INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Série de Riemann

Sommaire

1. Définitions

1. Définition

Définition (série convergente)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique. Si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on dit que la ***série*** $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ***convergente*** et l'on note
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On va étudier ici les exemples suivants :

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(série \textbf{\textit{harmonique}})}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(série \textbf{\textit{harmonique alternée}})}$$

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{(série de \textbf{\textit{Riemann}} générale)}$$

$$u_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{(une série de \textbf{\textit{Riemann}})}$$

2. La série harmonique

2. La série harmonique

Définition

La série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée ***série harmonique.***

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante : $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$.
- On a
  $$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$
  Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était convergente, on aurait, en notant ℓ sa limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$, puis $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$ qui est absurde.
- La suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente, elle est donc croissante non-majorée ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2. La série harmonique

Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

Démonstration n° 1.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Appliquons le théorème des accroissements finis à l'application ln : pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, il existe $c \in \,]k-1, k[$ tel que

$$\ln(k) - \ln(k-1) = \frac{1}{c} > \frac{1}{k}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $d \in \,]k, k+1[$ tel que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{d} < \frac{1}{k}.$$

Donc $\qquad \ln(k+1) - \ln(k) < \dfrac{1}{k} < \ln(k) - \ln(k-1).$

Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

Démonstration n° 1.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- On somme ces inégalités de 1 à n à gauche et de 2 à n à droite :

$$\sum_{k=1}^{n} \Big[\ln(k+1) - \ln(k)\Big] < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big[\ln(k) - \ln(k-1)\Big],$$

soit

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, le résultat s'ensuit :
$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2. La série harmonique

Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

Démonstration nº 2.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a $\forall x \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{k}$

  et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$ puis

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

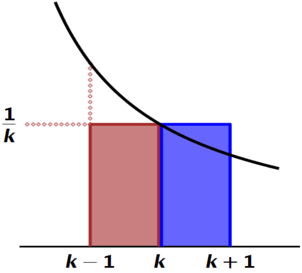
2. La série harmonique

Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

Démonstration nº 2.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 

Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

Démonstration n° 2.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- On somme ces inégalités de 1 à n à gauche et de 2 à n à droite :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

soit

$$\ln(n+1) < S_n < \ln(n) + 1.$$

Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, le résultat s'ensuit :

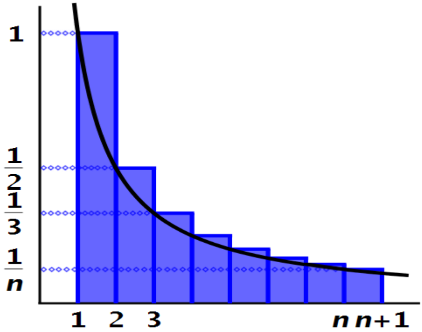
$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$

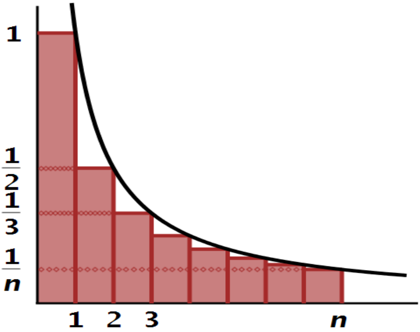
Théorème

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

Démonstration n° 2.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 



2. La série harmonique

Bonus track. On a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma}$$

où $\gamma \approx 0,577215664$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Leonard Euler, 1707–1783

Lorenzo Mascheroni, 1750–1800

3. La série harmonique alternée

3. La série harmonique alternée

Définition

La série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée ***série harmonique alternée.***

Posons $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $v_n = T_{2n}$ et $w_n = T_{2n+1}$.

- On a

$$v_{n+1} - v_n = T_{2n+2} - T_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

$$w_{n+1} - w_n = T_{2n+3} - T_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0,$$

$$w_n - v_n = T_{2n+1} - T_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent vers une même limite. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente.

3. La série harmonique alternée

Théorème

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2).$$

Démonstration.

Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- Partant de la série géométrique de raison $(-t)$, on trouve

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$$

- Intégrons de 0 à 1 :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$T_n = \ln(2) + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

3. La série harmonique alternée

Théorème

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2).$$

Démonstration.

Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- Puisque $0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  D'où le résultat : $\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln(2).$

  Vitesse de convergence en $1/n$.

3. La série harmonique alternée

Bonus track. Considérons la série obtenue à partir de la série harmonique alternée par permutation des termes selon le procédé suivant : on prend chaque terme positif de la série initiale suivi de deux termes négatifs consécutifs. On a

$$\boxed{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{2}\ln(2).}$$

Démonstration.
En regroupant les termes trois par trois :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\ =\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\ =\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

Explication. La somme n'est pas invariante par permutation. La série harmonique alternée est ***semi-convergente*** (i.e. convergente et la série des valeurs absolues divergente)...

3. La série harmonique alternée

Théorème

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Démonstration.

- Intégrons $1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-t^2)^{n-1} = \dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{(-t^2)^n}{1+t^2}$ de 0 à 1 :

$$U_n = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+(-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

- On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et, puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- D'où le résultat : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{4}$.

4. Une autre série

4. Une autre série

Théorème

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 2^2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{4\times 2^4} + \cdots = \ln(2).$$

Démonstration.

- Intégrons $1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1} = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{(-t)^n}{1+t}$ de 0 à x :
$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
- Pour $x=-1/2$, on a $\displaystyle\int_0^{-1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1/2) = -\ln(2)$ et, puisque $1 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 2$ pour tout $t\in[-1/2,0]$,
$$0 \leqslant \left|\int_0^{-1/2} \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\int_0^{1/2} t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
- D'où le résultat. Vitesse de convergence en $1/(n2^n)$.

5. La série de Riemann

5. La série de Riemann

Définition (série de Riemann)

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée ***série de Riemann.***

Bernhard Riemann, 1826–1866

Théorème

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, *i.e.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Démonstration nº 1.

Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $\alpha > 1$. Appliquons le théorème des accroissements finis à l'application $t \mapsto 1/t^{\alpha-1}$:
   pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, il existe $c \in]k-1, k[$ tel que
   $$\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{c^\alpha} > -\frac{\alpha-1}{k^\alpha}.$$
   Donc
   $$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right].$$

5. La série de Riemann

Théorème

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, *i.e.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Démonstration nº 1.

Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $\alpha > 1$. On somme de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right],$$

soit

$$V_n - 1 < \frac{1}{\alpha - 1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] < \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Ainsi, la suite croissante $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, donc convergente.

5. La série de Riemann

Théorème

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, *i.e.*

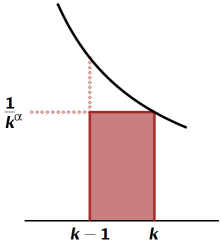
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Démonstration nº 2.

Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $\alpha > 1$. Pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, on a

$$\frac{1}{k^\alpha} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$



5. La série de Riemann

Théorème

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, *i.e.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Démonstration nº 2.

Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

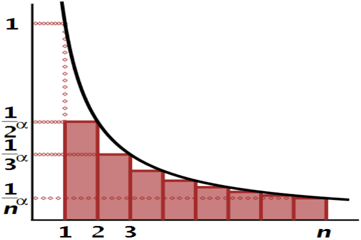
1. On suppose que $\alpha > 1$. On somme ces inégalités de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

soit

$$V_n - 1 < \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] < \frac{1}{\alpha-1}.$$

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante majorée, donc convergente.



5. La série de Riemann

Théorème

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, *i.e.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > 1.$$

Démonstration.

Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On suppose que $\alpha \leqslant 1$. Il est clair que $1/k^\alpha \geqslant 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$V_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n)$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty.$$

Ainsi, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

5. La série de Riemann

Bonus track. On a pour $\alpha < 1$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

6. Une série de Riemann : $\alpha = 2$

6. Une série de Riemann : $\alpha = 2$

1. Partons de

$$\begin{aligned}
\sin((2n+1)\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{i(2n+1)\theta}\right) = \operatorname{Im}\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^{2n+1} \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[\cos(\theta)\right]^{2n+1-k}\left[i\sin(\theta)\right]^{k}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}\cos^{2n-2p}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta) \\
&= \sin^{2n+1}(\theta)\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}\cot^{2n-2p}(\theta) \\
&= \sin^{2n+1}(\theta)\,P(\cot^2(\theta))
\end{aligned}$$

où P est le polynôme défini par

$$P = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}X^{n-p} = \binom{2n+1}{1}X^n - \binom{2n+1}{3}X^{n-1} + \cdots$$

6. Une série de Riemann : $\alpha = 2$

1. On a donc

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \; P(\cot^2(\theta)) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)}.$$

2. Résolvons l'équation $P(\cot^2(\theta)) = 0$:

$$\begin{aligned} P(\cot^2(\theta)) = 0 &\iff \sin((2n+1)\theta) = 0 \text{ et } \sin(\theta) \neq 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \, (2n+1)\theta = k\pi \text{ et } \theta \notin \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les solutions dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ sont les angles $\frac{k\pi}{2n+1}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Donc, les nombres $\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, sont n racines distinctes du polynôme P.

D'autre part, P est de degré n. Les nombres précédents sont exactement toutes les racines de P. Leur somme vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

6. Une série de Riemann : $\alpha = 2$

3. Des inégalités $\forall\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$ on déduit
$$\forall\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \cot^2(\theta) \leqslant \frac{1}{\theta^2} \leqslant \cot^2(\theta) + 1.$$
Donc, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,
$$\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1.$$
On somme ces inégalités de 1 à n :
$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1\right]$$
ce qui donne
$$\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\,\frac{\pi^2}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}\,\frac{\pi^2}{3}$$
avec
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\,\frac{\pi^2}{3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}\,\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Une série de Riemann : $\alpha = 2$

Théorème (Euler, 1735)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Leonard Euler, 1707–1783

6. Une série de Riemann : $\alpha = 2$

Théorème (Euler, 1735)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bonus track.

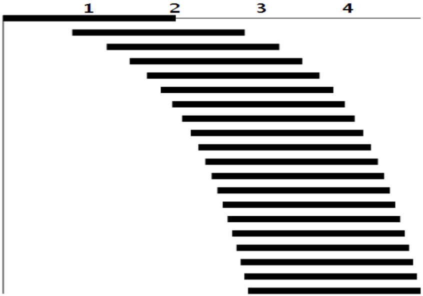
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450} \ldots$$

7. Applications

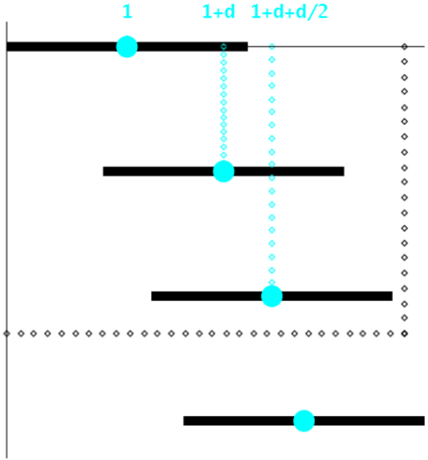
7. Applications

Exemple 1 : une pile de dominos en porte-à-faux



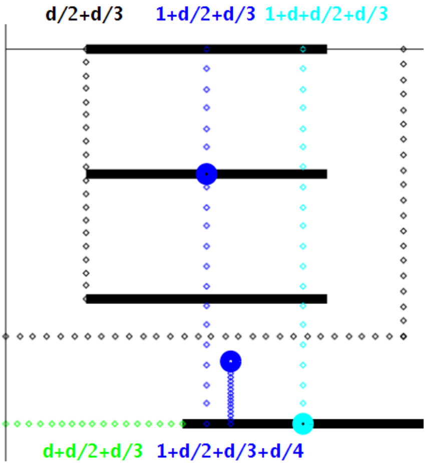
Exemple 1 : une pile de dominos en porte-à-faux

Placement des quatre premiers dominos partant du haut :

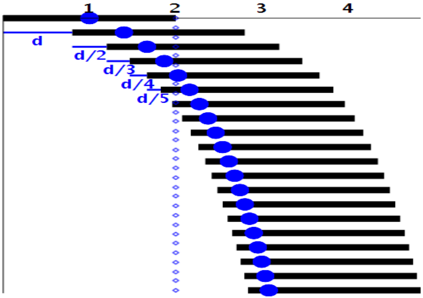


Exemple 1 : une pile de dominos en porte-à-faux

Schéma statique équivalent :



Exemple 1 : une pile de dominos en porte-à-faux

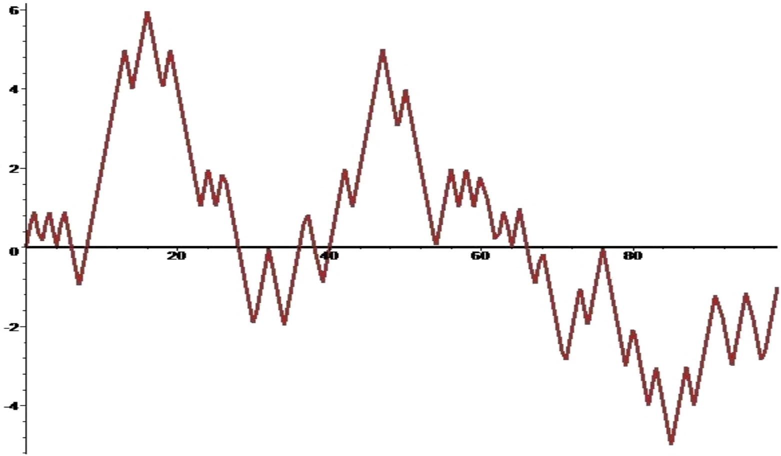


Chaque point bleu représente le centre de gravité de l'ensemble des dominos se trouvant à son niveau et au-dessus. Chaque domino est décalé du suivant d'une distance $d, \frac{d}{2}, \frac{d}{3}, \frac{d}{4}, \ldots$ $(d \in]0,1[)$.

On peut théoriquement réaliser un porte-à-faux infini avec une pile restant en équilibre...

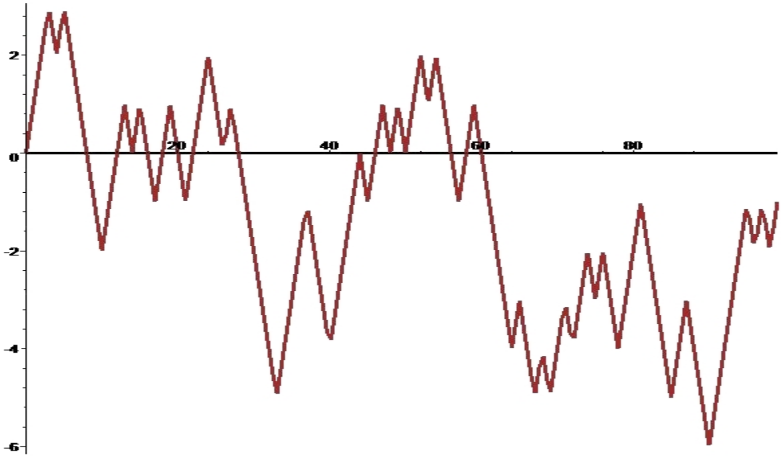
Exemple 2 : marche au hasard

1. **Cas $1D$ (marche sur $\mathbb{Z}$)**



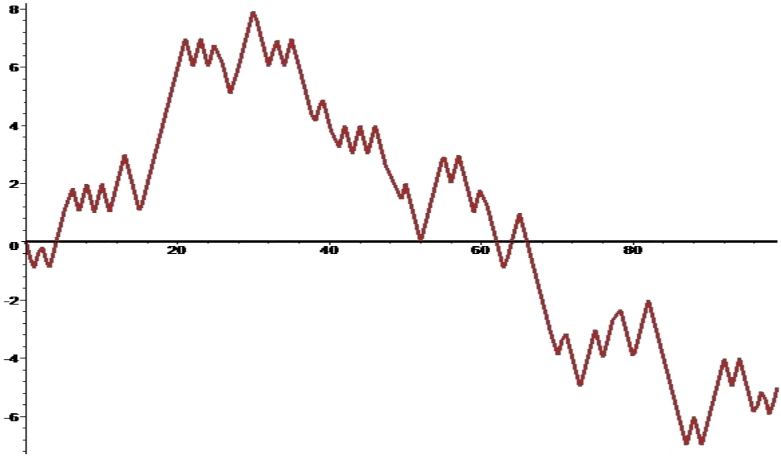
Exemple 2 : marche au hasard

1. **Cas $1D$ (marche sur $\mathbb{Z}$)**



Exemple 2 : marche au hasard

1. **Cas $1D$ (marche sur $\mathbb{Z}$)**



Exemple 2 : marche au hasard

1. **Cas $1D$ (marche sur $\mathbb{Z}$)**

   Soit X_n la position du marcheur au bout de n pas ($X_0 = 0$).
   Probabilité de repasser par l'origine au bout de $2n$ pas :

$$\mathbb{P}\{X_{2n} = 0\} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

   (n pas vers la droite, n pas vers la gauche, $\frac{(2n)!}{n!^2}$ possibilités)
   Avec la formule de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$, on obtient

$$\mathbb{P}\{X_{2n} = 0\} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

   Potentiel en 0 : nombre de passages par l'origine $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}$.
   Nombre moyen de passages par l'origine :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{X_n = 0\} = +\infty.$$

7. Applications

Exemple 2 : marche au hasard

1. **Cas $1D$ (marche sur $\mathbb{Z}$)**

   $\Longrightarrow$ Le marcheur repasse par l'origine une infinité de fois presque sûrement...

Théorème (Pólya, 1926)

La marche au hasard $1D$ est ***récurrente.***

George Pólya, 1887–1985

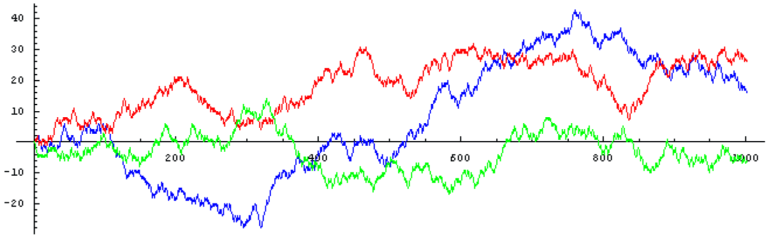
Exemple 2 : marche au hasard

1. **Cas $1D$ (marche sur $\mathbb{Z}$)**

   $\Longrightarrow$ Le marcheur repasse par l'origine une infinité de fois presque sûrement...

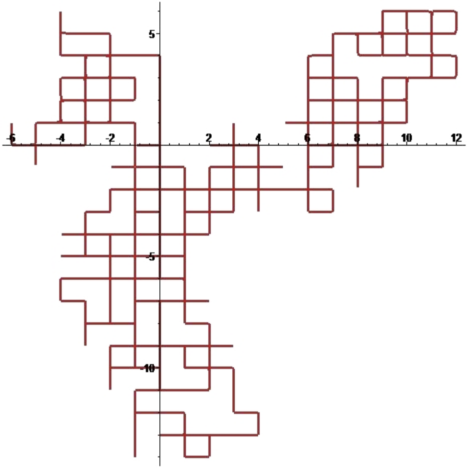
Théorème (Pólya, 1926)

La marche au hasard $1D$ est ***récurrente.***



Exemple 2 : marche au hasard

2. **Cas $2D$ (marche sur $\mathbb{Z}^2$)**



Exemple 2 : marche au hasard

2. **Cas $2D$ (marche sur $\mathbb{Z}^2$)**

   Soit (X_n, Y_n) la position du marcheur au bout de n pas $((X_0, Y_0) = (0, 0))$.
   Probabilité de repasser par l'origine au bout de $2n$ pas :

$$\mathbb{P}\{(X_{2n}, Y_{2n}) = (0, 0)\} = \sum_{k_1, k_2 \geqslant 0 : k_1 + k_2 = n} \frac{(2n)!}{(4^{k_1+k_2} k_1! k_2!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{16^n}.$$

   - en abscisse : k_1 pas vers la droite, k_1 pas vers la gauche, $2n - 2k_1$ pas stagnants
     $\longrightarrow \frac{(2n)!}{(k_1!)^2(2n-2k_1)!}$ possibilités chacune de probabilité $\frac{1}{4^{2k_1}}$;
   - pour ces derniers, en ordonnée : k_2 pas vers le haut, k_2 pas vers le bas avec $2k_2 = 2n - 2k_1$
     $\longrightarrow \frac{(2n-2k_1)!}{(k_2!)^2}$ possibilités chacune de probabilité $\frac{1}{4^{2k_2}}$;
   - d'où $\frac{(2n)!}{k_1!^2 k_2!^2}$ possibilités avec $k_1 + k_2 = n$.

Exemple 2 : marche au hasard

2. **Cas $2D$ (marche sur $\mathbb{Z}^2$)**

   Soit (X_n, Y_n) la position du marcheur au bout de n pas $((X_0, Y_0) = (0, 0))$.

   Probabilité de repasser par l'origine au bout de $2n$ pas :

$$\mathbb{P}\{(X_{2n}, Y_{2n}) = (0, 0)\} = \sum_{k_1, k_2 \geqslant 0 : k_1 + k_2 = n} \frac{(2n)!}{(4^{k_1+k_2} k_1! k_2!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{16^n}.$$

   Avec la formule de Stirling, on obtient

$$\mathbb{P}\{(X_{2n}, Y_{2n}) = (0, 0)\} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}.$$

   Nombre moyen de passages par l'origine :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{(X_n, Y_n) = (0,0)\}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{(X_n, Y_n) = (0, 0)\} = +\infty.$$

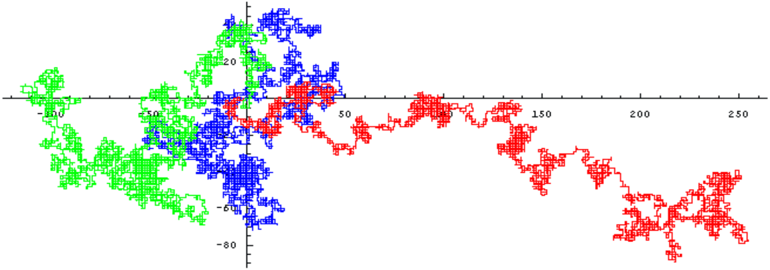
Exemple 2 : marche au hasard

2. **Cas $2D$ (marche sur $\mathbb{Z}^2$)**

$\Longrightarrow$ Le marcheur repasse par l'origine une infinité de fois presque sûrement...

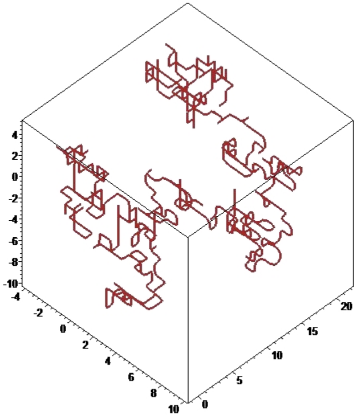
Théorème (Polyà, 1926)

La marche au hasard $2D$ est ***récurrente.***



Exemple 2 : marche au hasard

3. **Cas $3D$ (marche sur $\mathbb{Z}^3$)**



Exemple 2 : marche au hasard

3. **Cas $3D$ (marche sur $\mathbb{Z}^3$)**
   Soit (X_n, Y_n, Z_n) la position du marcheur au bout de n pas $((X_0, Y_0, Z_0) = (0,0,0))$.
   Probabilité de repasser par l'origine au bout de $2n$ pas :
   $$\mathbb{P}\{(X_{2n}, Y_{2n}, Z_{2n}) = (0,0,0)\} = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\geqslant 0:\\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{(2n)!}{(6^{k_1+k_2+k_3}k_1!k_2!k_3)^2}.$$
   Avec la formule de Stirling, on obtient
   $$\mathbb{P}\{(X_{2n}, Y_{2n}, Z_{2n}) = (0,0,0)\} \underset{n\to+\infty}{\leqslant} \frac{c}{n^{3/2}}.$$
   Nombre moyen de passages par l'origine :
   $$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{(X_n,Y_n,Z_n)=(0,0,0)\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{(X_n, Y_n, Z_n) = (0,0,0)\} < +\infty.$$

7. Applications

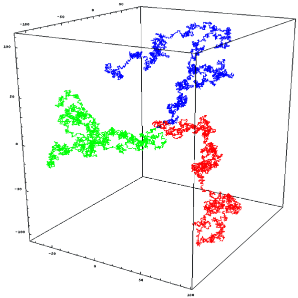
Exemple 2 : marche au hasard

3. **Cas $3D$ (marche sur $\mathbb{Z}^3$)**

   $\Longrightarrow$ Le marcheur repasse par l'origine un nombre fini de fois et s'enfuit vers l'infini presque sûrement...

Théorème (Polyà, 1926)

La marche au hasard $3D$ est ***transiante.***



Exemple 2 : marche au hasard

3. **Cas** $3D$ **(marche sur** $\mathbb{Z}^3$**)**

Bonus track (Watson, 1939)

La probabilité de retour du marcheur $3D$ en l'origine est donnée par

$$p = 1 - \frac{1}{q} \quad \text{avec} \quad q = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx\,dy\,dz}{3-\cos(x)-\cos(y)-\cos(z)}.$$

$$p \approx 0,34.$$

George Neville Watson, 1886–1965

Exemple 3 : potentiel d'un cristal de chlorure de sodium

Énergie potentielle d'interaction coulombienne entre deux particules de charges q et q' distantes de r :

$$U = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

($\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\, F/m$: permittivité du vide).

Pour un système de n particules de charges $q_1, q_2, \dots, q_n$, l'énergie totale d'interaction est

$$U = \sum_{i,j:1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

r_{ij} étant la distance entre les particules de charges q_i et q_j.

Cette énergie peut s'écrire selon

$$U = \sum_{i=1}^{n} q_i V_i \quad \text{avec} \quad V_i = \sum_{j:1\leqslant j\leqslant n, j\neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

où V_i est le potentiel électrostatique exercé sur la i^{e} particule.

7. Applications

Exemple 3 : potentiel d'un cristal de chlorure de sodium

Cas d'un cristal mono-dimensionnel de $NaCl$ périodique composé d'un grand nombre $2n$ d'ions Na^+ et Cl^- placés alternativement, de charges respectives $+q$ et $-q$ et distants de $d = 2,81\,\text{Å}$: $r_{ij} = d|i-j|$.

L'énergie s'écrit

$$U_n = \sum_{i=1}^{2n} q_i V_i = q \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i V_i.$$

Exemple 3 : potentiel d'un cristal de chlorure de sodium

- Potentiel créé en un ion Na^+ par les autres ions :

$$V_{2i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \sum_{\substack{j:1\leqslant j\leqslant n,\\ j\neq 2i}} \frac{(-1)^j}{|j-2i|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \left(\sum_{j=1}^{2i-1} + \sum_{j=2i+1}^{2n}\right) \frac{(-1)^j}{|j-2i|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \left(\sum_{j=1}^{2i-1} \frac{(-1)^j}{j} + \sum_{j=1}^{2(n-i)} \frac{(-1)^j}{j}\right)$$

- Potentiel créé en un ion Cl^- par les autres ions :

$$V_{2i-1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \sum_{\substack{j:1\leqslant j\leqslant n,\\ j\neq 2i-1}} \frac{(-1)^j}{|j-2i+1|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \left(\sum_{j=1}^{2i-2} + \sum_{j=2i}^{2n}\right) \frac{(-1)^j}{|j-2i+1|}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \left(\sum_{j=1}^{2i-2} \frac{(-1)^j}{j} + \sum_{j=1}^{2(n-i)+1} \frac{(-1)^j}{j}\right)$$

Exemple 3 : potentiel d'un cristal de chlorure de sodium

L'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=1}^{2n} q_i V_i = q \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i V_i \\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{2i-1} + \sum_{j=1}^{2(n-i)} + \sum_{j=1}^{2i-2} + \sum_{j=1}^{2(n-i)+1} \right) \frac{(-1)^j}{j} \\ &= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 d} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{2i-2} + \sum_{j=1}^{2i-1} \right) \frac{(-1)^j}{j} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 d} \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j}{j} \end{aligned}$$

Or

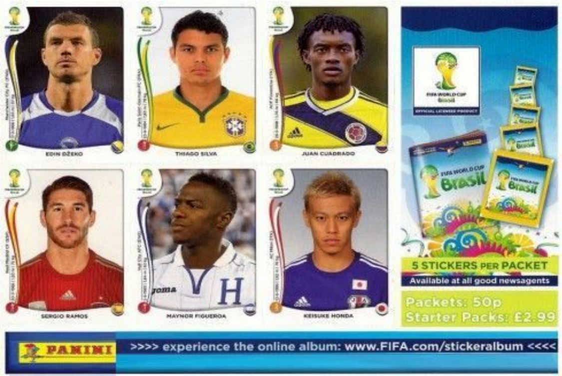
$$\sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j}{j} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\ln(2)$$

d'où

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{q^2 \ln(2)}{\pi\varepsilon_0 d}\, n.}$$

Exemple 4 : le collectionneur de vignettes

Un fan de foot souhaite rassembler une collection de n vignettes de footballers célèbres pour remplir son album FIFA World Cup.



7. Applications

Exemple 4 : le collectionneur de vignettes

Un fan de foot souhaite rassembler une collection de n vignettes de footballers célèbres pour remplir son album FIFA World Cup.

Il peut trouver les vignettes dans des tablettes de chocolat. Chaque tablette contient une vignette (version simplifiée)...

Combien de tablettes de chocolat devra-t-il acheter pour remplir son album au complet ?

Hypothèse : le fournisseur Panini dispose d'un stock comportant une infinité de copies de chaque vignettes.

Exemple 4 : le collectionneur de vignettes

Soit N_k le nombre de tablettes pour obtenir une k^e vignette différente des $(k-1)$ vignettes distinctes déjà en sa possession.

La variable aléatoire $N = N_1 + \cdots + N_n$ représente le nombre nécessaire de tablettes pour obtenir n vignettes différentes.

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots$ suivent des lois géométriques.

La loi de N_k est géométrique de paramètre $(n-k+1)/n$,

$$\mathbb{E}(N_k) = \frac{n}{n-k+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(N_k) = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}.$$

Nombre moyen de tablettes achetées :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} n\,[\ln(n) + \gamma + o(1)]$$

Par exemple, pour acquérir $n = 660$ vignettes, il faudrait acheter $\mathbb{E}(N) \approx 4666$ tablettes...

Exemple 4 : le collectionneur de vignettes

Complément : variance

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(N) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-k)}{k^2} \\ &= n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

donc

$$\mathrm{var}(N) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}\, n^2.$$

8. Et pour finir, une méga-conjecture...

8. Et pour finir, une méga-conjecture...

Définition

La fonction complexe « définie » par $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ est appelée ***fonction zêta de Riemann.***

Conjecture : hypothèse de Riemann, 1859

Les zéros non triviaux de la fonction ζ sont situés sur la droite $\Re e(z) = 1/2$.

L'hypothèse de Riemann est la longitude des mathématiques. En la résolvant, on ouvre la perspective d'établir la carte des eaux brumeuses du vaste océan des nombres. Cela ne constituerait qu'une étape dans notre compréhension de ce secret de la Nature. Si seulement nous pouvions trouver le secret nous permettant de naviguer sur les nombres premiers, qui sait alors ce que nous trouverions au-delà, n'attendant que nous ?

Marcus du Sautoy (La symphonie des nombres premiers, 2003)

8. ...et une giga-gouaillerie !

Bonus track : un Fake-Theorem (Ramanujan,1900)... ou pas !

$$\boxed{\zeta(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k = 1+2+3+4+5+6+\cdots = -\frac{1}{12}\ !}$$

Srinivasa Ramanujan, 1887–1920 

8. ...et une giga-gouaillerie !

Bonus track : un Fake-Theorem (Ramanujan,1900)... ou pas !

$$\boxed{\zeta(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k = 1+2+3+4+5+6+\cdots = -\frac{1}{12}\,!}$$

Fake-Proof. Posons $\begin{cases} S^+ = 1+2+3+4+5+6+\cdots \\ S^- = 1-2+3-4+5-6+\cdots \\ A = 1-1+1-1+1-1+\cdots \end{cases}$

- On a tout d'abord : $\begin{aligned} A &= (1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-A \end{aligned}$

  d'où l'on extrait $A = \frac{1}{2}\ldots$
- Puis : $S^- + A = 2-3+4-5+6-\cdots = 1-S^-$

  d'où l'on tire $S^- = \frac{1}{2}(1-A) = \frac{1}{4}\ldots$
- Enfin : $S^+ - S^- = 4+8+12+16+20+\cdots = 4S^+$

  d'où l'on déduit $S^+ = -\frac{1}{3}S^- = -\frac{1}{12}\ldots$

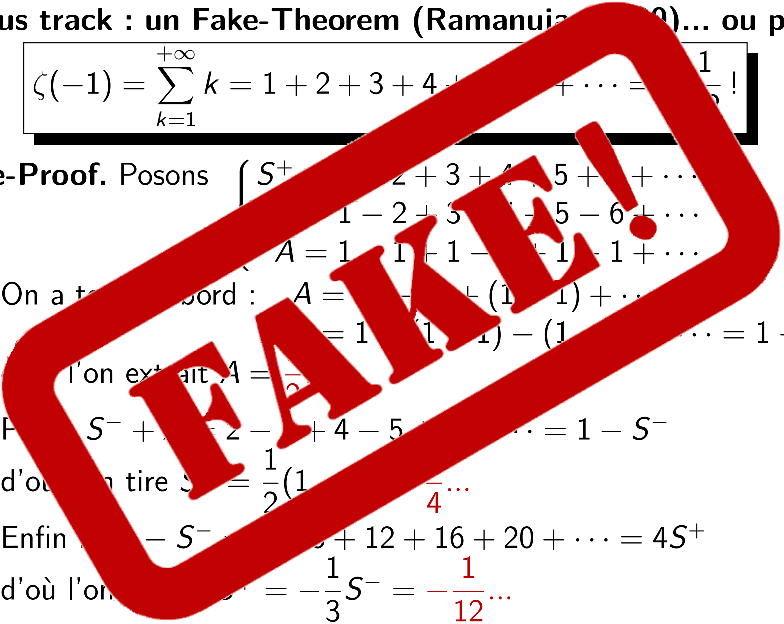
8. ...et une giga-gouaillerie !

Bonus track : un Fake-Theorem (Ramanuja[illegible]0)... ou pas !

$$\boxed{\zeta(-1)=\sum_{k=1}^{+\infty} k = 1+2+3+4+ [illegible] +\cdots = [illegible]\frac{1}{[illegible]}\ !}$$

Fake-Proof. Posons $\left\{\begin{array}{l} S^{+} [illegible] 2+3+4 [illegible] 5+ [illegible] +\cdots \\ [illegible] 1-2+3 [illegible] 5-6+\cdots \\ A = 1 [illegible] 1+1- [illegible] 1 [illegible] 1+\cdots \end{array}\right.$

- On a t[illegible]bord : $A = [illegible] (1 [illegible] 1)+\cdots$
  $= 1 [illegible] (1 [illegible] 1)-(1 [illegible] \cdots = 1-A$
  [illegible] l'on ext[illegible]ait $A = [illegible]$
- P[illegible] $S^{-} + [illegible] 2 - [illegible] + 4 - 5 [illegible] \cdots = 1 - S^{-}$
  d'o[illegible] tire $S[illegible] = \frac{1}{2}(1 [illegible] \frac{[illegible]}{4}\ldots$
- Enfin [illegible] $- S^{-}$ [illegible] $+12+16+20+\cdots = 4S^{+}$
  d'où l'on [illegible] $= -\frac{1}{3}S^{-} = -\frac{1}{12}\ldots$



8. ...et une giga-gouaillerie !

Bonus track : un Fake-Theorem (Ramanujan,1900)... ou pas !

$$\boxed{\zeta(-1)=\sum_{k=1}^{+\infty}k=1+2+3+4+5+6+\cdots=-\frac{1}{12}\ !}$$

Another way of finding the constant is as follows — Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then $C = 1+2+3+4+\&c$

$\therefore 4C = \quad 4 \quad + 8 \quad + \&c$

$\therefore -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$.

$\therefore C = -\frac{1}{12}$.

8. ...et une giga-gouaillerie !

Bonus track : un Fake-Theorem (Ramanujan,1900)... ou pas !

$$\boxed{\zeta(-1)=\sum_{k=1}^{+\infty}k=1+2+3+4+5+6+\cdots=-\frac{1}{12}\ !}$$

Explication.

La formule $\zeta(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$ définit la fonction ζ seulement sur le demi-plan $\{z\in\mathbb{C}:\Re e(z)>1\}$. Elle est prolongeable par analycité à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\zeta(1-z)=\frac{2}{(2\pi)^z}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(z)\zeta(z)$$

où Γ est une fonction eulérienne... $(\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!)$
Pour $z=2$:

$$\zeta(-1)=-\frac{1}{2\pi^2}\zeta(2)=-\frac{1}{2\pi^2}\times\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}.$$

MERCI !

MERCI DE VOTRE INFRANGIBLE PATIENCE !