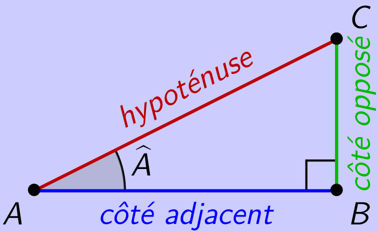
Trigonométrie

Sommaire

1. Définitions

Définition (Sinus, Cosinus, Tangente – « SohCahToa »)

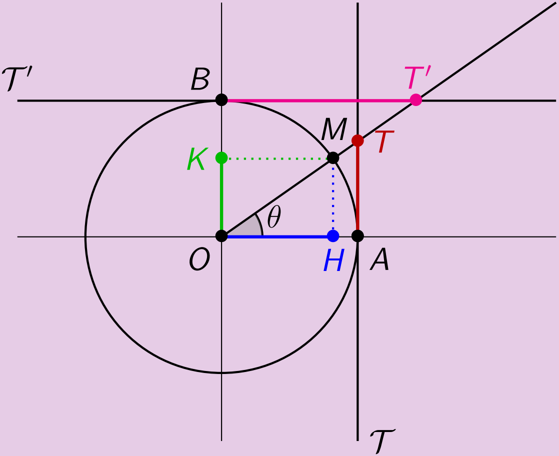
On considère un triangle ABC rectangle en B. On note $\widehat{A} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.



- *Le **Sinus** est le rapport du côté **« Opposé »** à l'**« Hypoténuse »**.*
- *Le **Cosinus** est le rapport du côté **« Adjacent »** à l'**« Hypoténuse »**.*
- *La **Tangente** est le rapport du côté **« Opposé »** au côté **« Adjacent »**.*

On note : $\sin\widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$ $\qquad \cos\widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$ $\qquad \tan\widehat{A} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$

Proposition (Cercle trigonométrique)



Sur le cercle de centre O et de rayon 1 :

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$$

$$\overline{OH} = \cos\theta \qquad \overline{OK} = \sin\theta$$

Sur les tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$:

$$\overline{AT} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\overline{BT'} = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

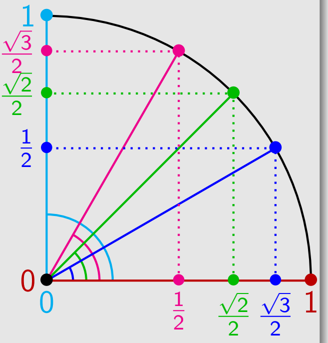
M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ *et* $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

Définition (Radian)

*Le **radian** est la mesure d'un angle interceptant sur la circonférence d'un cercle centré au point d'intersection des demi-droites délimitant le secteur angulaire, un arc d'une longueur égale au rayon.*

Quelques valeurs particulières

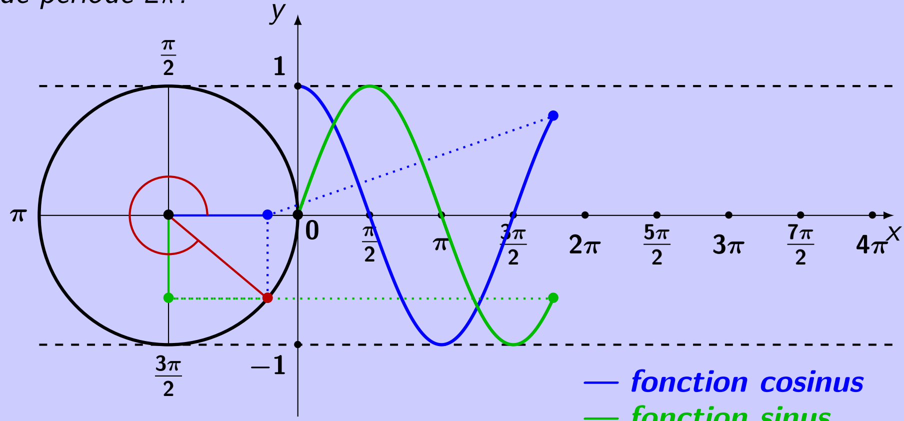
θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini



2. Fonctions trigonométriques

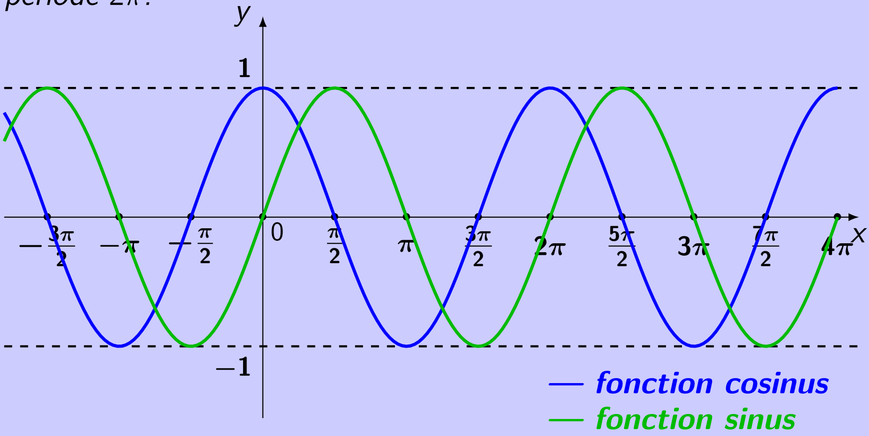
Définition (Fonctions cosinus et sinus)

Les quantités trigonométriques **cos** *et* **sin** *définissent des* ***fonctions trigonométriques*** *sur* $\mathbb{R}$ *dont voici les graphes. Elle sont périodiques de période* 2π.



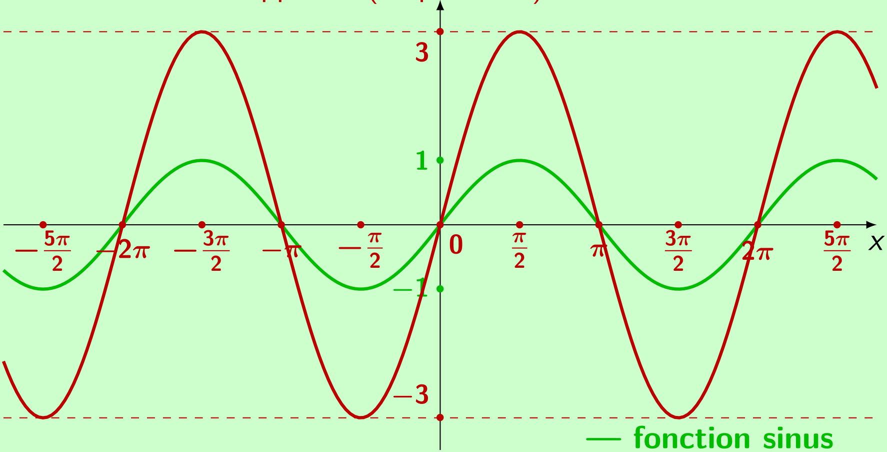
Définition (Fonctions cosinus et sinus)

Les quantités trigonométriques **cos** *et* **sin** *définissent des* ***fonctions trigonométriques*** *sur* $\mathbb{R}$ *dont voici les graphes. Elle sont périodiques de période* 2π.



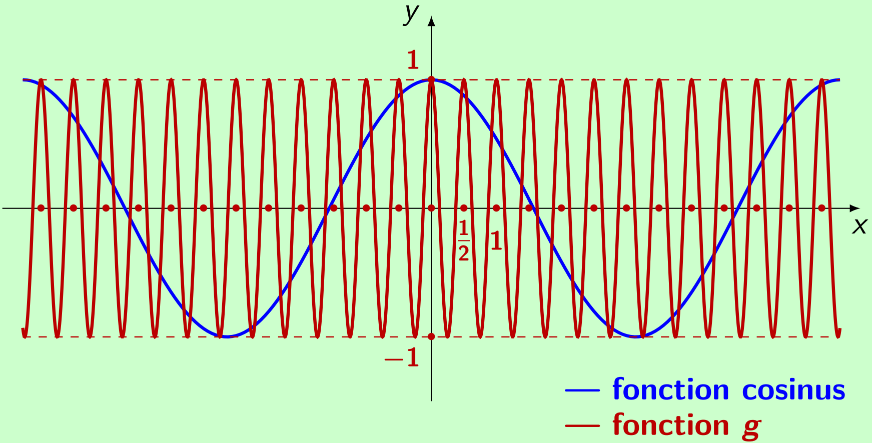
Exemples (Quelques tracés)

Tracé de $f(x) = 3\sin(x)$ **:** partant de la fonction **sinus**, on « étire » verticalement d'un rapport 3 (amplitude 3).



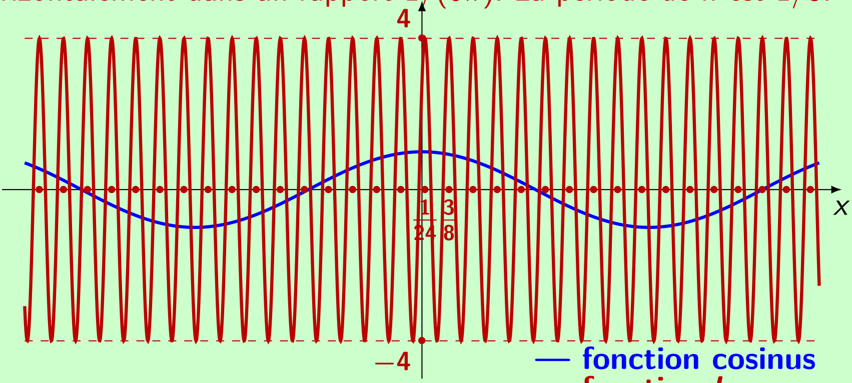
Exemples (Quelques tracés)

Tracé de $g(x) = \cos(4\pi x)$ ***:*** partant de la fonction **cosinus**, on « compresse » horizontalement dans un rapport $1/(4\pi)$ (période $1/2$).



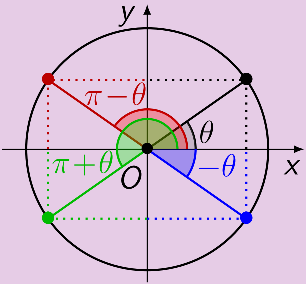
Exemples (Quelques tracés)

Tracé de $h(x) = 4\cos(6\pi x - \frac{\pi}{4})$ ***:*** partant de la fonction **cosinus**, on translate de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite (crête atteinte en $\pi/4$), on « étire » verticalement d'un rapport 4 (amplitude 4) et l'on « compresse » horizontalement dans un rapport $1/(6\pi)$. La période de h est $1/3$.



3. Formulaire

Symétries/rotations élémentaires



angles ***opposés*** *(symétrie par rapport à Ox)*

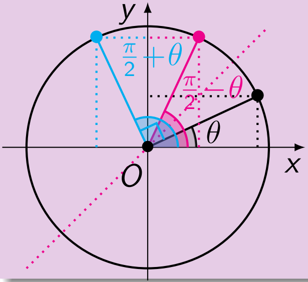
$$\cos(-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

angles ***supplémentaires*** *(symétrie par rapport à Oy)*

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \qquad \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

demi-tour *(symétrie par rapport à O)*

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta \qquad \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$



angles ***complémentaires*** *(symétrie par rapport à $x=y$)*

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

quart de tour *(rotation d'angle droit)*

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

3. Formulaire

Formulaire 1 (Somme des angles)

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\cos(\theta-\varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta-\varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

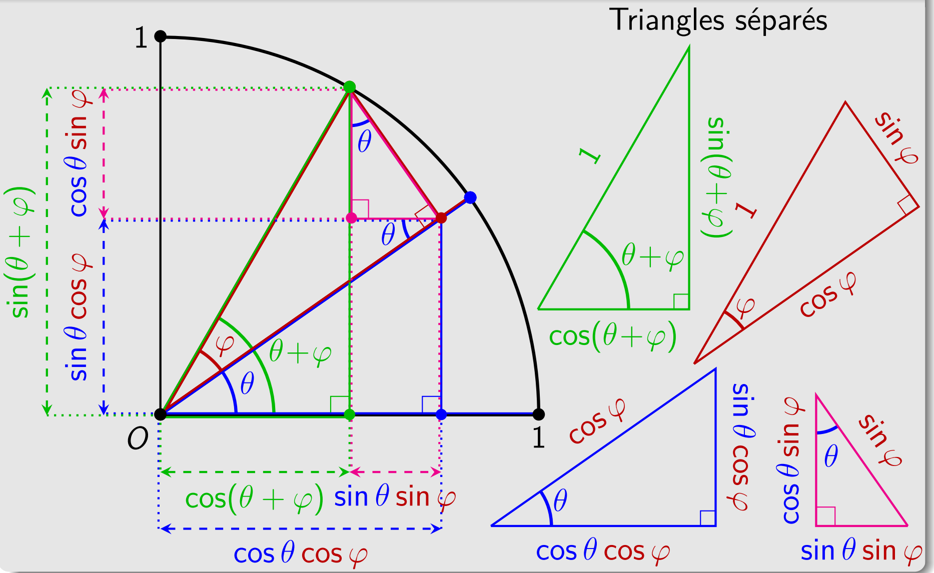
Exemple

Partant de $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ avec $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on tire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

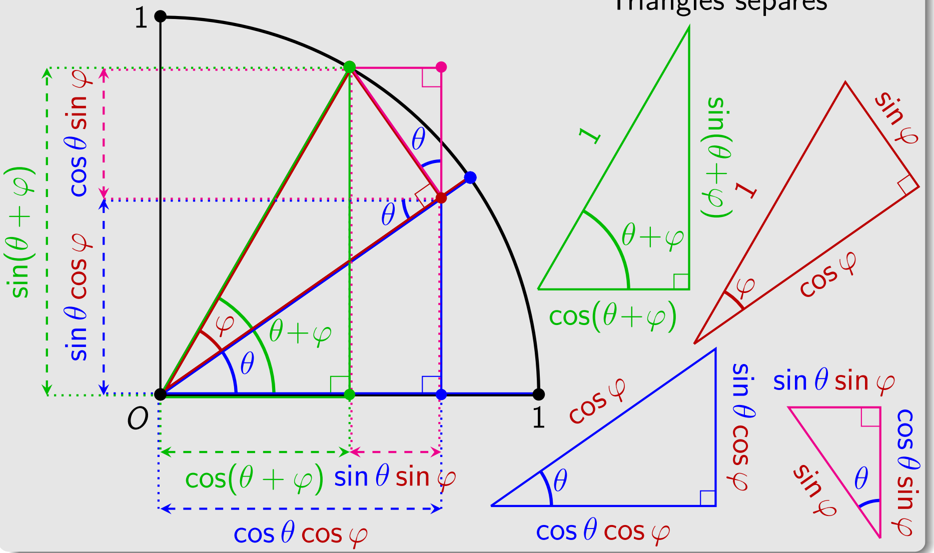
3. Formulaire

Explication : $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$

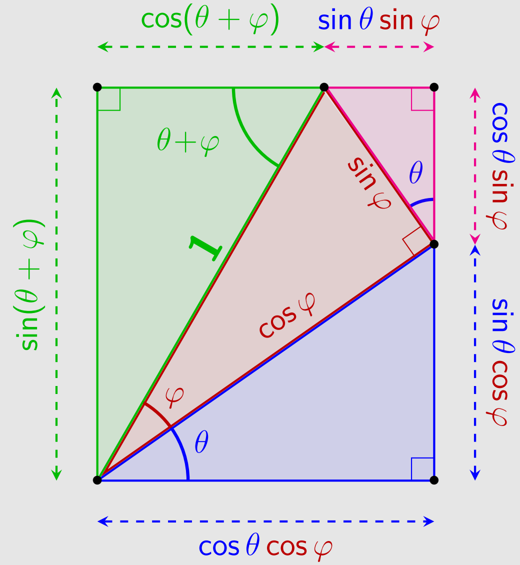


Explication : $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$ (variante)

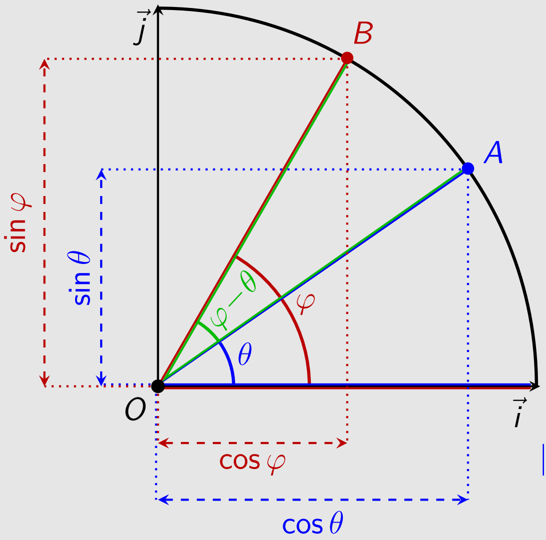
Triangles séparés



Explication : $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$ (résumé)



Explication : $\cos(\varphi - \theta)$ et $\sin(\varphi - \theta)$



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OB} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

Produit scalaire

1. *Calcul analytique :*

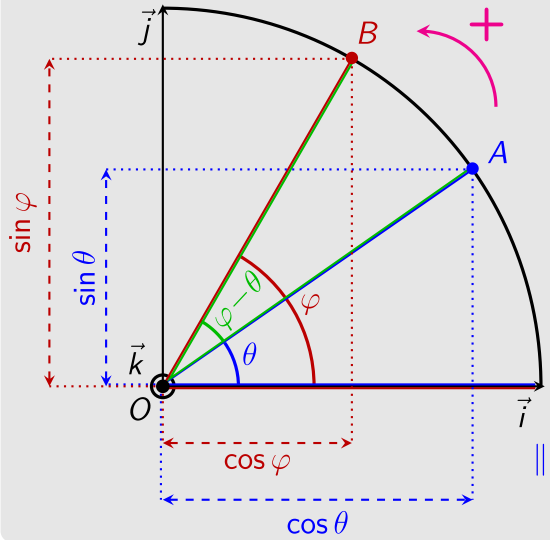
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$$

2. *Calcul géométrique :*

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \cos(\varphi - \theta)$$

3. Formulaire

Explication : $\cos(\varphi - \theta)$ et $\sin(\varphi - \theta)$



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OB} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

Produit vectoriel

1. *Calcul analytique :*

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} =$$
$$(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi)\,\vec{k}$$

2. *Calcul géométrique :*

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} =$$
$$\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\vec{k}$$
$$= \sin(\varphi - \theta)\,\vec{k}$$

Définition (Exponentielle complexe)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Proposition (Formulaire via les complexes)

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\
&= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\
&= \cos\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) + i\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= e^{i\theta} \times e^{i\varphi}
\end{aligned}$$

3. Formulaire

Formulaire 2 (Produit de sinus/cosinus (facultatif))

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\Big[\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\Big]$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}\Big[\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)\Big]$$

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\Big[\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)\Big]$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

En effet : en ajoutant ou soustrayant $\cos(\theta+\varphi)$ et $\cos(\theta-\varphi)$,

$$\begin{array}{rl}
\cos(\theta+\varphi) & = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\
\cos(\theta-\varphi) & = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi \\
\hline
\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi) & = 2\cos\theta\cos\varphi \\
\cos(\theta+\varphi)-\cos(\theta-\varphi) & = -2\sin\theta\sin\varphi
\end{array}$$

Formulaire 3 (Somme de sinus/cosinus (facultatif))

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

En effet : on part de $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.

Pour $\alpha = \dfrac{\theta+\varphi}{2}$ et $\beta = \dfrac{\theta-\varphi}{2}$, on a $\alpha+\beta = \theta$ et $\alpha-\beta = \varphi$,

et l'on trouve $\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)$.

Exemple (Battements acoustiques)

La notion de battements acoustiques est le phénomène perçu par l'oreille humaine lorsque l'on superpose deux ondes sonores de fréquences voisines.

Notons f_1 et f_2 les signaux associés ainsi que ω_1 et ω_2 leurs pulsations respectives ($\omega_1 \neq \omega_2$) :

$$f_1(t) = \sin(\omega_1 t) \qquad f_2(t) = \sin(\omega_2 t)$$

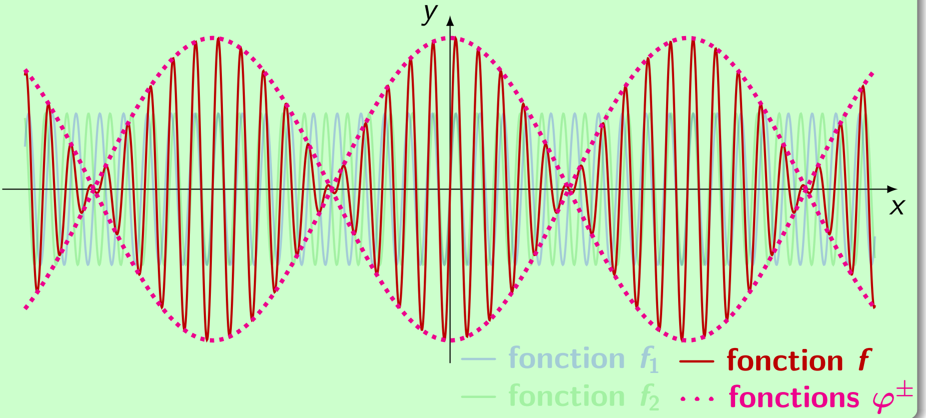
L'onde résultante est représentée par (cf. formulaire 3) :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 2\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Les fonctions $t \longmapsto \varphi^{\pm}(t) = \pm\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$ représente l'« onde enveloppante » de basse fréquence (pulsation $\frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2|$).

Exemple (Battements acoustiques)

La notion de battements acoustiques est le phénomène perçu par l'oreille humaine lorsque l'on superpose deux ondes sonores de fréquences voisines.



Formulaire 4 (Tangente (facultatif))

$$\tan(\theta+\varphi)=\frac{\tan\theta+\tan\varphi}{1-\tan\theta\tan\varphi}$$

$$\tan(\theta-\varphi)=\frac{\tan\theta-\tan\varphi}{1+\tan\theta\tan\varphi}$$

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

En effet :

$$\tan(\theta+\varphi)=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)}=\frac{\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi}$$

$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}=\frac{\tan\theta+\tan\varphi}{1-\tan\theta\tan\varphi}$$

Proposition (Amplitude/déphasage (facultatif))

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ tels que

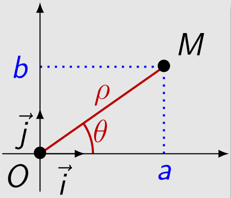
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos x + b \sin x = \rho \cos(x - \theta).$$

De plus $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et, si a et b ne sont pas simultanément nuls, θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho}$.

En effet : dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons le point M de coordonnées **cartésiennes** (a, b). Notons $\rho = OM$ et $\theta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

On a $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $a = \rho \cos\theta$, $b = \rho \sin\theta$.

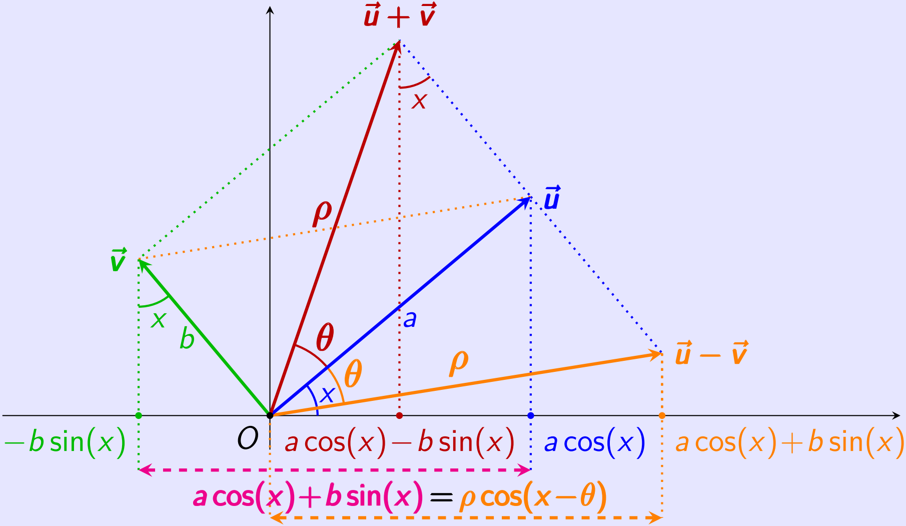
(ρ, θ) sont les coordonnées **polaires** de M.



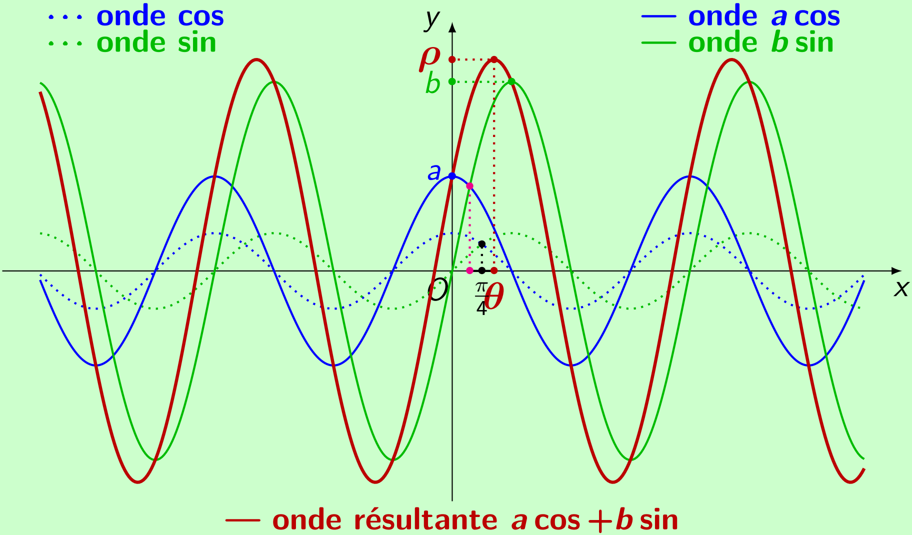
Puis $\quad a \cos x + b \sin x = \rho \cos\theta \cos x + \rho \sin\theta \sin x$

$$= \rho \cos(x - \theta).$$

Visualisation vectorielle



Exemple (Superposition de deux ondes sinusoïdales)



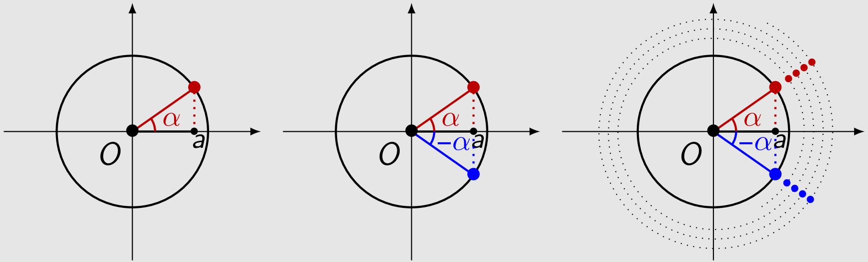
4. Équations

Proposition (Équation $\cos x = a$)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E) d'inconnue x : $\cos x = a$.

1. *si $|a| > 1$ (ou encore $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$), alors (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_E = \varnothing$.*
2. *si $|a| \leqslant 1$ (ou encore $a \in [-1, 1]$), alors (E) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$. Si α est une solution particulière, alors*

$$\mathcal{S}_E = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Proposition (Équation $\cos x = a$ (complément))

- *Si $|a| \leqslant 1$ (ou encore $a \in [-1, 1]$), alors (E) admet une unique solution dans $[0, \pi]$. On la note $\arccos a$ (ou $\cos^{-1} a$).*

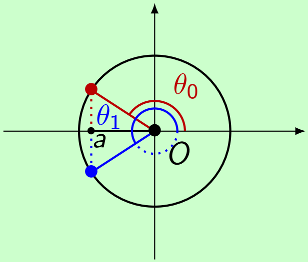
Exemple numérique

- Une calculatrice fournit la valeur approchée à 10^{-2} près de l'angle θ_0 tel que $\cos \theta_0 = -0,85$ suivante :

$$\theta_0 \approx 2,58\,\mathrm{rd} \in [0, \pi]$$

- La valeur de l'angle $\theta_1 \in [\pi, 2\pi]$ tel que $\cos \theta_1 = -0,85$ s'en déduit selon

$$\theta_1 = 2\pi - \theta_0 \approx 3,69\,\mathrm{rd}$$



$a = -0,85$

4. Équations

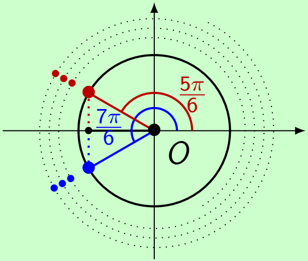
Exemples

1. Soit l'équation d'inconnue x : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Une solution particulière est donnée par $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.
- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

- Sur $[0, 2\pi]$, il y a seulement deux solutions : $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

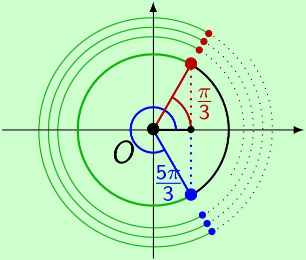


Exemples

2. Soit l'inéquation d'inconnue x : $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

- Une solution particulière de $\cos x = \frac{1}{2}$ est donnée par $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
- L'ensemble des solutions sur $[0, 2\pi]$ est $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
- Puis l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]}$$



Exemples

3. Soit (E) l'équation d'inconnue x : $\cos(2x) + \cos x = -1$.

$$(E) \iff 2\cos^2 x + \cos x = 0$$

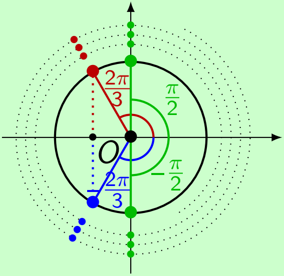
Posons $u = \cos x$.

$$(E) \iff 2u^2 + u = 0 \iff u = 0 \;\text{ ou }\; u = -\frac{1}{2}$$

Puis $\begin{cases} \cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\; x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$



4. Équations

Exemples

4. Soit (E) l'équation d'inconnue x : $\cos(2x) + \cos x = 0$.

- ***1re méthode.*** $(E) \iff 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

  Posons $u = \cos x$.

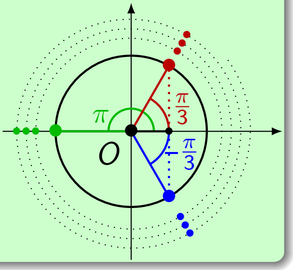
  $$(E) \iff 2u^2 + u - 1 = 0 \iff u = -1 \quad \text{ou} \quad u = \frac{1}{2}$$

  $$\text{Puis } \begin{cases} \cos x = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi + 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est

  $$\mathcal{S} = \left\{(2k+1)\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

  En fait : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$



Exemples

4. Soit (E) l'équation d'inconnue x : $\cos(2x) + \cos x = 0$.

- ***2e méthode.***

$$(E) \iff 2\cos\left(\tfrac{3}{2}x\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) = 0$$

$$\iff \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \tfrac{3}{2}x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \qquad\qquad\qquad \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{2k\pi}{3} \\ \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ (2k+1)\pi, \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

En fait : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$

Exemples

4. Soit (E) l'équation d'inconnue x : $\cos(2x) + \cos x = 0$.

- ***3^e^ méthode.***

$$(E) \iff \cos(2x) = -\cos x \iff \cos(2x) = \cos(x+\pi)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x = (x+\pi)+2k\pi \text{ ou } 2x = -(x+\pi)+2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = (2k+1)\pi \text{ ou } x = -\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{2k\pi}{3}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{(2k+1)\pi, -\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

En fait : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Exemples

5. Soit l'inéquation (E) d'inconnue x : $\cos x - \sqrt{3}\sin x \leqslant 0$.

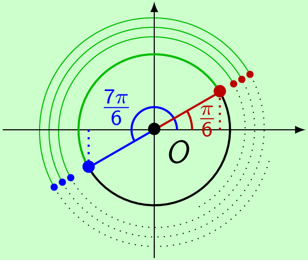
- L'expression $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ est de la forme $a\cos x + b\sin x$ avec $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$.
  On a $a\cos x + b\sin x = \rho\cos(x-\theta)$ avec $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = 2$ et θ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
  Par exemple $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient.
  Ainsi
  $$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$
- $$\begin{aligned} (E) &\Longleftrightarrow \cos(x + \tfrac{\pi}{3}) \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad x + \tfrac{\pi}{3} \in [\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi] \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad x \in [\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi] \end{aligned}$$

Exemples

5. Soit l'inéquation (E) d'inconnue x : $\cos x - \sqrt{3}\sin x \leqslant 0$.

- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

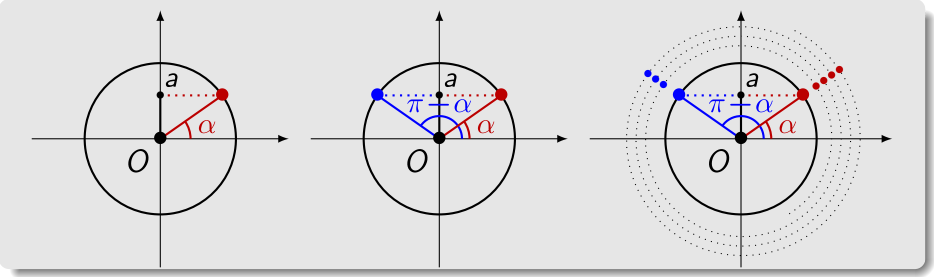
$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]}$$



Proposition (Équation $\sin x = a$)

Soit $a \in \mathbb{R}$. *On considère l'équation* (E) *d'inconnue* x : $\sin x = a$.

1. *si* $|a| > 1$ *(ou encore* $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$*), alors* (E) *n'a pas de solutions dans* $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_E = \varnothing$.
2. *si* $|a| \leqslant 1$ *(ou encore* $a \in [-1, 1]$*), alors* (E) *admet une infinité de solutions dans* $\mathbb{R}$*. Si* α *est une solution particulière, alors*
$$\mathcal{S}_E = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Proposition (Équation $\sin x = a$ (complément))

- *Si $|a| \leqslant 1$ (ou encore $a \in [-1, 1]$), alors (E) admet une unique solution dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On la note $\arcsin a$ (ou $\sin^{-1} a$).*

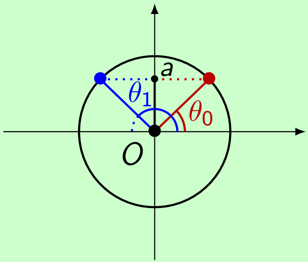
Exemple numérique

- Une calculatrice fournit la valeur approchée à 10^{-2} près de l'angle θ_0 tel que $\sin \theta_0 = 0,7$ suivante :

$$\theta_0 \approx 0,77\,\text{rd} \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

- La valeur de l'angle $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\sin \theta_1 = 0,7$ s'en déduit selon

$$\theta_1 = \pi - \theta_0 \approx 2,36\,\text{rd}$$



$a = 0,7$

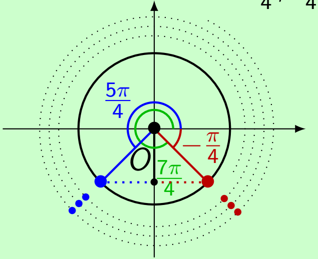
Exemples

1. Soit l'équation d'inconnue x : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Une solution particulière est donnée par $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.
- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

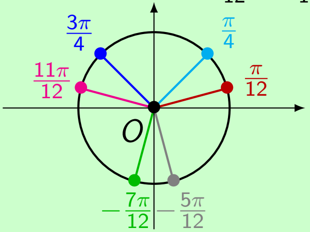
- Sur $[0, 2\pi]$, il y a seulement deux solutions : $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
- Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, il y a trois solutions : $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.



Exemples

2. Soit (E) l'équation d'inconnue x : $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- $$(E) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \tfrac{\pi}{12} + \tfrac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2k\pi}{3}$$
  Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est donc
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$
- Sur $[-\pi, \pi]$, il y a six solutions : $-\frac{7\pi}{12}$, $-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$.

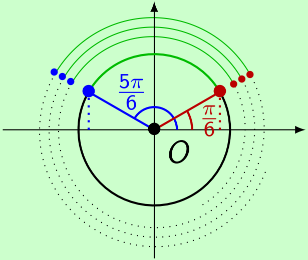


Exemples

3. Soit (E) l'inéquation d'inconnue x : $\cos(2x)+2\sin^2(x)-2\sin(x)\leqslant 0$.

- À l'aide de $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$, on trouve $(E)\Longleftrightarrow \sin x \geqslant \frac{1}{2}$.
- Une solution particulière de $\sin x = \frac{1}{2}$ est donnée par $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- Puis l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

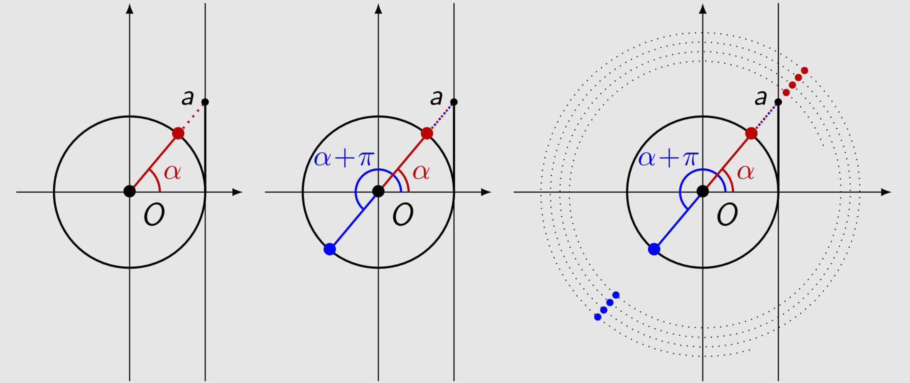
$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]}$$



Proposition (Équation $\tan x = a$)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation (E) d'inconnue x : $\tan x = a$, admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$. Si α est une solution particulière, alors

$$\mathcal{S}_E = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Proposition (Équation $\tan x = a$ (complément))

L'équation (E) *admet une unique solution dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *On la note* $\arctan a$ *(ou* $\tan^{-1} a$*).*

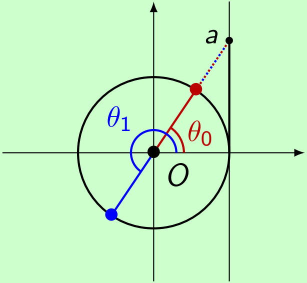
Exemple numérique

- Une calculatrice fournit la valeur approchée à 10^{-2} près de l'angle θ_0 tel que $\tan\theta_0 = 1,5$ suivante :

$$\theta_0 \approx 0,98\,\text{rd} \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

- La valeur de l'angle $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\tan\theta_1 = 1,5$ s'en déduit selon

$$\theta_1 = \pi + \theta_0 \approx 4,12\,\text{rd}$$

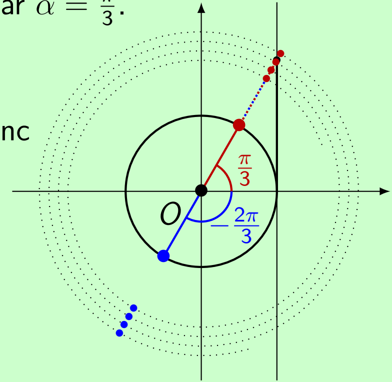


$a = 1,5$

Exemples

1. Soit l'équation d'inconnue x : $\tan x = \sqrt{3}$.

- Une solution particulière est donnée par $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

- Sur $[-\pi, \pi]$, il y a seulement deux solutions : $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

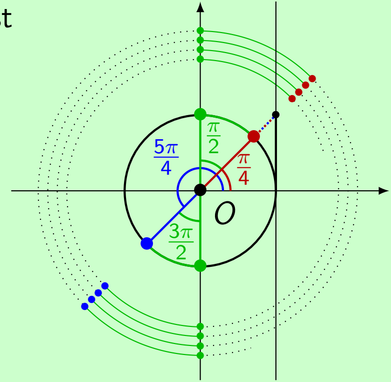
4. Équations

Exemples

1. Soit l'inéquation d'inconnue x : $\tan x \geqslant 1$.

- Une solution particulière de $\tan x = 1$ est donnée par $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- L'ensemble des solutions sur $[0, 2\pi]$ est $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.
- Puis l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[}$$



5. Dérivation/Intégration

Proposition (Limites en 0)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

- En effet, de l'encadrement géométrique

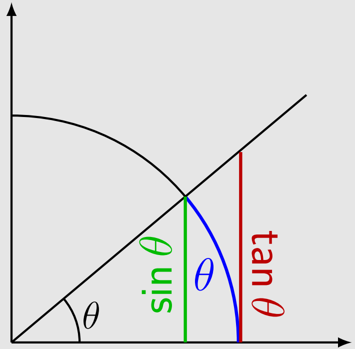
  $$\forall\theta\in\,]0,\pi/2[,\ \sin\theta<\theta<\tan\theta$$

  (l'angle θ étant mesuré en **radians**), on obtient

  $$\forall\theta\in\,]0,\pi/2[,\ \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

  duquel on déduit $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$

  Par parité, on en tire $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$



- Puis $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\dfrac{2\sin^2(\frac{1}{2}\theta)}{\theta^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(\frac{1}{2}\theta)}{\frac{1}{2}\theta}\right)^2\xrightarrow[\theta\to 0]{}\dfrac{1}{2}.$

5. Dérivation/Intégration

Proposition (Dérivation)

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \qquad \sin'(\theta) = \cos(\theta) \qquad \tan'(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \tan^2(\theta) + 1$$

En effet : soit $f(\theta) = \sin\theta$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

- ***1re méthode (à l'aide du formulaire 3).***

  Calculons le nombre dérivé $f'(\theta_0) = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \dfrac{f(\theta) - f(\theta_0)}{\theta - \theta_0}$:

  $$\frac{f(\theta) - f(\theta_0)}{\theta - \theta_0} = \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\theta - \theta_0} = 2\cos\left(\frac{\theta + \theta_0}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)}{\theta - \theta_0}$$

  À l'aide de $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$, on obtient $2\dfrac{\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)}{\theta - \theta_0} \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} 1$, puis :

  $$\frac{f(\theta) - f(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} \cos\theta_0 \text{ d'où l'on tire } f'(\theta_0) = \cos\theta_0.$$

Proposition (Dérivation)

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \qquad \sin'(\theta) = \cos(\theta) \qquad \tan'(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \tan^2(\theta) + 1$$

En effet : soit $f(\theta) = \sin\theta$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

- ***2e méthode (à l'aide du formulaire 1).***

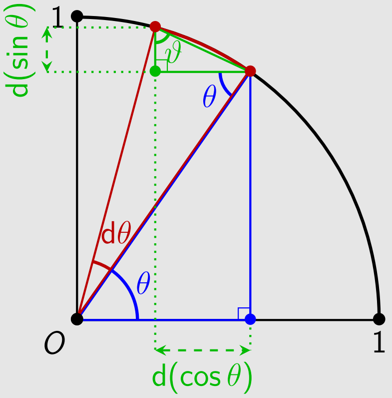
  Calculons le nombre dérivé $f'(\theta_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(\theta_0 + \varepsilon) - f(\theta_0)}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(\theta_0 + \varepsilon) - f(\theta_0)}{\varepsilon} &= \frac{\sin(\theta_0 + \varepsilon) - \sin\theta_0}{\varepsilon} \\ &= \sin\theta_0 \left(\frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) + \cos\theta_0 \left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

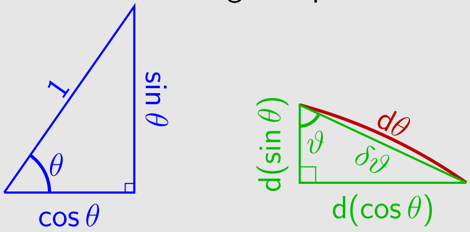
  À l'aide de $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0$, on obtient :

  $\dfrac{f(\theta_0 + \varepsilon) - f(\theta_0)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \cos\theta_0$ d'où l'on tire $f'(\theta_0) = \cos\theta_0$.

Explication heuristique



Triangles séparés



$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\delta\vartheta} \text{ avec } \vartheta \approx \theta, \delta\vartheta \approx \mathrm{d}\theta$$

Formellement : $\sin'(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$

En fait : $\vartheta = \theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{2}$ *et* $\delta\vartheta = 2\sin(\frac{\mathrm{d}\theta}{2})$...

5. Dérivation/Intégration

Proposition (Dérivation)

Soit a, b deux réels. On a

$$\Big(\cos(a\,\theta+b)\Big)' = -a\sin(a\,\theta+b) \qquad \Big(\sin(a\,\theta+b)\Big)' = a\cos(a\,\theta+b)$$

Exemples

1. Soit f la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\Big(3x+\frac{\pi}{4}\Big)$.

   Sa dérivée est donnée par $f'(x) = 3\cos\Big(3x+\frac{\pi}{4}\Big)$.

2. Soit g la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $g(x) = [\cos(\pi x)]^4$.

   Décomposons $g(x)=u(v(x))$ avec $v(x)=\cos(\pi x)$ et $u(y)=y^4$.
   On a $g'(x)=u'(v(x))\times v'(x)$ avec $v'(x)=-\pi\sin(\pi x)$ et $u'(y)=4y^3$.
   Formellement : $g = u\circ v$ *et* $g' = (u'\circ v)\times v'$.

   La dérivée de g est donnée par $g'(x)=-4\pi[\cos(\pi x)]^3\sin(\pi x)$.

5. Dérivation/Intégration

Proposition (Intégration)

Les primitives de cos *et* sin *sont données par*

$$\int \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \sin\theta + Constante$$

$$\int \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\cos\theta + Constante$$

Plus généralement, pour tous réels a, b :

$$\int \cos(a\,\theta + b) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{a}\sin(a\,\theta + b) + Constante$$

$$\int \sin(a\,\theta + b) \, \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{a}\cos(a\,\theta + b) + Constante$$

Lien intégrale/primitive

Si F est une **primitive** de f : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

Exemples

1. $$I_1 = \int_{\pi/5}^{3\pi/5} \cos(5t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{5}\sin(5t)\right]_{\pi/5}^{3\pi/5} = 0$$

2. $$I_2 = \int_0^{\pi/3} \cos t\ \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{8}$$

3. $$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi/12} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi/12} \frac{1}{2}\left[1-\cos(2t)\right]\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\pi}^{\pi/12} = \frac{13\pi}{24} - \frac{1}{8}$$

4. $$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t)\ \sin(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\cos(t)-\cos(5t)\right]\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{10}\sin(5t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$$