INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

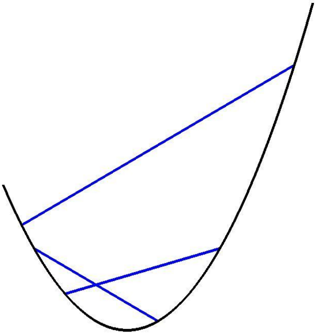
Fonctions convexes

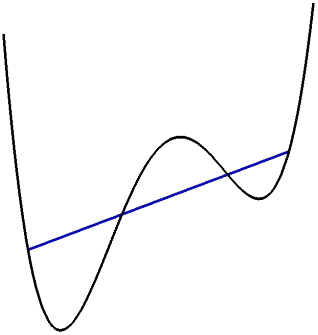
1. Définitions

1. Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition géométrique : f est dite *convexe* (resp. *concave*) lorsque toutes les cordes reliant deux points de $\mathcal{C}_f$ sont au-dessus (resp. au-dessous) de $\mathcal{C}_f$.





1. Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition géométrique : f est dite *convexe* (resp. *concave*) lorsque toutes les cordes reliant deux points de $\mathcal{C}_f$ sont au-dessus (resp. au-dessous) de $\mathcal{C}_f$.

Remarque : f est concave ssi $-f$ est convexe.

Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. L'équation de la corde reliant les points de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ s'écrit

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

ou encore

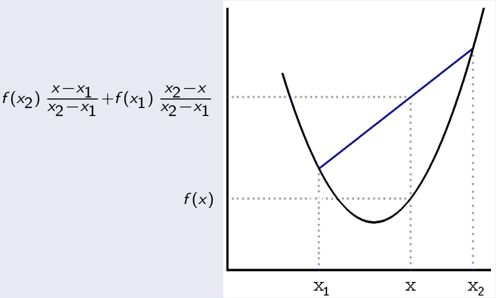
$$y = f(x_2)\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1)\,\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

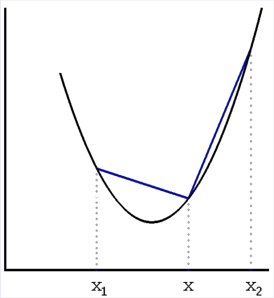
Définition analytique : f est *convexe*

ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I_{(x_1<x_2)},\ \forall x \in [x_1, x_2],\ f(x) \leqslant f(x_2)\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + f(x_1)\,\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

$$\text{ou encore } \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$





1. Définitions

Définition analytique : f est *convexe*

ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I_{\,(x_1<x_2)},\ \forall x \in [x_1, x_2],\ f(x) \leqslant f(x_2)\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + f(x_1)\,\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

$$\text{ou encore } \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

ssi

$$\forall x_0 \in I, \text{ l'application } x \in I \backslash \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ est croissante.}$$

Dans toute la suite, on supposera l'intervalle I *ouvert*.

2. Propriétés

2. Propriétés

Proposition 1 : supposons f convexe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Démonstration par récurrence...

En particulier, pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire : supposons f convexe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_1, \dots, x_n \in I$,

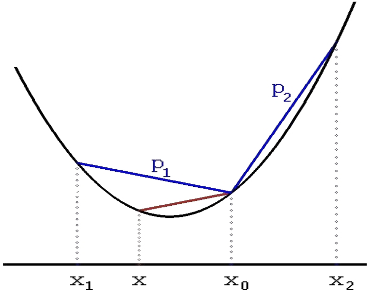
$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Proposition 2 : si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche sur I et $\forall x_0 \in I$, $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$.

1. On choisit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $x_0 \in]x_1, x_2[$. Posons

$$p_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ et } p_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$



2. Propriétés

Proposition 2 : si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche sur I et $\forall x_0 \in I$, $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$.

1. On choisit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $x_0 \in]x_1, x_2[$. Posons
$$p_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ et } p_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$
Comme f est convexe, on a
$$\forall x \in]x_1, x_2[\setminus \{x_0\},\ p_1 \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant p_2.$$
Donc, en posant $k = \max(p_1, p_2)$,
$$\forall x_0, x \in]x_1, x_2[,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|.$$
Ainsi, f est k-Lipschitzienne sur $]x_1, x_2[$ (et donc continue).

2. Propriétés

Proposition 2 : si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche sur I et $\forall x_0 \in I$, $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$.

1. L'application $x \in I \backslash \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante et bornée, elle admet donc des limites à droite et à gauche en x_0.

   D'où f est dérivable en x_0 à droite et à gauche.

2. Soit $\varepsilon > 0$. La pente de la corde entre $x_0 - \varepsilon$ et x_0 est inférieure à celle entre x_0 et $x_0 + \varepsilon$:
$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$
   Faisons tendre ε vers 0^+ : on trouve $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

2. Propriétés

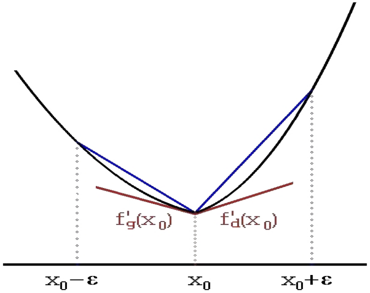
Proposition 2 : si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche sur I et $\forall x_0 \in I$, $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$.

1. L'application $x \in I \backslash \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante et bornée, elle admet donc des limites à droite et à gauche en x_0.

   D'où f est dérivable en x_0 à droite et à gauche.

2.



3. Caractérisations

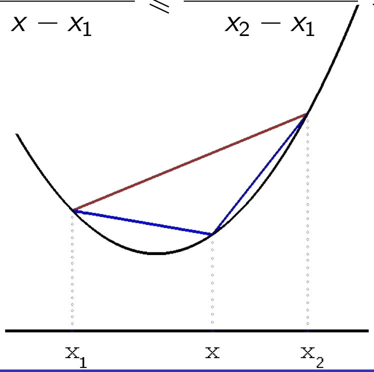
Proposition 3 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstration.

1. Supposons f convexe. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. On a

$$\forall x \in]x_1, x_2[, \ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$



3. Caractérisations

Proposition 3 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstration.

1. Supposons f convexe. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. On a
$$\forall x \in]x_1, x_2[, \ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$
Faisons tendre x vers x_1^+ et x_2^-. On obtient
$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2).$$
Donc f' est croissante.

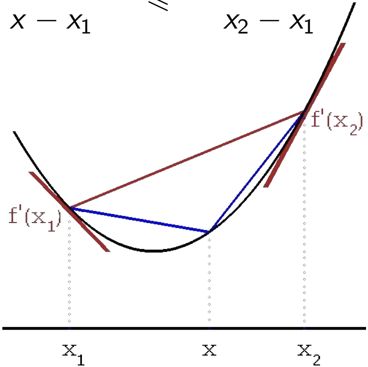
Proposition 3 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstration.

1. Supposons f convexe. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. On a

$$\forall x \in]x_1, x_2[, \ \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$



3. Caractérisations

Proposition 3 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstration.

2. Supposons f' croissante. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et soit $x \in]x_1, x_2[$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\exists c_1 \in]x_1, x[, \ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$$

$$\exists c_2 \in]x, x_2[, \ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$$

On a $c_1 < c_2$, donc $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$. D'où

$$\forall x \in]x_1, x_2[, \ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

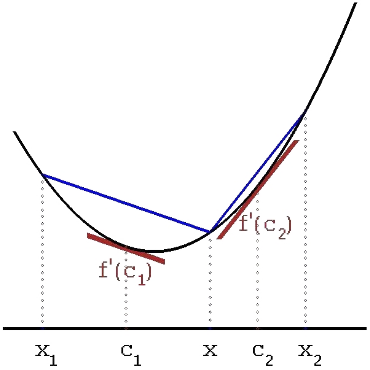
Donc f est convexe.

Proposition 3 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstration.

2. Supposons f' croissante. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et soit $x \in]x_1, x_2[$.



3. Caractérisations

Corollaire : on suppose f deux fois dérivable sur I.
f est convexe sur I ssi $f'' \geqslant 0$ sur I.

Exemple 1 : la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde vaut 2.

Exemple 2 : la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde $x \mapsto -1/x^2$ est négative.

Exemple 3 : la fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde $x \mapsto 2/x^3$ est positive.

Exemple 4 : la fonction sin est concave sur $[0, \pi]$ car sa dérivée seconde $-\sin$ est négative.

3. Caractérisations

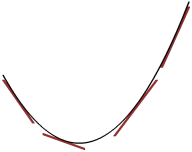
Proposition 4 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration.

1. Supposons f convexe. Donc f' est croissante. Soit $x_0, x \in I$.
   - Si $x > x_0$, $\exists c \in]x_0, x[$, $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$.
     On a $c > x_0$, donc $f'(c) \geqslant f'(x_0)$ puis
     $$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
   - Si $x < x_0$, $\exists c \in]x, x_0[$, $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$.
     On a $c < x_0$, donc $f'(c) \leqslant f'(x_0)$ puis
     $$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

   Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0.



Proposition 4 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration.

2. Supposons $\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses tangentes. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$.
   - $\mathcal{C}_f$ étant au-dessus de sa tangente en x_1, on a
   $$\forall x \in I, f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$
   Pour $x = x_2$, cela donne $f'(x_1) \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
   - $\mathcal{C}_f$ étant au-dessus de sa tangente en x_2, on a
   $$\forall x \in I, f(x) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$
   Pour $x = x_1$, cela donne $f'(x_2) \geqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

3. Caractérisations

Proposition 4 : on suppose f dérivable sur I.

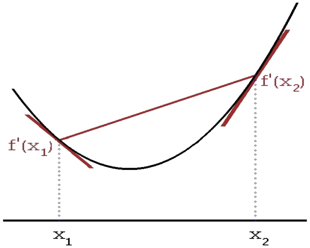
f est convexe sur I ssi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration.

2. On en tire

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ tels que } x_1 < x_2,\ f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

ce qui montre que f' est croissante.



D'où f est convexe.

4. En résumé

4. En résumé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle *ouvert* I.

Propriété 1 : si f est convexe sur I, alors f est continue sur I.

Propriété 2 : si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche sur I et $\forall x_0 \in I$, $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Propriété 3 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Propriété 4 : on suppose f dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Propriété 5 : on suppose f deux fois dérivable sur I.

f est convexe sur I ssi $f'' \geqslant 0$ sur I.

5. Applications

5. Applications

Exemple 1 : la fonction ln est concave. On a donc pour tous $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right).$$

Moyenne arithmétique : $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Moyenne géométrique : $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.

Théorème 1 (inégalité arithmético-géométrique)

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in [0, +\infty[\,, \quad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

5. Applications

Exemple 2 : la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe. On a donc pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}.$$

Moyenne arithmétique : $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Moyenne quadratique : $\sqrt{\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$.

Théorème 2 (inégalité arithmético-quadratique)

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in [0, +\infty[\,, \qquad \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

5. Applications

Application à la statistique : soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une suite de données statistiques.

Moyenne :

$$m = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Déviation par rapport à la moyenne :

$$D = \frac{|x_1 - m| + \cdots + |x_n - m|}{n}.$$

Écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + \cdots + (x_n - m)^2}{n}}.$$

Proposition (comparaison déviation/écart-type)

$$D \leqslant \sigma.$$

5. Applications

Exemple 3 : la fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0, +\infty[$. On a donc pour tous $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right).$$

Moyenne arithmétique : $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Moyenne harmonique : $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.

Théorème 3 (inégalité arithmético-harmonique)

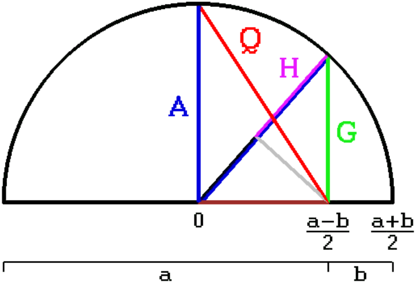
$$\forall x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[, \quad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

5. Applications

<u>**Illustration graphique pour $n = 2$**</u> : soit $a, b > 0$. On pose

$$A = \frac{a+b}{2},\ G = \sqrt{ab},\ H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},\ Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

On construit un cercle de rayon A.



$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} = Q^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab = G^2$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{ab}\right)^2 - \left(\sqrt{ab}\,\frac{a-b}{a+b}\right)^2} = \frac{2ab}{a+b} = H$$

$$\boxed{H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q}$$

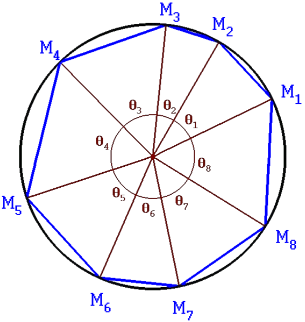
Exemple 4 : la fonction sin est concave sur $[0, \pi]$. On a donc pour tous $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, \pi]$,

$$\frac{\sin(\theta_1) + \cdots + \sin(\theta_n)}{n} \leqslant \sin\left(\frac{\theta_1 + \cdots + \theta_n}{n}\right).$$

5. Applications

Une application géométrique : considérons un polygone convexe $M_1M_2\dots M_n$ où les points $M_1,\dots,M_n$ sont situés sur le cercle centré en O de rayon 1.

- Notons $\theta_1,\dots,\theta_n$ les angles (entre 0 et 2π) du polygone au centre : $\theta_1=\widehat{M_1OM_2}$, $\theta_2=\widehat{M_2OM_3}$, $\dots$, $\theta_n=\widehat{M_nOM_1}$.



5. Applications

Une application géométrique : considérons un polygone convexe $M_1 M_2 \dots M_n$ où les points $M_1, \dots, M_n$ sont situés sur le cercle centré en O de rayon 1.

- Notons $\theta_1, \dots, \theta_n$ les angles (entre 0 et 2π) du polygone au centre : $\theta_1 = \widehat{M_1 O M_2}$, $\theta_2 = \widehat{M_2 O M_3}, \dots, \theta_n = \widehat{M_n O M_1}$.
- Notons P_n le périmètre du polygone :

  $$P_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \cdots + M_n M_1 = 2\left[\sin(\theta_1/2) + \cdots + \sin(\theta_n/2)\right].$$

- On a $P_n \leqslant 2n \sin(\frac{\pi}{n})$ qui est le périmètre du polygone régulier.

Théorème 4 : un polygone convexe inscrit dans un cercle a un périmètre maximal lorsque celui-ci est régulier.

Exemple 5 : Courbe des impôts

Barème progressif par tranches (Loi de finances 2019)

tranche	taux
jusqu'à 9 964 €	0 %
de 9 965 € à 27 519€	14 %
de 27 520 € à 73 779 €	30 %
de 73 780 € à 156 244 €	41 %
au-delà de 156 244 €	45 %

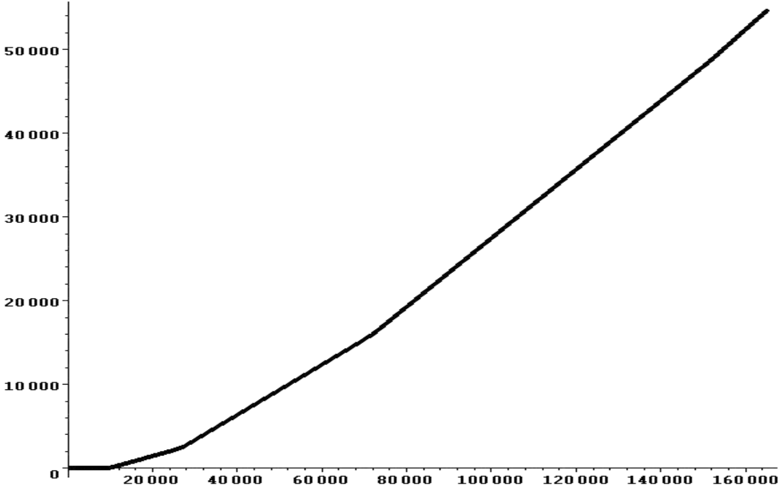
Exemple 5 : Courbe des impôts

Calcul de l'impôt : pour une personne seule de revenu imposable R

$$\boxed{I(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } R \leqslant 9\,964, \\ 0.14\,R - 1\,394.96 & \text{si } 9\,964 \leqslant R \leqslant 27\,519, \\ 0.30\,R - 5\,798 & \text{si } 27\,519 \leqslant R \leqslant 73\,779, \\ 0.41\,R - 13\,913.69 & \text{si } 73\,779 \leqslant R \leqslant 156\,244, \\ 0.45\,R - 20\,163.45 & \text{si } R \geqslant 156\,244. \end{cases}}$$

I est une fonction affine par morceaux continue de pente croissante.

Exemple 5 : Courbe des impôts



Exemple 5 : Courbe des impôts

Expression synthétique :

$$\boxed{\begin{aligned} I(R) = \;& 0.225\,R - 10\,081.725 \\ & + 0.08\,|R - 27\,519| + 0.07\,|R - 9\,964| \\ & + 0.055\,|R - 73\,779| + 0.02\,|R - 152\,244|. \end{aligned}}$$

I est une somme de fonctions convexes, elle est donc convexe.

MERCI D'ÊTRE RESTÉS JUSQU'AU BOUT !