Quelques problèmes de temps de passage pour certains processus non nécessairement markoviens

Aimé LACHAL

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon
INSA de Lyon

MB 1D

MB 1D

processus de Langevin

$$\alpha\ddot{X}_t + \beta\dot{X}_t + \gamma X_t = \mathrm{BB}$$

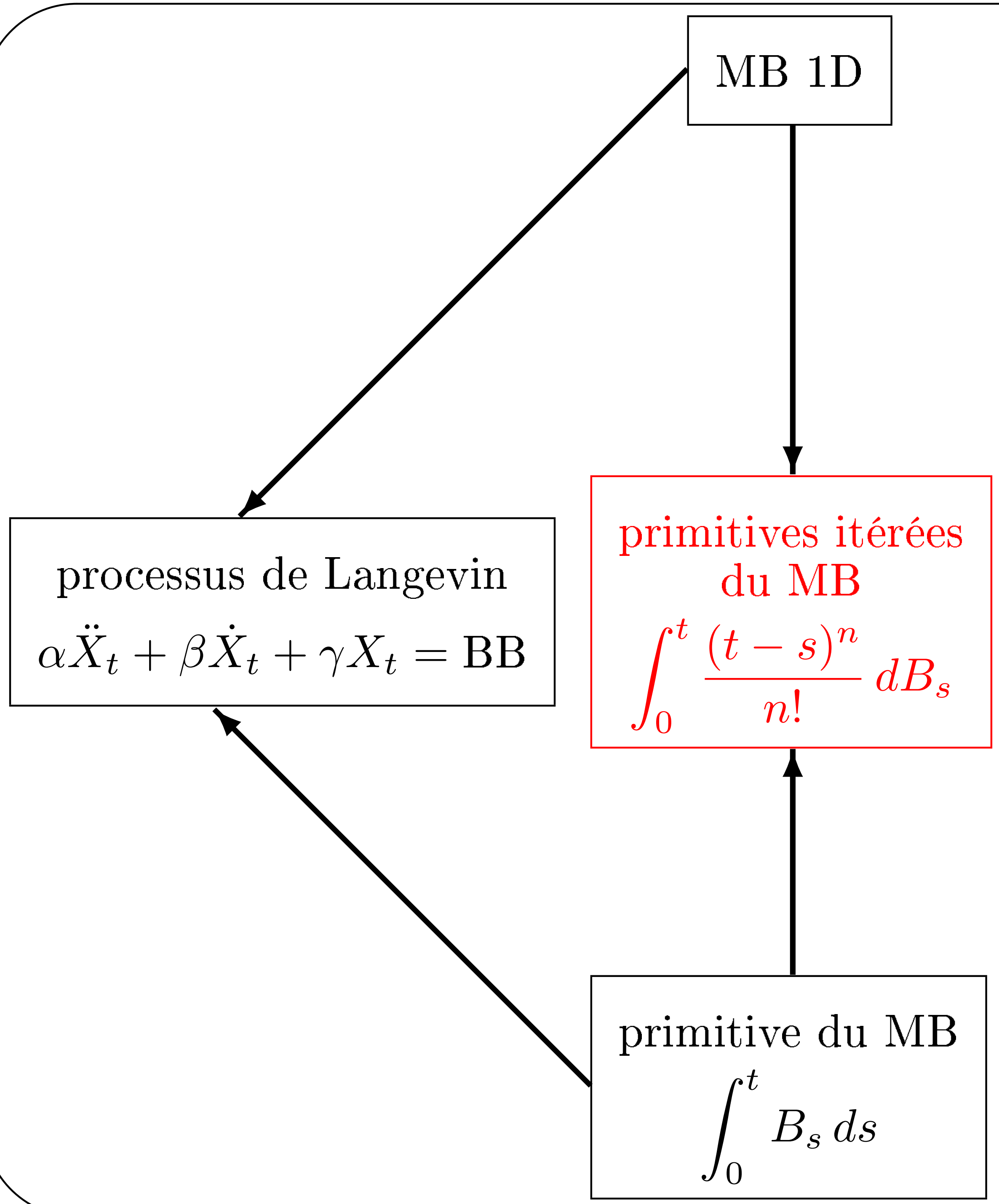
MB 1D

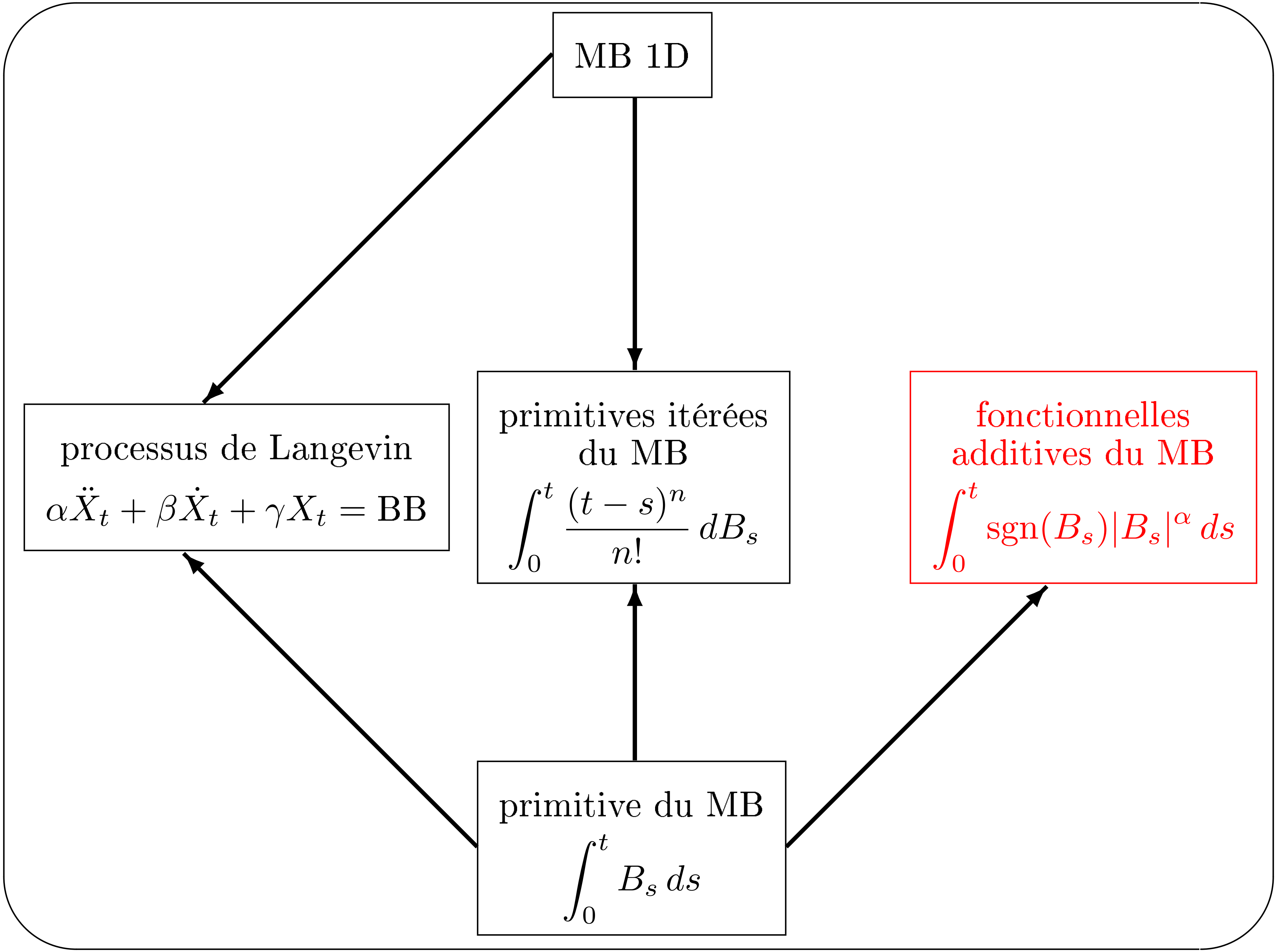
processus de Langevin

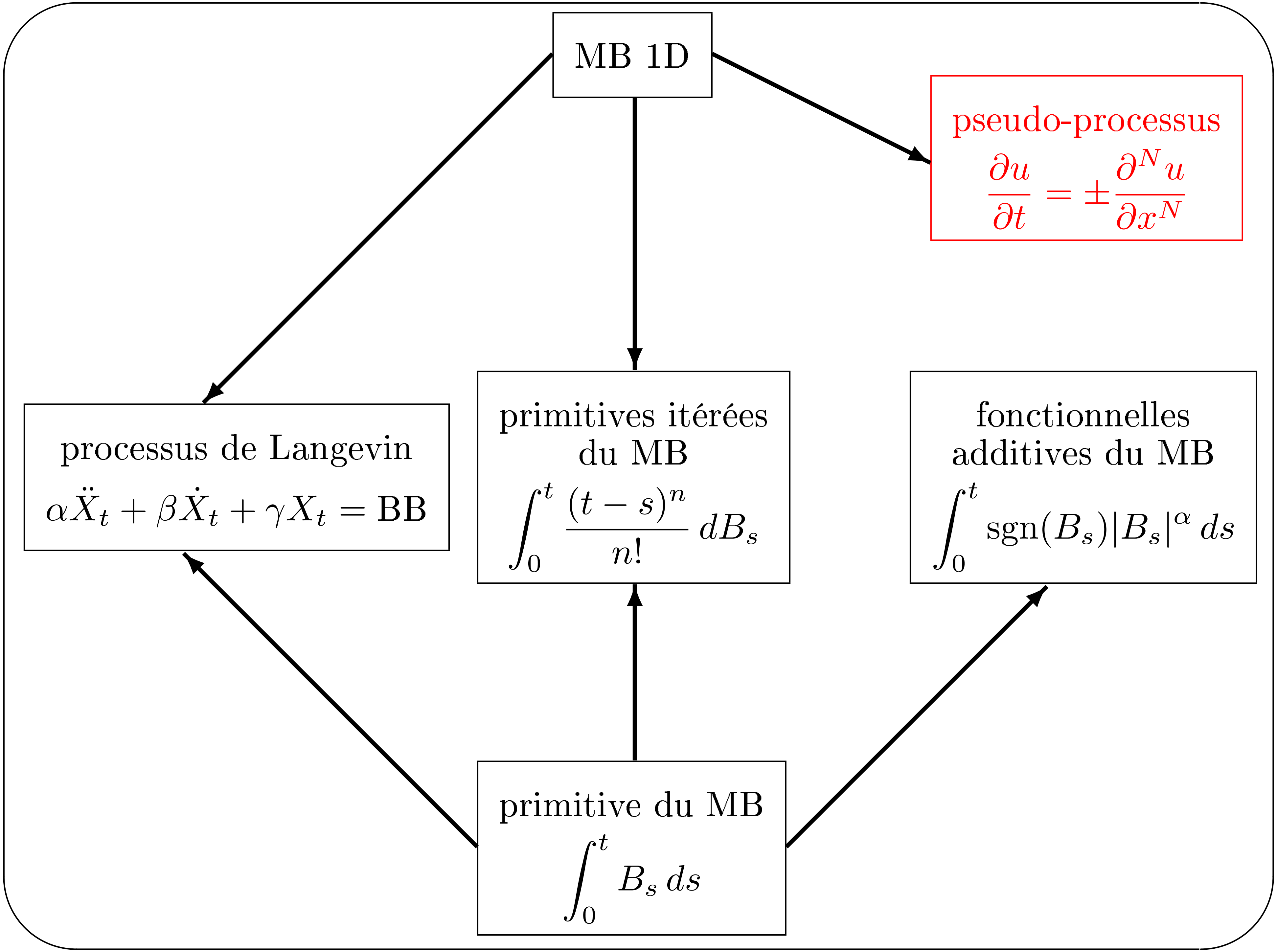
$$\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \mathrm{BB}$$

primitive du MB

$$\int_0^t B_s \, ds$$


MB 1D
processus de Langevin
$\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \mathrm{BB}$
primitives itérées
du MB
$\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\, dB_s$
primitive du MB
$\int_0^t B_s\, ds$

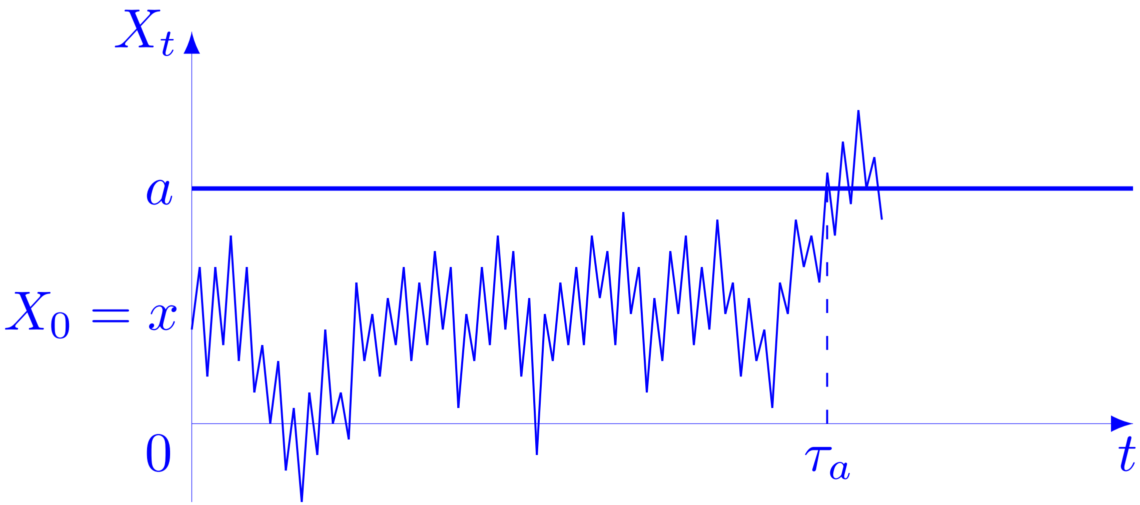

MB 1D
processus de Langevin
$\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \mathrm{BB}$
primitives itérées du MB
$\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \, dB_s$
fonctionnelles additives du MB
$\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) |B_s|^\alpha \, ds$
primitive du MB
$\int_0^t B_s \, ds$



MB 1D
pseudo-processus
$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm \frac{\partial^N u}{\partial x^N}$
processus de Langevin
$\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \mathrm{BB}$
primitives itérées du MB
$\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \, dB_s$
fonctionnelles additives du MB
$\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) |B_s|^\alpha \, ds$
primitive du MB
$\int_0^t B_s \, ds$

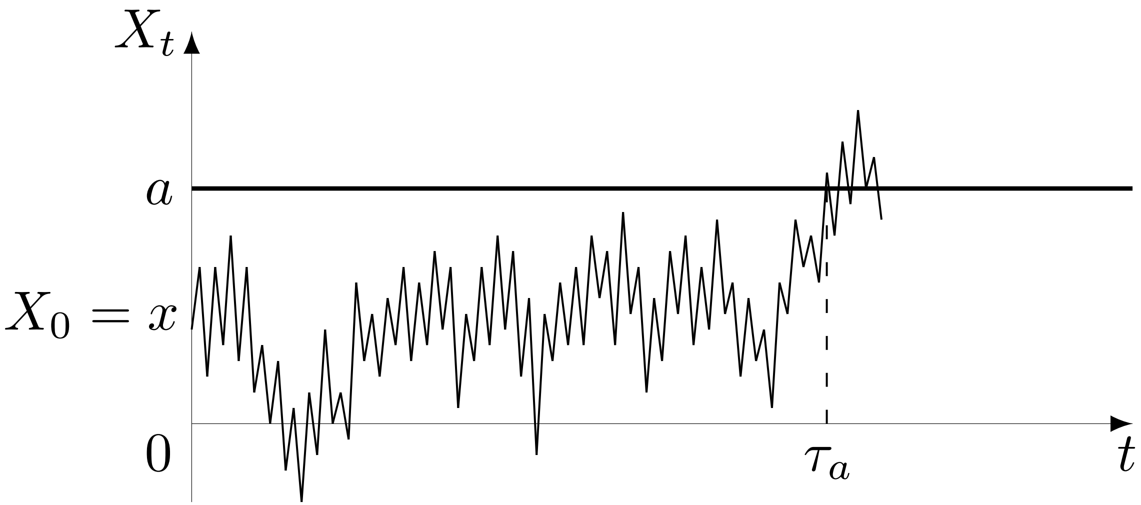
Des problèmes

- Barrière simple : $\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant a\}}$



Des problèmes

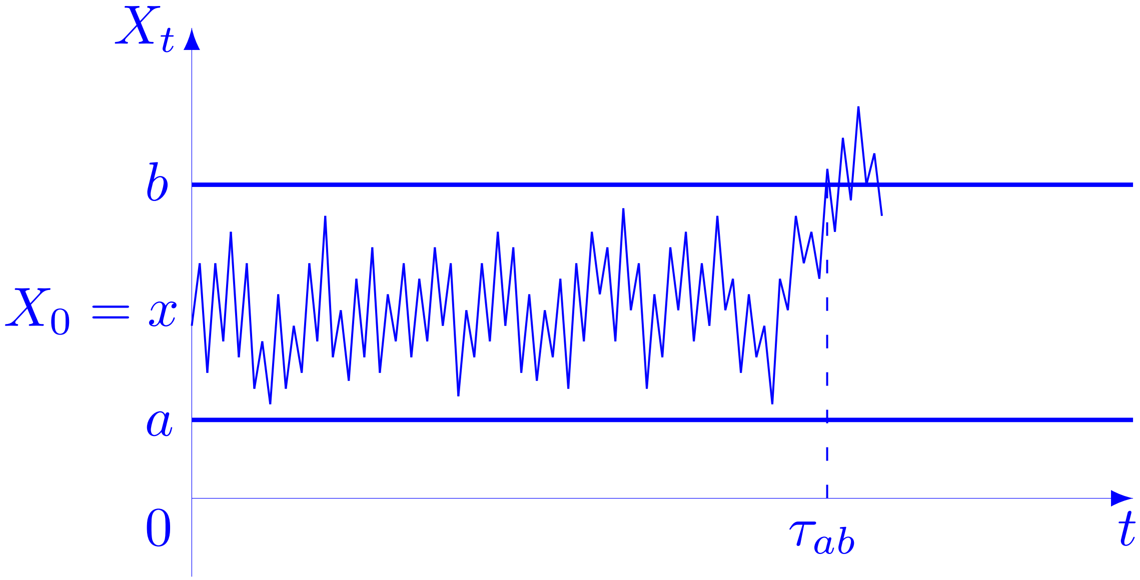
- Barrière simple : $\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant a\}}$



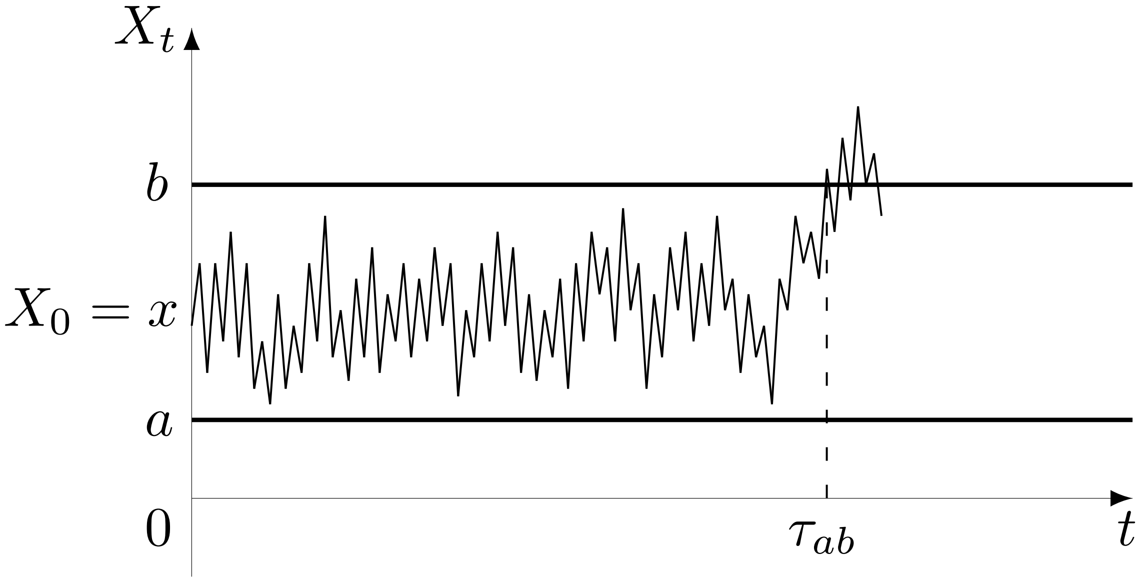
$\longrightarrow$ Problème associé : *loi de* $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$ *?*

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s < a\} = \mathbb{P}\{\tau_a > t\}$$

- Barrière double : $\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin]a, b[\}}$



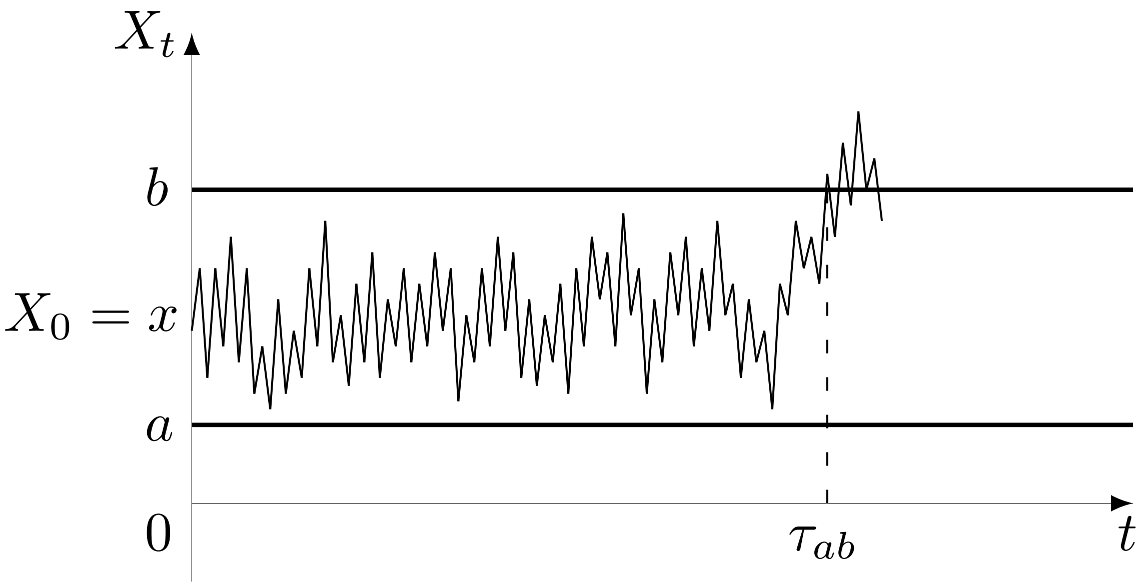
- Barrière double : $\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin]a, b[\}}$



$\longrightarrow$ Problème associé : *loi conjointe de* $\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ *et* $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ *?*

$$\mathbb{P}\{a < \inf_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s < b\} = \mathbb{P}\{\tau_{ab} > t\}$$

• Barrière double : $\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin]a,b[\}}$

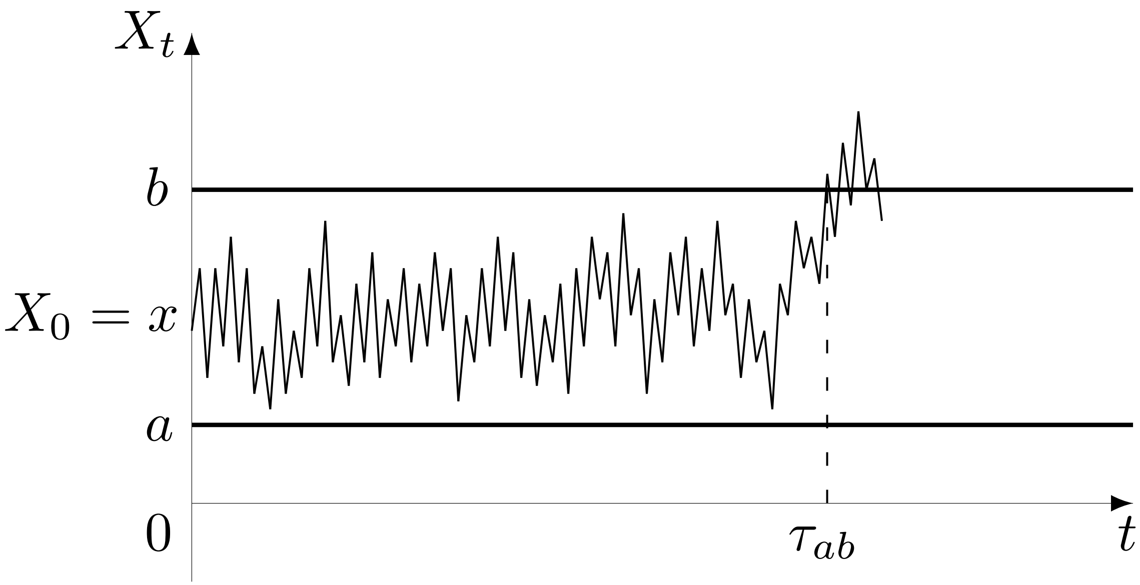


$\longrightarrow$ Problème associé : *loi conjointe de* $\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ *et* $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ *?*

$$\mathbb{P}\{a < \inf_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s < b\} = \mathbb{P}\{\tau_{ab} > t\}$$

• Barrière mobile : $\boxed{\tau_f = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant f(t)\}}$

- Barrière double : $\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin]a, b[\}}$



$\longrightarrow$ Problème associé : *loi conjointe de* $\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$ *et* $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$ *?*

$$\mathbb{P}\{a < \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s < b\} = \mathbb{P}\{\tau_{ab} > t\}$$

- Barrière mobile : $\boxed{\tau_f = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant f(t)\}}$

- Passages successifs, excursions...

Des techniques

- Équations différentielles, EDP, équations intégrales (Kolmogorov, Fokker-Planck, Feynman-Kac)

Des techniques

- Équations différentielles, EDP, équations intégrales
  (Kolmogorov, Fokker-Planck, Feynman-Kac)

- Martingales
  (formule d'Itô, théorème d'arrêt de Doob)

Des techniques

- Équations différentielles, EDP, équations intégrales
  (Kolmogorov, Fokker-Planck, Feynman-Kac)

- Martingales
  (formule d'Itô, théorème d'arrêt de Doob)

- Approximation par échantillonage
  (lemme de Spitzer)

Des techniques

- Équations différentielles, EDP, équations intégrales
  (Kolmogorov, Fokker-Planck, Feynman-Kac)

- Martingales
  (formule d'Itô, théorème d'arrêt de Doob)

- Approximation par échantillonage
  (lemme de Spitzer)

- Formule de Cameron-Martin-Girsanov

Des techniques

- Équations différentielles, EDP, équations intégrales
  (Kolmogorov, Fokker-Planck, Feynman-Kac)

- Martingales
  (formule d'Itô, théorème d'arrêt de Doob)

- Approximation par échantillonage
  (lemme de Spitzer)

- Formule de Cameron-Martin-Girsanov

- Décomposition fines des trajectoires
  (excursions)...

1 Processus de Langevin

Soit le processus régi par $\boxed{\alpha\ddot{X}_t + \beta\dot{X}_t + \gamma X_t = \text{bruit blanc.}}$

1 Processus de Langevin

Soit le processus régi par $\boxed{\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \text{bruit blanc.}}$

- Loi du couple $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$: *problème ouvert excepté quelques cas.*

1 Processus de Langevin

Soit le processus régi par $\boxed{\alpha\ddot{X}_t + \beta\dot{X}_t + \gamma X_t = \text{bruit blanc.}}$

- Loi du couple $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$: *problème ouvert excepté quelques cas.*

- Difficulté : $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus* ***non-markovien*** *en général.*

  $\longrightarrow$ *Introduction du couple markovien* $(X_t, \dot{X}_t)$ *(diffusion 2D).*

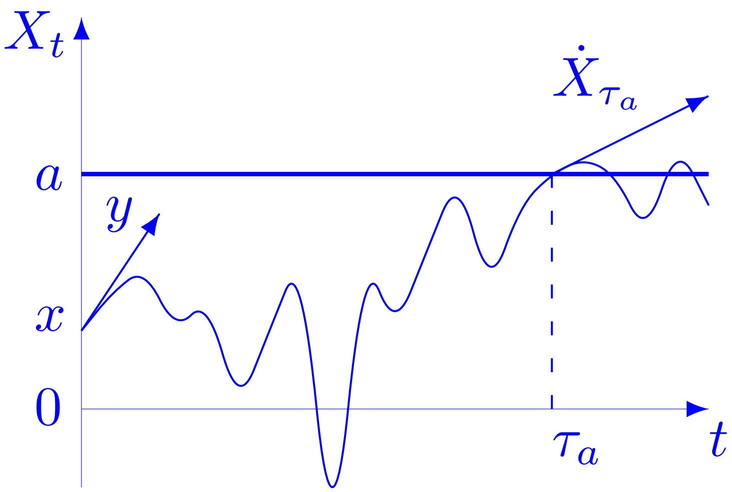
1 Processus de Langevin

Soit le processus régi par $\boxed{\alpha\ddot{X}_t + \beta\dot{X}_t + \gamma X_t = \text{bruit blanc.}}$

- Loi du couple $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$: *problème ouvert excepté quelques cas.*

- Difficulté : $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus* ***non-markovien*** *en général.*

  $\longrightarrow$ *Introduction du couple markovien* $(X_t, \dot{X}_t)$ *(diffusion 2D).*



Loi horaire $t \longmapsto X_t$

Position et vitesse initiales : $(X_0, \dot{X}_0) = (x, y)$

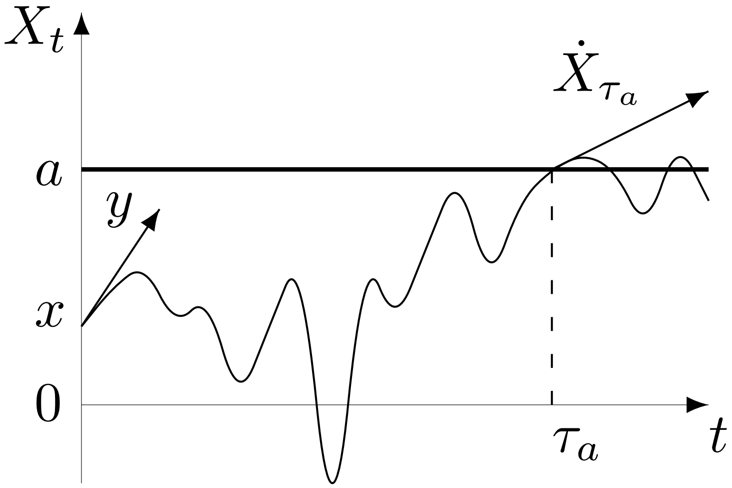
1 Processus de Langevin

Soit le processus régi par $\boxed{\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \text{bruit blanc.}}$

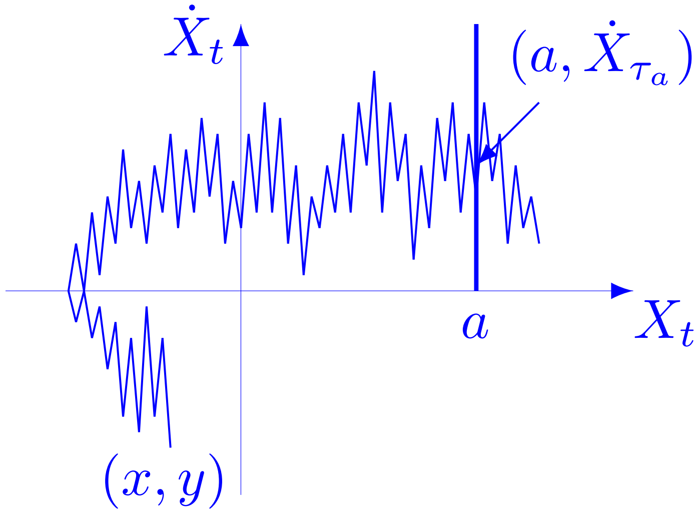
- Loi du couple $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$: *problème ouvert excepté quelques cas.*

- Difficulté : $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus* ***non-markovien*** *en général.*

  $\longrightarrow$ *Introduction du couple markovien* $(X_t, \dot{X}_t)$ *(diffusion 2D).*



Loi horaire $t \longmapsto X_t$



Courbe $t \longmapsto (X_t, \dot{X}_t)$

Position et vitesse initiales : $(X_0, \dot{X}_0) = (x, y)$

La primitive du mouvement brownien $(\beta = \gamma = 0)$

Soient $\boxed{X_t = \int_0^t B_s \, ds}$ et $U(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\tau_a + i\mu B_{\tau_a}}]$.

La primitive du mouvement brownien ($\beta = \gamma = 0$)

Soient $\boxed{X_t = \int_0^t B_s \, ds}$ et $U(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda \tau_a + i\mu B_{\tau_a}}]$.

- La fonction U vérifie

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) + y \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lambda U(x,y) \text{ pour } x < a \\ U(a^-, y) = e^{i\mu y} \text{ pour } y > 0 \end{cases}$$

La primitive du mouvement brownien ($\beta = \gamma = 0$)

Soient $\boxed{X_t = \int_0^t B_s \, ds}$ et $U(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda \tau_a + i\mu B_{\tau_a}}]$.

- La fonction U vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) + y \dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lambda U(x,y) \text{ pour } x < a \\ U(a^-, y) = e^{i\mu y} \text{ pour } y > 0 \end{cases}$$

- Résolution à l'aide de la transformation de Kontorovich-Lebedev :

$$\hat{f}(\zeta) = \int_0^\infty K_{i\zeta}(z) \, f(z) \, dz, \quad f(z) = \frac{2}{\pi z^2} \int_0^\infty K_{i\zeta}(z) \, \hat{f}(\zeta) \, \zeta \, \sinh(\pi\zeta) \, d\zeta$$

La primitive du mouvement brownien ($\beta = \gamma = 0$)

Soient $\boxed{X_t = \int_0^t B_s\,ds}$ et $U(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\tau_a + i\mu B_{\tau_a}}]$.

- La fonction U vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) + y\,\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lambda\,U(x,y) \text{ pour } x < a \\ U(a^-, y) = e^{i\mu y} \text{ pour } y > 0 \end{cases}$$

- Résolution à l'aide de la transformation de Kontorovich-Lebedev :

$$\hat{f}(\zeta) = \int_0^\infty K_{i\zeta}(z)\,f(z)\;dz, \quad f(z) = \frac{2}{\pi z^2}\int_0^\infty K_{i\zeta}(z)\,\hat{f}(\zeta)\,\zeta\,\sinh(\pi\zeta)\,d\zeta$$

- Résultat partiel (McKean, 1963) ; pour $yz < 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_{(a,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\}/dt\,dz = \frac{3|z|}{\pi\sqrt{2}\,t^2}\,e^{-2(y^2 - |yz| + z^2)/t}\int_0^{4|yz|/t} e^{-3\theta/2}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}}$$

$\longrightarrow$ *Problème entièrement résolu.*

Réf. : McKean (1963), Lachal(1990–...)

2 Les primitives itérées du MB

Soit $\boxed{X_t^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\, dB_s}$ où $n \in \mathbb{N}$.

2 Les primitives itérées du MB

Soit $\boxed{X_t^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \, dB_s}$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Loi de τ_a : *problème ouvert pour* $n \geqslant 2$.

2 Les primitives itérées du MB

Soit $\boxed{X_t^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \, dB_s}$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Loi de τ_a : *problème ouvert pour* $n \geqslant 2$.

Application : statistiques de Kolmogorov-Smirnov intégrées

Soit $U_1, \ldots, U_N$ un échantillon de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2 Les primitives itérées du MB

Soit $\boxed{X_t^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\, dB_s}$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Loi de τ_a : *problème ouvert pour $n \geqslant 2$.*

Application : statistiques de Kolmogorov-Smirnov intégrées

Soit $U_1, \ldots, U_N$ un échantillon de la loi uniforme sur $[0,1]$.

- On a la convergence de processus

$$\left(\sqrt{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{\{U_k \leqslant t\}} - t\right]\right)_{t\in[0,1]} \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{loi}} \text{pont brownien}$$

puis

$$\text{processus empiriques intégrés} \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{loi}} \begin{cases} \text{primitives du pont brownien} \\ \text{ou} \\ \text{pont des primitives du MB} \end{cases}$$

Exemple : pont de la primitive itérée du MB

$$Y_t^{(n)} = \left(X_t^{(n)} \middle| \begin{array}{l} X_0^{(n-1)} = X_0^{(n-2)} = \cdots = X_0^{(1)} = B_0 = 0 \\ X_1^{(n-1)} = X_1^{(n-2)} = \cdots = X_1^{(1)} = B_1 = 0 \end{array} \right), \ t \in [0,1].$$

Exemple : pont de la primitive itérée du MB

$$Y_t^{(n)} = \left(X_t^{(n)} \middle| \begin{array}{l} X_0^{(n-1)} = X_0^{(n-2)} = \cdots = X_0^{(1)} = B_0 = 0 \\ X_1^{(n-1)} = X_1^{(n-2)} = \cdots = X_1^{(1)} = B_1 = 0 \end{array} \right), \; t \in [0,1].$$

- On a l'identité $Y_t^{(n)} \stackrel{\text{loi}}{=} t^{2n+1}\, X_{1/t-1}^{(n)}$. On a besoin de

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{P}\{\sup_{t \geqslant 0} [X_t^{(n)} - x(t+1)^{2n+1}] < 0\}$$

$\longrightarrow$ *Problème de frontière mobile pour* $(X^{(n)})_{t \geqslant 0}$.

Exemple : pont de la primitive itérée du MB

$$Y_t^{(n)} = \left(X_t^{(n)} \middle| \begin{array}{l} X_0^{(n-1)} = X_0^{(n-2)} = \cdots = X_0^{(1)} = B_0 = 0 \\ X_1^{(n-1)} = X_1^{(n-2)} = \cdots = X_1^{(1)} = B_1 = 0 \end{array} \right), \ t \in [0,1].$$

- On a l'identité $Y_t^{(n)} \stackrel{\text{loi}}{=} t^{2n+1} \, X_{1/t-1}^{(n)}$. On a besoin de

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{P}\{\sup_{t \geqslant 0} [X_t^{(n)} - x(t+1)^{2n+1}] < 0\}$$

$\longrightarrow$ *Problème de frontière mobile pour* $(X^{(n)})_{t \geqslant 0}$.

- On a

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{Q}^x\{\sup_{t \geqslant 0} X_t^{(n)} < 0\} = \mathbb{Q}^x\{\tau_0 = +\infty\}$$

où $\mathbb{Q}^x$ est une densité de Cameron-Martin-Girsanov.

Exemple : pont de la primitive itérée du MB

$$Y_t^{(n)} = \left(X_t^{(n)} \middle| \begin{array}{l} X_0^{(n-1)} = X_0^{(n-2)} = \cdots = X_0^{(1)} = B_0 = 0 \\ X_1^{(n-1)} = X_1^{(n-2)} = \cdots = X_1^{(1)} = B_1 = 0 \end{array} \right), \; t \in [0,1].$$

- On a l'identité $Y_t^{(n)} \overset{\text{loi}}{=} t^{2n+1} X_{1/t-1}^{(n)}$. On a besoin de

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{P}\{\sup_{t\geqslant 0}[X_t^{(n)} - x(t+1)^{2n+1}] < 0\}$$

$\longrightarrow$ *Problème de frontière mobile pour* $(X^{(n)})_{t\geqslant 0}$.

- On a

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{Q}^x\{\sup_{t\geqslant 0} X_t^{(n)} < 0\} = \mathbb{Q}^x\{\tau_0 = +\infty\}$$

où $\mathbb{Q}^x$ est une densité de Cameron-Martin-Girsanov.

- Cas $n = 1$ (primitive du mouvement brownien) :

$$\boxed{\mathbb{Q}^x\{\tau_0 = +\infty\} = 1 - e^{-6x^2}\, \mathbb{E}_{(-3x,x)}\left[e^{-6x^2(\tau_0+1)^3 - 6x(\tau_0+1)B_{\tau_0}}\right]}$$

Réf. : Henze & Nikitin (2000), Lachal (2001)

3 Fonctionnelles additives du MB

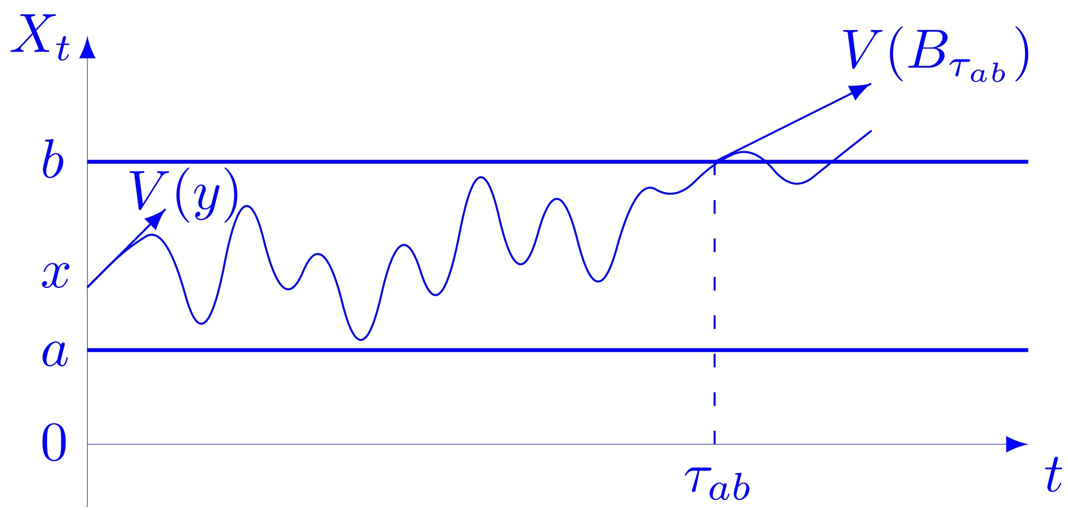
Soit $\boxed{X_t = \int_0^t V(B_s)\, ds}$ où $V(y) = \begin{cases} y^\gamma & \text{si } y \geqslant 0 \\ -K\,|y|^\gamma & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$ et $K, \gamma > 0$.

3 Fonctionnelles additives du MB

Soit $\boxed{X_t = \int_0^t V(B_s)\,ds}$ où $V(y) = \begin{cases} y^\gamma & \text{si } y \geqslant 0 \\ -K\,|y|^\gamma & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$ et $K, \gamma > 0$.

- Problème : *loi de* $(\tau_{ab}, B_{\tau_{ab}})$?

$(X_0, B_0) = (x, y)$

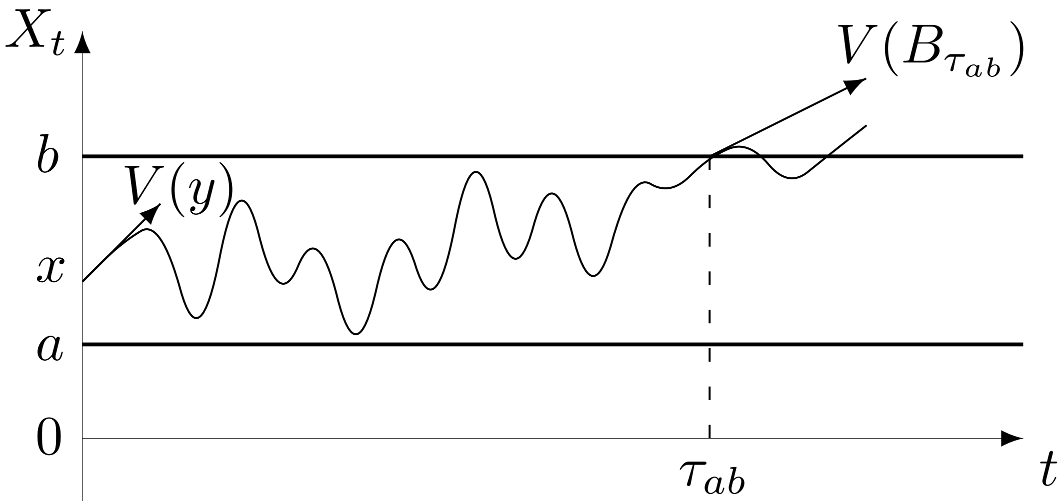


3 Fonctionnelles additives du MB

Soit $\boxed{X_t = \int_0^t V(B_s)\,ds}$ où $V(y) = \begin{cases} y^\gamma & \text{si } y \geqslant 0 \\ -K\,|y|^\gamma & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$ et $K, \gamma > 0$.

- Problème : *loi de* $(\tau_{ab}, B_{\tau_{ab}})$?

$(X_0, B_0) = (x, y)$



- Résolution : *EDP+excursions+équation d'Abel généralisée.*

- Résultats partiels (Lachal, 2000) ; pour $x \in]a,b[$:

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{B_{\tau_{ab}} \in dz\}/dz = \begin{cases} \text{constante} \times \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{-\alpha} \dfrac{z^{\gamma-\alpha(\gamma+2)}}{(b-x)^{1-\alpha-1/(\gamma+2)}} \\ \times e^{-z^{\gamma+2}/A(b-x)}\, M\left(-\alpha; 1-\alpha; \dfrac{x-a}{b-x}\, \dfrac{z^{\gamma+2}}{A(b-a)}\right) \\ \qquad\qquad \text{pour } z > 0 \\ \text{expression similaire pour } z < 0 \end{cases}}$$

où $\alpha = -\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arccot}\left[\dfrac{K^{-1/(\gamma+2)} + \cos\frac{\pi}{\gamma+2}}{\sin\frac{\pi}{\gamma+2}}\right]$.

- Résultats partiels (Lachal, 2000) ; pour $x \in]a,b[$:

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{B_{\tau_{ab}} \in dz\}/dz = \begin{cases} \text{constante} \times \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{-\alpha} \dfrac{z^{\gamma-\alpha(\gamma+2)}}{(b-x)^{1-\alpha-1/(\gamma+2)}} \\ \times e^{-z^{\gamma+2}/A(b-x)}\, M\Big(-\alpha; 1-\alpha; \dfrac{x-a}{b-x}\, \dfrac{z^{\gamma+2}}{A(b-a)}\Big) \\ \qquad \text{pour } z > 0 \\ \text{expression similaire pour } z < 0 \end{cases}}$$

où $\alpha = -\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arccot}\left[\dfrac{K^{-1/(\gamma+2)} + \cos\frac{\pi}{\gamma+2}}{\sin\frac{\pi}{\gamma+2}}\right].$

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{\tau_b < \tau_a\} = \text{constante} \times \Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)^{-\alpha} {}_2F_1\Big(-\alpha, \frac{\gamma+1}{\gamma+2} - \alpha; 1-\alpha; \frac{x-a}{b-a}\Big)}$$

Réf. : Franklin & Rodemich (1968), Masoliver & Porrà (1995), Lachal (2000)

4 Pseudo-processus browniens

Considérons l'équation de la chaleur d'ordre $N > 2$: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \pm \dfrac{\partial^N u}{\partial x^N}}$

4 Pseudo-processus browniens

Considérons l'équation de la chaleur d'ordre $N > 2$: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \pm \dfrac{\partial^N u}{\partial x^N}}$

- La solution fondamentale $p(t,x)$ est caractérisée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p(t,x)\,dx = e^{\pm t(iu)^N}.$$

4 Pseudo-processus browniens

Considérons l'équation de la chaleur d'ordre $N > 2$: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \pm \dfrac{\partial^N u}{\partial x^N}}$

- La solution fondamentale $p(t, x)$ est caractérisée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p(t, x)\, dx = e^{\pm t(iu)^N}.$$

- Définition d'un processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ selon

$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = p_t(x, y)\, dy = p(t, x - y)\, dy$$

et pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $x_0 = x$,

$$\mathbb{P}_x(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i)\, dx_i.$$

4 Pseudo-processus browniens

Considérons l'équation de la chaleur d'ordre $N > 2$: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \pm \dfrac{\partial^N u}{\partial x^N}}$

- La solution fondamentale $p(t, x)$ est caractérisée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p(t, x)\, dx = e^{\pm t(iu)^N}.$$

- Définition d'un processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ selon

$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = p_t(x, y)\, dy = p(t, x - y)\, dy$$

  et pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $x_0 = x$,

$$\mathbb{P}_x(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i)\, dx_i.$$

- Difficulté : *pseudo-processus markovien gouverné par une mesure signée de variation totale infinie (qui* ***n'est pas*** *une probabilité)*
  $\longrightarrow$ *Définition « correcte » pour les distributions fini-dimensionnelles.*

Définition par discrétisation du temps

Processus échantillonné $X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} \, \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t)$.

Définition par discrétisation du temps

Processus échantillonné $X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} \, \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t)$.

- Formule de Spitzer (en temps continu) :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \, \mathbb{E}_x[e^{-\mu \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s + i\nu X_t}] \, dt$$

$$= \frac{e^{(-\mu+i\nu)x}}{\lambda} \, \exp\left[- \int_0^{\infty} [1 - \mathbb{E}_0[e^{-\mu X_t^+ + i\nu X_t}] \, \frac{e^{-\lambda t}}{t} \, dt \right]$$

Définition par discrétisation du temps

Processus échantillonné $X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} \, \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t)$.

- Formule de Spitzer (en temps continu) :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \, \mathbb{E}_x[e^{-\mu \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s + i\nu X_t}] \, dt$$
$$= \frac{e^{(-\mu+i\nu)x}}{\lambda} \exp\left[- \int_0^\infty [1 - \mathbb{E}_0[e^{-\mu X_t^+ + i\nu X_t}] \, \frac{e^{-\lambda t}}{t} \, dt \right]$$

- Inversion de la transformée de Laplace-Fourier en μ et ν ; pour $x, z \leqslant y$:

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dt \, \mathbb{P}_x\{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \in dy, X_t \in dz\}/dy \, dz = \sum_{\substack{\Re(\theta_k)>0 \\ \Re(\theta_l)<0}} c_k e^{\theta_k \lambda^{1/N}(x-y)+\theta_k \lambda^{1/N}(y-z)}}$$

où $\theta_k^N = \theta_l^N = \pm 1$ et les c_k sont des constantes.

$\longrightarrow$ *« loi » conjointe du couple* $(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s, X_t)$.

- Puis relation entre les couples (τ_a, X_{τ_a}) et $(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s, X_t)$:

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a+i\mu X_{\tau_a}}) = e^{i\mu x} - [\lambda \pm (i\mu)^N] \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x\left[e^{i\mu X_t}\, \mathbb{1}_{\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant a\}}\right] dt$$

- Puis relation entre les couples (τ_a, X_{τ_a}) et $(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s, X_t)$:

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a+i\mu X_{\tau_a}}) = e^{i\mu x}-[\lambda\pm(i\mu)^N]\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathbb{E}_x\left[e^{i\mu X_t}1\!\!1_{\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s\leqslant a\}}\right]dt$$

- Inversion de la transformée de Fourier en μ (Lachal, 2004) ; pour $x > a$:

$$\boxed{\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a}\in dy)/dy = \sum_{0\leqslant j\leqslant N/2}\Bigg[\sum_{\Re(\theta_k)<0} e^{\theta_k\lambda^{1/N}(x-a)}\Bigg]\frac{\delta_a^{(j)}(dy)}{\lambda^{j/N}}}$$

$\longrightarrow$ *« loi » conjointe « distributionnelle » du couple* (τ_a, X_{τ_a}).

- Puis relation entre les couples (τ_a, X_{τ_a}) et $(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s, X_t)$:

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a+i\mu X_{\tau_a}}) = e^{i\mu x} - [\lambda \pm (i\mu)^N] \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x\left[e^{i\mu X_t} \mathbb{1}_{\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant a\}}\right] dt$$

- Inversion de la transformée de Fourier en μ (Lachal, 2004) ; pour $x > a$:

$$\boxed{\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy)/dy = \sum_{0\leqslant j\leqslant N/2} \left[\sum_{\Re(\theta_k)<0} e^{\theta_k \lambda^{1/N}(x-a)}\right] \frac{\delta_a^{(j)}(dy)}{\lambda^{j/N}}}$$

$\longrightarrow$ *« loi » conjointe « distributionnelle » du couple* (τ_a, X_{τ_a}).

- Pour $\lambda = 0$: $\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_a} \in dy\}/dy = \sum_{0\leqslant j\leqslant N/2} (-1)^j \frac{(x-a)^j}{j!}\, \delta_a^{(j)}(dy)}$

Remarque : *beaucoup de calculs formels...*

Réf. : Hochberg (1978), Orsingher et al. (1991–...), Nishioka (1997–...), Lachal (2002–...)