INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Symbole Σ

Sommaire

1. Définition

1. Définition

Définition (Symbole « sigma »)

Soit p, q deux entiers tels que $p \leqslant q$ et des nombres $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_q$ réels ou complexes. On note

$$\sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{i=p}^{i=q} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q.$$

Remarque

- L'indice i est *muet* et peut être remplacé par n'importe quel autre indice excepté p et q :

$$\sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{j=p}^{q} u_j = \sum_{x=p}^{q} u_x = \sum_{\smiley=p}^{q} u_{\smiley} = \cdots$$

- La somme $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} u_i$ contient $q - p + 1$ termes.

1. Définition

Exemples

- $1+2^3+3^3+\cdots+150^3=\sum_{i=1}^{150} i^3$
- $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{66}=\sum_{i=3}^{33}\frac{1}{2i}$
- $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{29}=\sum_{i=0}^{14}\frac{(-1)^i}{2i+1}$
- $\sum_{k=0}^{30}(-1)^k=\underbrace{1-1+1-1+\cdots+1}_{31\text{ termes}}=1$
- $\sum_{k=0}^{n+2}5=\underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{n+3\text{ termes}}=5(n+3)$

1. Définition

Exemples (Écritures décimale et binaire)

Tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ se décompose de manière unique selon

- $$n = \sum_{i=0}^{p} d_i.10^i = (d_p d_{p-1} d_{p-2} \dots d_2 d_1 d_0)_{10}$$

  où $p \in \mathbb{N}$ et les d_i, $0 \leqslant i \leqslant p$, sont des *chiffres* (ou *« digits »*) : $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ avec $d_p \neq 0$. On écrit usuellement

  $$n = d_p d_{p-1} d_{p-2} \dots d_2 d_1 d_0;$$

  d_0 est le chiffre des *unités*, d_1 celui de *dizaines*, d_2 celui des *centaines*, etc.

- $$n = \sum_{i=0}^{q} b_i.2^i = (b_q b_{q-1} b_{q-2} \dots b_2 b_1 b_0)_2$$

  où $q \in \mathbb{N}$ et les b_i, $0 \leqslant i \leqslant q$ sont des *chiffres binaires* (ou *« bits »*) : $b_i \in \{0, 1\}$ avec $b_q \neq 0$.

1. Définition

Exemples (Fonctions polynomiales)

Une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i . x^i = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + a_{d-2} x^{d-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où $d \in \mathbb{N}$ est le *degré* de P et les a_i sont des *coefficients* réels avec $a_d \neq 0$.
a_0 est le terme constant de P : $a_0 = P(0)$.

2. Règles de calcul

2. Règles de calcul

Règle 1 (« Linéarité »)

Soit α, $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_q$ *et* $v_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_q$ *des nombres réels ou complexes. On a*

$$\sum_{i=p}^{q}(u_i + v_i) = \sum_{i=p}^{q} u_i + \sum_{i=p}^{q} v_i$$

$$\sum_{i=p}^{q}(\alpha \cdot u_i) = \alpha \cdot \sum_{i=p}^{q} u_i$$

En effet :

- grâce à la *commutativité* et l'*associativité*,
  $(u_p + v_p) + (u_{p+1} + v_{p+1}) + (u_{p+2} + v_{p+2}) + \cdots + (u_q + v_q)$
  $= (u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q) + (v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_q)$
- grâce à la *distributivité*,
  $(\alpha \cdot u_p) + (\alpha \cdot u_{p+1}) + (\alpha \cdot u_{p+2}) + \cdots + (\alpha \cdot u_q)$
  $= \alpha \cdot (u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q)$

2. Règles de calcul

Exemples

- $$\sum_{p=1}^{n} p \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) n \neq k \left(\sum_{k=1}^{n} n\right)$$
- $$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} jk = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} jk\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{k=1}^{n} k\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$$
  $$= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$$

Remarque (Somme double (facultatif))

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} u_{ij} = \begin{array}{l} \quad u_{11} + u_{12} + u_{13} + \cdots + u_{1q} \\ + u_{21} + u_{22} + u_{23} + \cdots + u_{2q} \\ + \cdots \\ + u_{p1} + u_{p2} + u_{p3} + \cdots + u_{pq} \end{array} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} u_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p} u_{ij}\right)$$

Règle 2 (« Translation » et « inversion » d'indice)

Soit p, q des entiers tels que $p \leqslant q$ et $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_q$ des nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{i=0}^{q-p} u_{i+p} \qquad \sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{i=p}^{q} u_{p+q-i}$$

En effet :

- $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q$
  $= u_{p+0} + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{p+(q-p)}$
- grâce à la *commutativité* et l'*associativité*,
  $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q = u_q + u_{q-1} + u_{q-2} + \cdots + u_p$
  $= u_{(p+q)-p} + u_{(p+q)-(p+1)} + u_{(p+q)-(p+2)} + \cdots + u_{(p+q)-q}$

Exemples

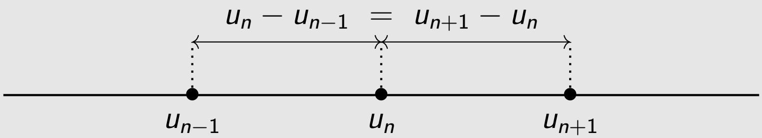
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_{j+2} = \sum_{k=2}^{n+2} u_k$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n+k+1} = \sum_{p=n+1}^{2n} u_p$

Suites arithmétiques

2. Règles de calcul — Suites arithmétiques

Définition (Suite arithmétique)

Une suite ***arithmétique*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite vérifiant la relation, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$.



Proposition (Écriture explicite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique.*

- *En posant* $r = u_1 - u_0$, *on a la relation de récurrence suivante : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- *Explicitement : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = rn + u_0$.

Théorème (Somme)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique et* $p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $p \leqslant q$. *On a*

$$\boxed{\sum_{i=p}^{q} u_i = \frac{1}{2}(q-p+1)(u_p+u_q)}$$

« La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes dans la somme multiplié par la moyenne des deux termes extrêmes de la somme »

En effet : posons $S_{p,q} = \sum_{i=p}^{q} u_i$.

$$\begin{array}{l} S_{p,q} = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{q-2} + u_{q-1} + u_q \\ S_{p,q} = u_q + u_{q-1} + u_{q-2} + \cdots + u_{p+2} + u_{p+1} + u_p \\ \hline 2S_{p,q} = (u_p+u_q)+(u_{p+1}+u_{q-1})+(u_{p+2}+u_{q-2})+\cdots+(u_{q-2}+u_{p+2})+(u_{q-1}+u_{p+1})+(u_q+u_p) \end{array}$$

Or $u_{p+1} = u_p + r$, $u_{p+2} = u_p + 2r \ldots$ et $u_{q-1} = u_q - r$, $u_{q-2} = u_q - 2r \ldots$

donc $u_p + u_q = u_{p+1} + u_{q-1} = u_{p+2} + u_{q-2} = \cdots = u_q + u_p$

et $2S_{p,q} = (q-p+1)(u_p+u_q)$.

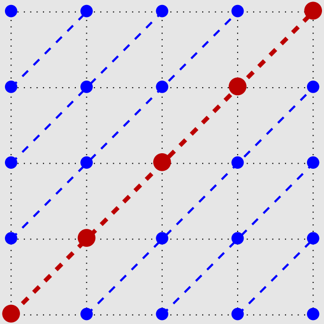
Ou encore, avec les $\sum$: à l'aide de la symétrie d'indice $j = p + q - i$,

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{j=p}^{q} u_{p+q-j} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=p}^{q} u_i + \sum_{j=p}^{q} u_{p+q-j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{q}(u_i + u_{p+q-i}) = \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{q}(u_p + u_q) = \frac{1}{2}(q-p+1)(u_p+u_q) \end{aligned}$$

Corollaire (Somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)}$$



Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

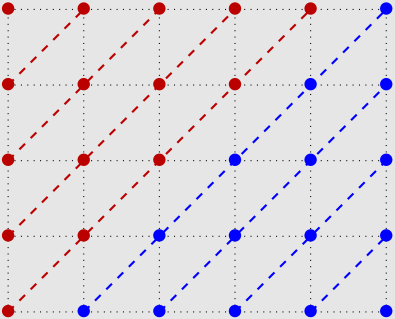
Dans le carré de n^2 points, la diagonale contient n points et sépare deux triangles de part et d'autres contenant chacun S_{n-1} points.

D'où l'équation $2S_{n-1} + n = n^2$, donnant $S_{n-1} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Corollaire (Somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)}$$



Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

Le rectangle de $n(n+1)$ points est constitué de deux triangles contenant chacun S_n points.

D'où l'équation $2S_n = n(n+1)$, donnant $S_n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Exemple

La suite $(2n-4)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2, donc pour $n \geqslant 10$:

$$\sum_{i=10}^{n}(2i-4) = \frac{1}{2}(n-9)\big(16+(2n-4)\big) = (n+6)(n-9)$$

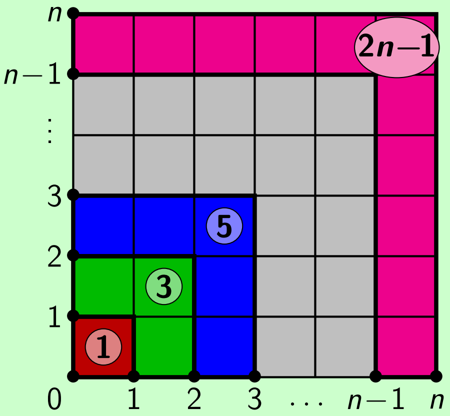
Ou encore, par linéarité :

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{n}(2i-4) &= 2\sum_{i=10}^{n} i - \sum_{i=10}^{n} 4 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{9} i\right) - 4(n-9)\\ &= 2\Big(\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}\times 9\times 10\Big) - 4(n-9) = n^2-3n-54\\ &= (n+6)(n-9)\end{aligned}$$

Exemple (Somme des premiers entiers impairs)

La suite $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 2, donc pour $n \geqslant 1$:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{1}{2}n\big(1+(2n-1)\big) \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2}$$

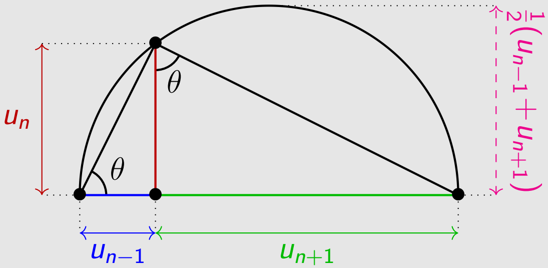


Le grand carré (de côté n) contient n^2 carrés unitaires (de côté 1). Il se décompose en n équerres-talons contenant chacune $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ carrés unitaires.

Suites géométriques

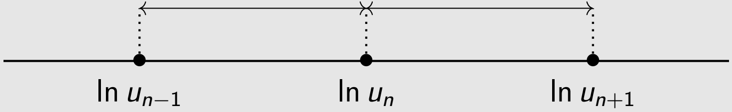
Définition (Suites géométriques)

*Une suite **géométrique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$.*



$$\tan\theta = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

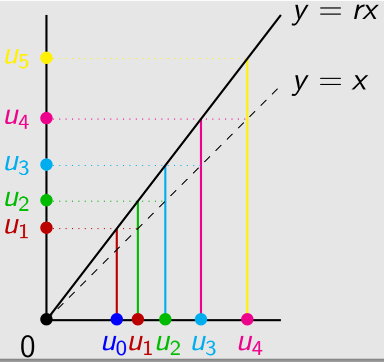
$$\ln u_n - \ln u_{n-1} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$$



Proposition (Écriture explicite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique telle que* $u_0 \neq 0$.

- *En posant* $r = u_1/u_0$, *on a la relation de récurrence suivante : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ru_n$.
- *Explicitement : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 r^n$.



Théorème (Somme)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $r \neq 1$ *et* $p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $p \leqslant q$*. On a*

$$\boxed{\sum_{i=p}^{q} u_i = \frac{u_p - u_{q+1}}{1-r} = u_p \frac{1-r^{q-p+1}}{1-r}}$$

« La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est égale au quotient de la différence entre le premier terme de la somme et le premier terme omis par un moins la raison de la suite »

En effet : posons $S_{p,q} = \sum_{i=p}^{q} u_i$.

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \cdots + u_{q-1} + u_q \\ rS_{p,q} &= ru_p + ru_{p+1} + ru_{p+2} + \cdots + ru_{q-2} + ru_{q-1} + ru_q \end{aligned}$$

Or $ru_p = u_{p+1}$, $ru_{p+1} = u_{p+2}$, $ru_{p+2} = u_{p+3} \dots$ et $ru_{q-2} = u_{q-1}$, $ru_{q-1} = u_q$, $ru_q = u_{q+1}$ donc

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \cdots + u_{q-1} + u_q \\ rS_{p,q} &= u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \cdots + u_{q-1} + u_q + u_{q+1} \\ \hline (1-r)S_{p,q} &= u_p \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - u_{q+1} \end{aligned}$$

Ou encore, avec les $\sum$: par linéarité et translation d'indice $j = i+1$,

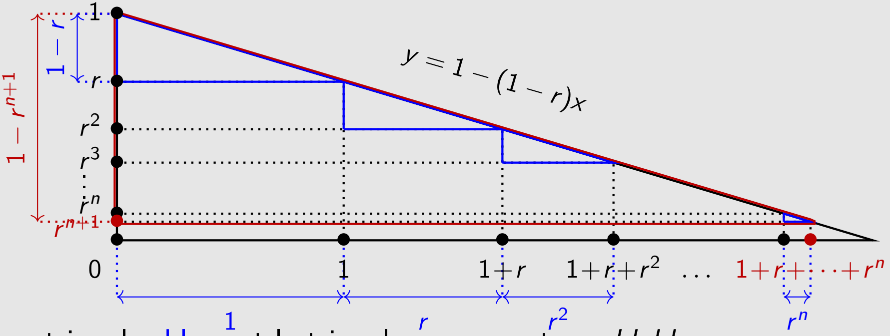
$$rS_{p,q} = r\sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{i=p}^{q} ru_i = \sum_{i=p}^{q} u_{i+1} = \sum_{j=p+1}^{q+1} u_j$$

$$(1-r)S_{p,q} = \sum_{i=p}^{q} u_i - \sum_{i=p+1}^{q+1} u_i = \left(u_p + \sum_{i=p+1}^{q} u_i\right) - \left(\sum_{i=p+1}^{q} u_i + u_{q+1}\right) = u_p - u_{q+1}$$

Corollaire (Somme des premières puissances)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} r^i = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1} & \text{si } r \neq 1 \\ n+1 & \text{si } r = 1 \end{cases}}$$

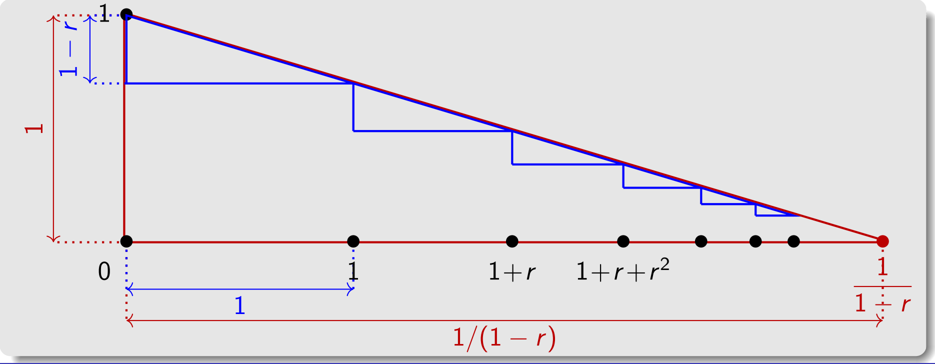


Les triangles bleus et le triangle rouge sont *semblables.*

Remarque (Série géométrique)

Pour tout $r \in \mathbb{C}$ tel que $|r| < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} r^i = \dfrac{1}{1-r}$. On note

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}}$$



Exemples

- La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2, donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

- La suite $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Remarque : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2$ et l'on note

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 2$$

Exemples

- La suite $\left(\frac{1}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1/4$, donc :

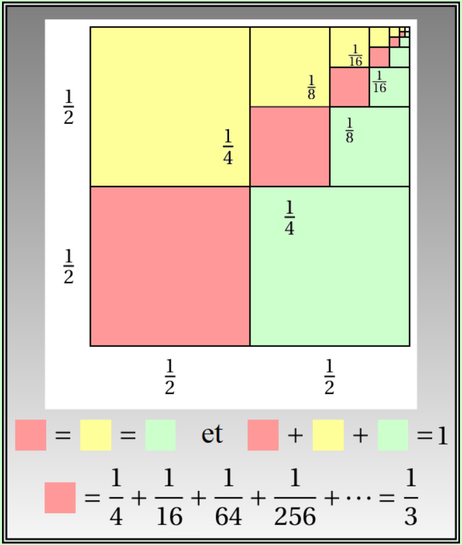
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{4^i}=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Remarque : on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{4^i}=\frac{4}{3}$ et l'on note

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{4^i}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}$$

Exemples

-



Exemples

- La suite $\left(\frac{9}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$, donc pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = 0.\underbrace{999\cdots 9}_{n \text{ chiffres } 9} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

  Remarque : on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{9}{10^i} = 1$ et l'on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{9}{10^i} = 0.999\cdots = 1$$

  Le nombre réel dont le développement décimal illimité est $0.999\cdots$ *vaut* 1...

Exemples

- Remarquant que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1, on a :

$$\sum_{i=0}^{30}(-1)^i = \frac{1-(-1)^{31}}{1-(-1)} = 1$$

- Partant de $\frac{2^{5i-31}}{7^{2i+1}} = \frac{1}{7\times 2^{31}}\left(\frac{32}{49}\right)^i$ et remarquant que la suite $\left(\left(\frac{32}{49}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{32}{49}$, on a pour $n\in\mathbb{N}$:

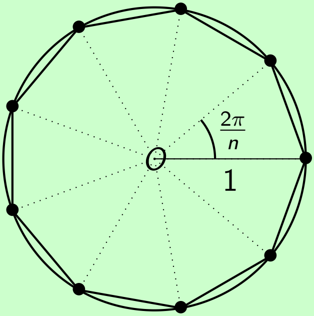
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{2^{5i-31}}{7^{2i+1}} = \frac{1}{7\times 2^{31}}\frac{1-\left(\frac{32}{49}\right)^{n+1}}{1-\frac{32}{49}} = \frac{7}{17\times 2^{31}}\left(1-\left(\frac{32}{49}\right)^{n+1}\right)$$

Exemple (Exponentielle complexe)

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Remarquant que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k$, on voit que la suite $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. De plus, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{n}} = 1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} \neq 1$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = 0}$$



Les points d'affixes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, constituent un *polygone régulier* de centre de gravité O.

Corollaire (Différence de deux puissances)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous nombres a, b :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1} \end{aligned}$$

En effet :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1} = b^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i = b^{n-1} \times \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

Exemples

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \end{aligned}$$

Exemple (Dérivée de la fonction puissance)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = x^n$.

Calculons le nombre dérivé $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-1} \\ &\xrightarrow[x \to x_0]{} n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

d'où l'on tire $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

Regroupement de termes

Règle 3 (Regroupement de termes)

Soit $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ *et* $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ *des nombres réels ou complexes.*

On considère la suite « entrecroisée » $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots, u_n, v_n$ *que l'on notera* $w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_{2n-1}, w_{2n}$*, soit, pour* $1 \leqslant i \leqslant 2n$ *:*

$$w_i = \begin{cases} u_{(i+1)/2} & \text{si } i \text{ est impair} \\ v_{i/2} & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{et réciproquement, pour } 1 \leqslant p \leqslant n : \begin{cases} u_p = w_{2p-1} \\ v_p = w_{2p} \end{cases}$$

On a

$$\sum_{i=1}^{2n} w_i = \sum_{p=1}^{n} (u_p + v_p) = \sum_{p=1}^{n} u_p + \sum_{p=1}^{n} v_p$$

En effet : grâce à la *commutativité* et l'*associativité*,

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots + w_{2n-1} + w_{2n} \\ &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \cdots + (u_n + v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n) \end{aligned}$$

Corollaire (Somme « alternée »)

Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ *des nombres réels ou complexes. On a*

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i u_i = \sum_{p=1}^{n} u_{2p} - \sum_{p=1}^{n} u_{2p-1}$$

Exemple

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10}\left(2-3(-1)^i\right)^i &= \sum_{p=1}^{5}\left(2-3(-1)^{2p-1}\right)^{2p-1} + \sum_{p=1}^{5}\left(2-3(-1)^{2p}\right)^{2p} \\
&= \sum_{p=1}^{5} 5^{2p-1} + \sum_{p=1}^{5}(-1)^{2p} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{p=1}^{5} 25^p + \sum_{p=1}^{5} 1 \\
&= 5 \times \frac{25^5-1}{24} + 5 = 2034510
\end{aligned}$$

Sommes télescopiques

Règle 4 (Somme « télescopique »)

Soit p, q des entiers tels que $p \leqslant q$ et $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_q$ des nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{i=p+1}^{q} (u_i - u_{i-1}) = u_q - u_p$$

$$\sum_{i=p}^{q-1} (u_i - u_{i+1}) = u_p - u_q$$

En effet :

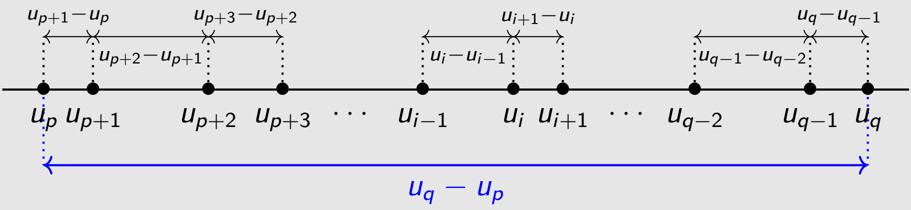
- grâce à la *commutativité* et l'*associativité*,
  $$(u_{p+1} - \boldsymbol{u_p}) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \cdots$$
  $$+ (u_{q-2} - u_{q-3}) + (u_{q-1} - u_{q-2}) + (\boldsymbol{u_q} - u_{q-1}) = \boldsymbol{u_q} - \boldsymbol{u_p}$$
- grâce à l'*associativité*,
  $$(\boldsymbol{u_p} - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_{p+2}) + (u_{p+2} - u_{p+3}) + \cdots$$
  $$+ (u_{q-3} - u_{q-2}) + (u_{q-2} - u_{q-1}) + (u_{q-1} - \boldsymbol{u_q}) = \boldsymbol{u_p} - \boldsymbol{u_q}$$

Règle 4 (Somme « télescopique »)

Soit p, q des entiers tels que $p \leqslant q$ et $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_q$ des nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{i=p+1}^{q} (u_i - u_{i-1}) = u_q - u_p$$

$$\sum_{i=p}^{q-1} (u_i - u_{i+1}) = u_p - u_q$$



Exemples

- $$\sum_{i=3}^{n}\left(\sqrt{i}-\sqrt{i+1}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{n+1}$$
- Partant de $\dfrac{1}{i(i+1)}=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}$:

  $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

  Remarque : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=1.$

  On note $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}=1.$

Exemple

- Partant de $\dfrac{1}{i(i+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{3n^2+5n}{4(n^2+3n+2)}
\end{aligned}$$

Exemple

- Partant de $\dfrac{1}{i(i+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i}\right) - \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{3n^2 + 5n}{4(n^2 + 3n + 2)}
\end{aligned}$$

Exemple (Somme des premiers entiers)

- Partant de $(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Big((i+1)^2 - i^2 - 1\Big)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\Big((i+1)^2 - i^2\Big) - \sum_{i=1}^{n} 1\right]\\ &= \frac{1}{2}\Big((n+1)^2 - 1 - n\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(n^2 + n\Big)\end{aligned}$$

On retrouve
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

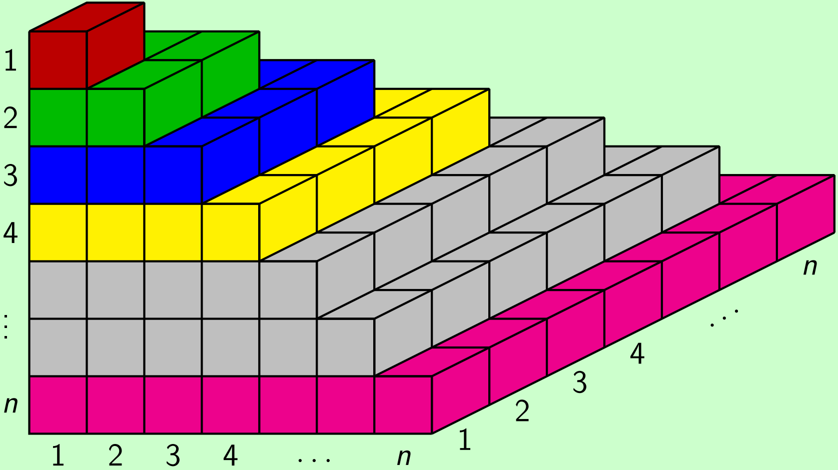
Exemple (Somme des premiers carrés)

- Partant de $(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\Big((i+1)^3 - i^3 - 3i - 1\Big) \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{n}\Big((i+1)^3 - i^3\Big) - 3\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right] \\
&= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)
\end{aligned}$$

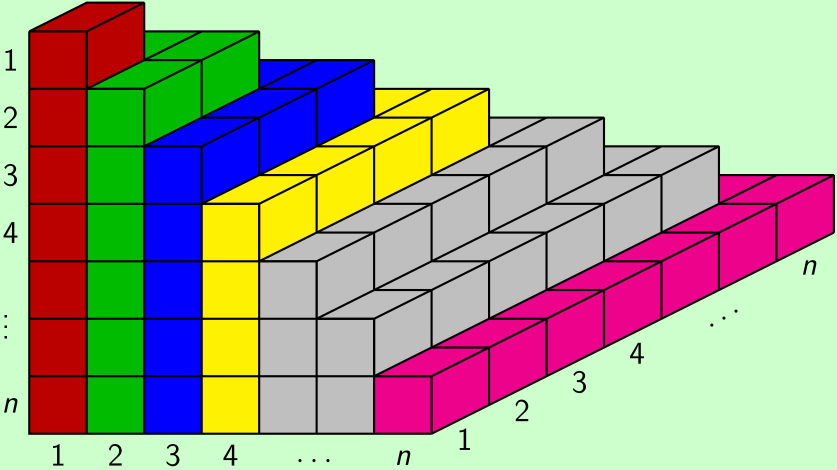
On obtient : $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

Exemple (Somme des premiers carrés — illustration 1)



La pyramide se décompose en n plaques horizontales contenant chacune $1, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$ cubes.

Exemple (Somme des premiers carrés — illustration 1)



La pyramide se décompose en n barres-équerres-talons contenant chacune $n, 3(n-1), 5(n-2), 7(n-3), \dots, 2n-1$ cubes.

Exemple (Somme des premiers carrés)

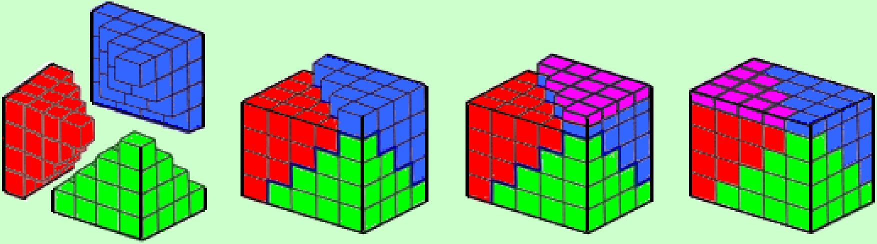
L'équivalence des deux décompositions fournit l'identité

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = n+3(n-1)+5(n-2)+7(n-3)+\cdots+(2n-1)$$

soit
$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1}(2i+1)(n-i) \\
&= n\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1) - 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= n \times n^2 - 2(S_n - n^2) - \frac{1}{2}n(n-1) \\
&= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2S_n
\end{aligned}$$

d'où
$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Exemple (Somme des premiers carrés — illustration 2)



En rassemblant les trois pyramides contenant chacune S_n cubes, on forme un parallélépipède rectangle dont les bases contiennent n, $n+1$ et $n+1/2$ cubes. Son volume est $3S_n = n(n+1)(n+1/2)$. D'où

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+1/2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Exemple (Somme des premiers cubes)

- Partant de $(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\Big((i+1)^4 - i^4 - 6i^2 - 4i - 1\Big) \\
&= \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}\Big((i+1)^4 - i^4\Big) - 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right] \\
&= \frac{1}{4}\Big((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(n^4 + 2n^3 + n^2\Big)
\end{aligned}$$

On obtient : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2}$

Exemple (Somme des premiers cubes)

- Montrons *par récurrence* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.

  Posons $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

  - ***Initialisation.*** On a $T_1 = S_1 = 1$ donc $T_1 = S_1^2$ et la propriété est vérifiée au rang 1.

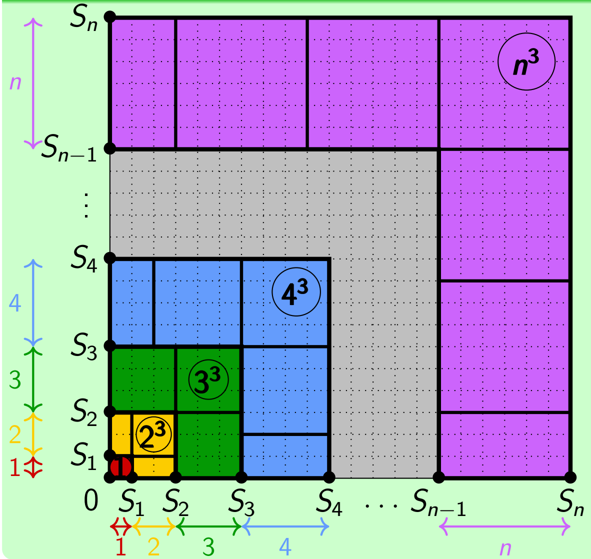
  - ***Hérédité.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons la propriété vraie au rang n : $T_n = S_n^2$. On a $T_{n+1} = T_n + (n+1)^3$ et $S_{n+1} = S_n + (n+1)$, puis

$$\begin{aligned} T_{n+1} - S_{n+1}^2 &= \left(T_n + (n+1)^3\right) - \left(S_n + (n+1)\right)^2 \\ &= \left(T_n - S_n^2\right) + \left((n+1)^3 - (n+1)^2 - 2(n+1)S_n\right) \\ &= n(n+1)^2 - 2(n+1)S_n = 0 \end{aligned}$$

    donc la propriété est vraie au rang $n+1$: $T_{n+1} = S_{n+1}^2$.

  - ***Conclusion.*** La propriété est vraie à tout rang $\geqslant 1$.

Exemple (Somme des premiers cubes — illustration 1)

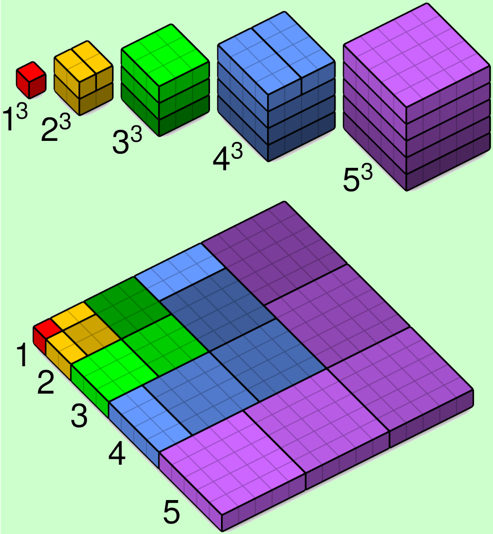


Le grand carré (de côté S_n) contient S_n^2 carrés unitaires (de côté 1).

Il se décompose en n équerres-talons contenant chacune $1, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ carrés unitaires.

Il contient donc T_n carrés unitaires : $T_n = S_n^2$.

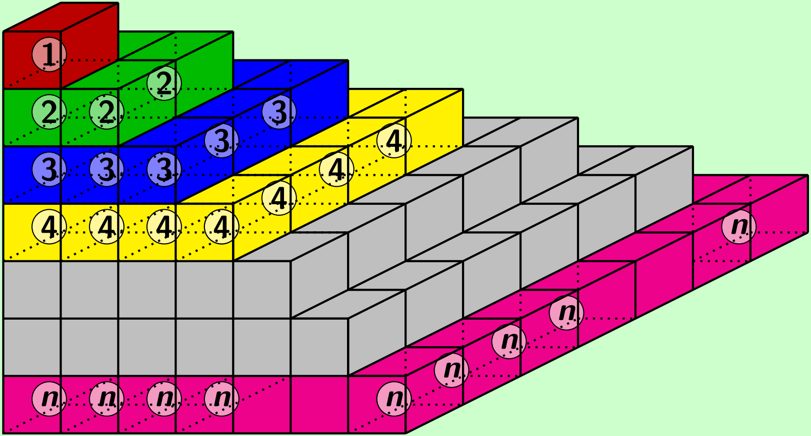
Exemple (Somme des premiers cubes — illustration 1)



Chaque gros cube contient $1, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ cubes unités répartis sur $1, 2, 3, 4, \dots, n$ plaques carrées, chacunes composant les équerres-talons.

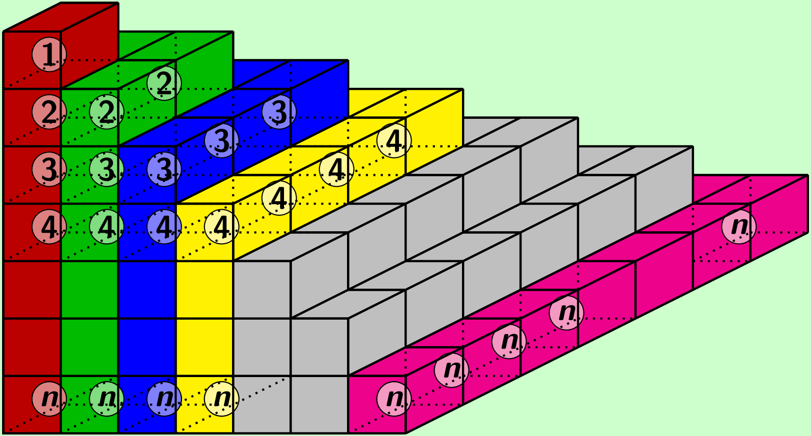
- Lorsque le nombre de plaques est **impair** $(2p+1)$: p plaques superposées (resp. juxtaposées en ligne) constituent la hauteur (resp. largeur) de l'équerre, 1 dernière plaque réalise l'angle de l'équerre
- Lorsque le nombre de plaques est **pair** $(2p)$: $p-1$ plaques superposées en hauteur (resp. juxtaposées en ligne) constituent la hauteur (resp. largeur) de l'équerre, 1 plaque réalise l'angle, 1 dernière plaque est divisée en deux et complète les extrémités.

Exemple (Somme des premiers cubes — illustration 2)



La pyramide se décompose en n plaques horizontales contenant chacune $1, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$ cubes, contenant chacun $1, 2, 3, 4, \dots, n$ unités, soit n plaques contenant $1, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ unités.

Exemple (Somme des premiers cubes — illustration 2)



La pyramide se décompose en n barres-équerres-talons contenant chacune S_n, $3(S_n - S_1)$, $5(S_n - S_2)$, $7(S_n - S_3)$, …, $(2n-1)(S_n - S_{n-1})$ unités.

Exemple (Somme des premiers cubes)

L'équivalence des deux décompositions fournit l'identité

$$1+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$$
$$=S_n+3(S_n-S_1)+5(S_n-S_2)+7(S_n-S_3)+\cdots+(2n-1)(S_n-S_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
\text{soit }\ T_n=\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \sum_{i=0}^{n}(2i+1)(S_n-S_i) \qquad \text{(en posant } S_0=0)\\
&= S_n\sum_{i=0}^{n}(2i+1)-\sum_{i=0}^{n} i(i+1)\left(i+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\times(n+1)^2-\sum_{i=0}^{n} i^3-\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)^3-T_n-\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n(n+1)\\
&= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2-T_n
\end{aligned}$$

d'où
$$T_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

3. Application aux probabilités

Définition (Moyenne, variance, écart-type)

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$: $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On définit :

- *son **espérance** :*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}$$

- *sa **variance** :*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \big(x_i - \mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= p_1\big(x_1 - \mathbb{E}(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - \mathbb{E}(X)\big)^2 + \cdots + p_n\big(x_n - \mathbb{E}(X)\big)^2\end{aligned}}$$

- *son **écart-type** :*

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$$

Corollaire (Variance)

La variance peut aussi s'exprimer selon

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \big(x_i - \mathbb{E}(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(x_i^2 - 2\mathbb{E}(X)x_i + (\mathbb{E}(X))^2\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\mathbb{E}(X)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2
\end{aligned}$$

3. Application aux probabilités

Exemple (Loi uniforme discrète)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Elle prend donc les valeurs $1, 2, \ldots, n$ avec probabilité $1/n$.

- **Espérance** : on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$. À l'aide de $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$, on obtient
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}}$$
- **Variance** : on a $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n}$. À l'aide de $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ on trouve $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$ puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4}(n+1)^2$ soit
$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}(n^2 - 1)}$$

4. Application à la statistique

4. Application à la statistique

Définition (Moyenne, variance, écart-type)

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une suite de données. On définit :*

- *sa **moyenne** :*

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$$

- *sa **variance** :*

$$\boxed{v_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\Big((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\Big)}$$

- *son **écart-type** :*

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{v_x}}$$

4. Application à la statistique

Corollaire (Variance)

La variance peut aussi s'exprimer selon

$$\boxed{v_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2
\end{aligned}$$

4. Application à la statistique

Proposition (Transformation affine)

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une suite de données et a, b deux réels. On définit pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $y_i = a\,x_i + b$.
La moyenne et l'écart-type de la suite de données $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ s'expriment selon

$$\boxed{\overline{y} = a\,\overline{x} + b \quad \text{et} \quad \sigma_y = |a|\sigma_x}$$

En effet :

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a\,x_i + b) = \frac{1}{n}\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} b\right) = a\,\overline{x} + b$$

$$v_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{a^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = a^2 v_x$$

Exemple (Transformation affine)

Lors d'un examen, les notes d'un groupe de 10 étudiants sont les suivantes : x : 10,5 13 6 7 9,5 18 15 5,5 10 8

- La moyenne et l'écart-type de cette série de notes valent :

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(10{,}5+13+6+7+9{,}5+18+15+5{,}5+10+8) = 10{,}25$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} (10{,}5-10{,}25)^2+(13-10{,}25)^2+(6-10{,}25)^2+(7-10{,}25)^2+(9{,}5-10{,}25)^2 \\ +(18-10{,}25)^2+(15-10{,}25)^2+(5{,}5-10{,}25)^2+(10-10{,}25)^2+(8-10{,}25)^2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}84$$

- On souhaite porter la moyenne à 11 et l'écart-type à 3 via une transformation affine de la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b vérifient les équations $\overline{y} = a\,\overline{x} + b$ et $\sigma_y = a\,\sigma_x$, soit $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \approx 0{,}78$ puis $b = \overline{y} - a\,\overline{x} \approx 2{,}98$. D'où les notes harmonisées :

y : 11,2 13,1 7,7 8,5 10,4 17,1 14,7 7,3 10,8 9,2

4. Application à la statistique

Regroupement de deux suites : à partir de deux suites de données

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

on construit la suite regroupée

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+n})$$

Proposition (Moyenne de z)

La moyenne de z s'exprime selon

$$\boxed{\overline{z} = \frac{m\,\overline{x} + n\,\overline{y}}{m+n}}$$

En effet :

$$\overline{z} = \frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{m+n} z_k = \frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \frac{1}{m+n}(m\,\overline{x} + n\,\overline{y})$$

4. Application à la statistique

Proposition (Variance de z)

La variance de z s'exprime selon

$$\boxed{v_z = v_{intra} + v_{inter}}$$

où

$$v_{intra} = \frac{mv_x + nv_y}{m+n}$$

$$v_{inter} = \frac{m(\overline{z} - \overline{x})^2 + n(\overline{z} - \overline{y})^2}{m+n} = \frac{mn}{(m+n)^2}(\overline{x} - \overline{y})^2$$

v_{intra} *est la variance* ***dans*** *les groupes,*

v_{inter} *est la variance* ***entre*** *les groupes.*

4. Application à la statistique

En effet :

$$v_z = \frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{m+n}(z_k - \overline{z})^2 = \frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{z})^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{z})^2\right)$$

On a, remarquant que $\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{z})^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left((x_i - \overline{x}) + \frac{n}{m+n}(\overline{x} - \overline{y})\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 + \frac{2n}{m+n}(\overline{x} - \overline{y})\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x}) + \frac{mn^2}{(m+n)^2}(\overline{x} - \overline{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 + \frac{mn^2}{(m+n)^2}(\overline{x} - \overline{y})^2\end{aligned}$$

De même : $\sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{z})^2 = \sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{y})^2 + \frac{m^2 n}{(m+n)^2}(\overline{x} - \overline{y})^2$

D'où le résultat en ajoutant les sommes $\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{z})^2$ et $\sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{z})^2$.