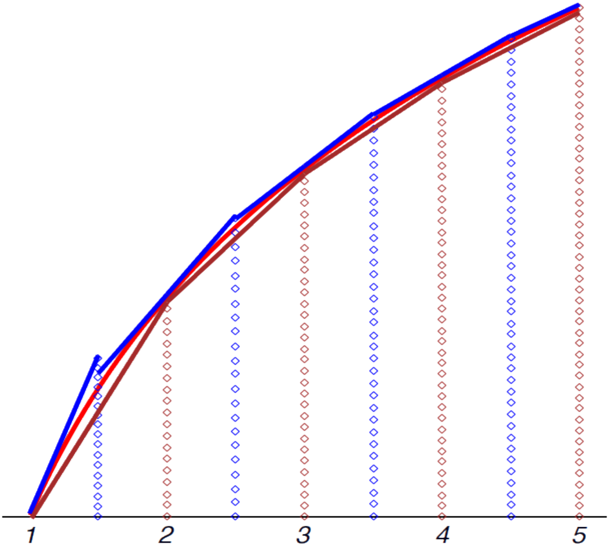
INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Formule de Stirling

1. À l'aide de la concavité de la fonction logarithme

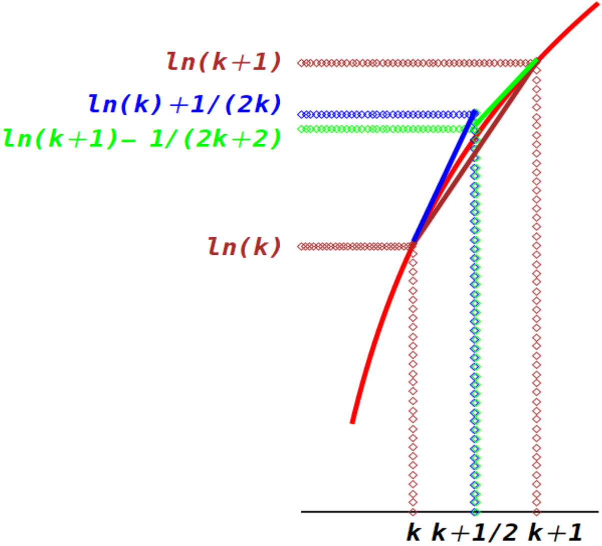
1. À l'aide de la concavité de la fonction ln

Encadrement de la courbe de ln entre ses cordes et ses tangentes



1. À l'aide de la concavité de la fonction ln

Zoom entre k et (k+1)



1. À l'aide de la concavité de la fonction ln

1. ***Corde entre k et (k+1)***
   - aire du trapèze correspondant : $\frac{1}{2}[\ln(k)+\ln(k+1)]$

2. ***Tangente en k***
   - équation de la tangente : $y=\frac{1}{k}\,(x-k)+\ln(k)$
   - hauteur en $k+1/2$: $\ln(k)+\frac{1}{2k}$
   - aire du trapèze correspondant : $\frac{1}{4}\left[2\ln(k)+\frac{1}{2k}\right]$

3. ***Tangente en (k+1)***
   - équation de la tangente : $y=\frac{1}{k+1}\,(x-k-1)+\ln(k+1)$
   - hauteur en $k+1/2$: $\ln(k+1)-\frac{1}{2(k+1)}$
   - aire du trapèze correspondant : $\frac{1}{4}\left[2\ln(k+1)-\frac{1}{2(k+1)}\right]$

4. ***Un encadrement***

On a

$$\frac{1}{2}\left[\ln(k)+\ln(k+1)\right] < \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\left[\ln(k)+\ln(k+1)\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right].$$

On somme de 1 à $(n-1)$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(k)+\ln(k+1)\right] < \int_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(k)+\ln(k+1)\right] + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right].$$

4 *Un encadrement*

Or

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = n\ln(n) - n + 1,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[\ln(k)+\ln(k+1)] = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{n},$$

d'où

$$\ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) < n\ln(n) - n + 1 < \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

soit encore

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \frac{7}{8} + \frac{1}{8n} < \ln(n!) < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1.$$

4. ***Un encadrement***

Comme

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)-n=\ln\left(n^{n+1/2}e^{-n}\right),$$

on trouve que

$$\boxed{\frac{7}{8}<\ln\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right)<1.}$$

Posons donc

$$u_n=\ln\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée**.

2. Variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a posé

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. ***Accroissements de u_n***

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left[\frac{e\, n^{n+1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}\right] = -\left(n + \frac{1}{2}\right) f(n)$$

avec

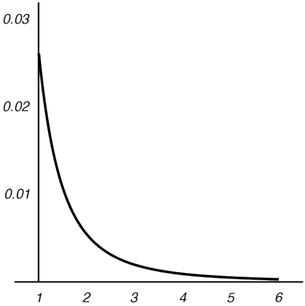
$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}.$$

2. ***Variations de f***

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{4x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} < 0.$$

❸ *Tableau de variations de f*

	1		$+\infty$
f'		$-$	
f		$+$ $\searrow$	0



- $f' < 0$ donc f est **décroissante**.
- De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\boldsymbol{f > 0}$.

4. ***Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$***

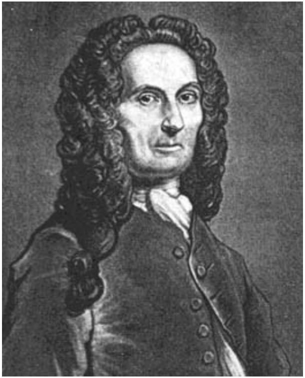
On a
$$u_{n+1} - u_n = -f(n) < 0.$$
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.
D'autre part elle est **minorée**, elle est donc **convergente**.

On a obtenu
$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right) = \ell \in [7/8, 1]$$

2. Variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ce qui prouve l'existence d'une constante $\lambda = e^{\ell}$ telle que (1733)

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\, n^{n+1/2} e^{-n}.}$$



Abraham de Moivre, 1667–1754

3. Calcul de la constante λ

3. Calcul de la constante λ

On introduit la suite des *intégrales de Wallis*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

John Wallis, 1616-1703

3. Calcul de la constante λ

On introduit la suite des *intégrales de Wallis*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = 1,\\
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\\
I_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\cos(2x)+1]\,\mathrm{d}x = 1,\\
I_3 &= \int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} [\cos(3x)+3\cos(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3. Calcul de la constante λ

1. ***Une relation de récurrence***

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(x)\,\mathrm{d}[\sin(x)] \\ &= \Big[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} [\cos^{n-2}(x) - \cos^n(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

qui fournit la relation de récurrence

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.}$$

2. *Une écriture explicite*

Des relations

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\, I_{2(p-1)}, \qquad I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\, I_{2(p-1)+1}$$

on déduit

$$I_{2p} = \frac{(2p-1).(2p-3)\ldots 5.3.1}{(2p).(2p-2)\ldots 6.4.2}\, I_0 = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2p+1} = \frac{(2p).(2p-2)\ldots 6.4.2}{(2p+1).(2p-1)\ldots 7.5.3}\, I_1 = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!},$$

soit encore

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

3. ***Une équivalence asymptotique***

D'autre part, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall x \in [0,\pi/2],\ 0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \Longrightarrow \cos^{n+1}(x) \leqslant \cos^n(x)$$
$$\Longrightarrow I_{n+1} \leqslant I_n.$$

On a donc $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Or $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$, donc

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$$

soit encore

$$\boxed{I_{2p+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{2p}.}$$

4. Le dénouement

4. Le dénouement

On injecte dans I_{2p} les équivalences

$$p! \underset{p\to+\infty}{\sim} \lambda\, p^{p+1/2} e^{-p} \quad \text{et} \quad (2p)! \underset{p\to+\infty}{\sim} \lambda\,(2p)^{2p+1/2} e^{-2p},$$

ce qui donne

$$I_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{p}}.$$

D'autre part, d'après les écritures explicites de I_{2p} et I_{2p+1},

$$I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)I_{2p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\sqrt{p}}.$$

Enfin, l'équivalence $I_{2p+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{2p}$ fournit l'équation $\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}$ qui conduit à

$$\boxed{\lambda = \sqrt{2\pi}.}$$

4. La sérénissime

Théorème (James Stirling, 1733)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}.$$

James Stirling, 1692-1770

4. La sérénissime

Théorème (James Stirling, 1733)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}.$$

Bonus Track : on a le développement asymptotique

$$\boxed{\begin{aligned} n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} \Bigg[1 &+ \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} - \frac{139}{51\,840\,n^3} \\ &- \frac{571}{2\,488\,320\,n^4} + \frac{163\,879}{209\,018\,880\,n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\Bigg]. \end{aligned}}$$

MERCI DE VOTRE INDÉFECTIBLE STOÏCISME !