $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Calcul : $J_\Delta = \displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{M}{ab}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\left[\int_{-b/2}^{b/2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$
$$= \frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}x = \frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\left(bx^2+\frac{b^3}{12}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{M}{ab}\left[b\frac{x^3}{3}+\frac{b^3}{12}x\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$$

Exercice D.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire $\mathcal{R}$ de côtés a et b de masse M par rapport à un axe Δ perpendiculaire en son centre.



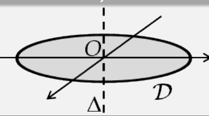
Solution (complément)

Déterminons les valeurs de a et b qui minimisent J_Δ en gardant M et S constants.

- Comme S est constante, $b = \dfrac{S}{a}$, donc
$$J_\Delta = \frac{M(a^2+b^2)}{12} = \frac{M}{12}\left(a^2+\frac{S^2}{a^2}\right)$$
- En dérivant cette fonction de a on obtient :
$$J'_\Delta(a) = \frac{M}{12}\left(2a-2\frac{S^2}{a^3}\right) = \frac{M}{6}\left(\frac{a^4-S^2}{a^3}\right)$$
- Le minimum est atteint au point d'annulation de J'_Δ (on vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum en contrôlant que J'_Δ est bien négative puis positive) :
$$J'_\Delta(a) = 0 \iff a^4 - S^2 = 0 \iff a = \sqrt{S} \iff a = b$$
Ainsi la plaque est carrée.

Exercice D.11 (Moment d'inertie d'une plaque circulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire $\mathcal{D}$ de rayon R de masse M par rapport à un axe Δ perpendiculaire en son centre.



Solution

$$J_\Delta = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(x,y)r(x,y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- Plaque homogène de masse M, de surface $S = \pi R^2$ donc $\sigma(x,y) = \sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$.
- Choix d'un repère où le paramétrage du disque est simple :
  - en coordonnées cartésiennes : $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant R^2\}$
  - en coordonnées polaires :
    $\mathcal{D} = \{(r,\theta)\in[0,+\infty[\times[0,2\pi] : r\leqslant R\} = [0,R]\times[0,2\pi]$
- Axe $\Delta = (Oz)$, distance d'un point $P(x,y)$ à Δ : $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = r$.
- Calcul :
$$J_\Delta = \iint_{\mathcal{D}} \frac{M}{\pi R^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \times \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{M}{\pi R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}MR^2$$