INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

TD D – Dérivation

Cours

1 Dérivabilité en un point a

1.1 Définition

Dans cette fiche, I désigne un intervalle qui ne contient pas qu'un seul point.

Définition 1 Soit f une application définie sur I et soit $a \in I$.
On définit alors le **taux d'accroissement de f en a** par :

$$\varphi_a : \begin{cases} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

On dit que f est **dérivable en a** lorsque φ_a admet une **limite finie en a**.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ (ou $\dfrac{df}{dx}(a)$) et est appelée **nombre dérivé de f en a** ou **dérivée de f en a**.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point a de I.

Remarque. — En posant $x = a+h$, on obtient : f est **dérivable en a** si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

Exemple 1 Soit f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

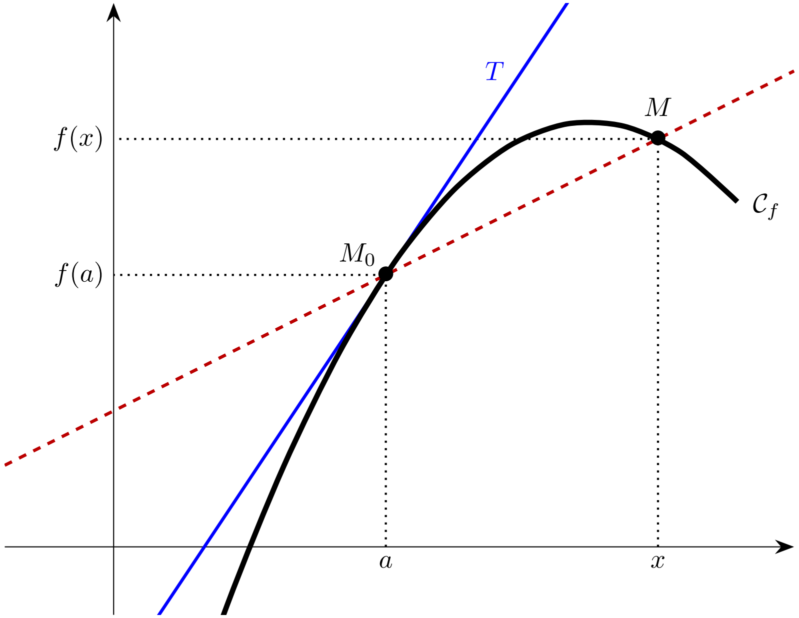
pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, on a $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = x+a \xrightarrow[x\to a]{} 2a$.

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Interprétation graphique

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f, M_0 le point $(a, f(a))$ de $\mathcal{C}_f$ et M le point $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$.

Alors le taux d'accroissement $\varphi_a(x)$ est égal au **coefficient directeur** de la droite (M_0M).



1. Si f est **dérivable en a**, alors $\mathcal{C}_f$ admet pour **tangente** en M_0 la droite T d'équation :
$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}.$$
Autrement dit, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} \varphi_a(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet pour **tangente** en M_0 la **droite verticale** d'équation $x = a$.
3. Si φ_a n'admet pas de limite en a, alors $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente en M_0.

Exercice 1 Étudier la dérivabilité en a des fonctions suivantes à l'aide du taux d'accroissement et donner la valeur de $f'(a)$ s'il existe :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ en $a \in \mathbb{R}_+$.
2. $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
en $a = 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^n$ en $a \in \mathbb{R}$.
(Indication : utiliser $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.)
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-2)-1}{\mathrm{sh}(3x-6)} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 \text{ si } x = 2 \end{cases}$
en $a = 2$.

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite en a

Définition 2 On dit que f est **dérivable à droite** (resp. à gauche) en a lorsque φ_a admet une **limite finie à droite** (resp. à gauche) en a.

Dans ce cas, cette limite est appelée la **dérivée à droite** (resp. à gauche) en a et on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Propriété 1 Lorsque a n'est pas une borne de I, la fonction f est **dérivable en** a si et seulement si elle est **dérivable à gauche et à droite en** a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

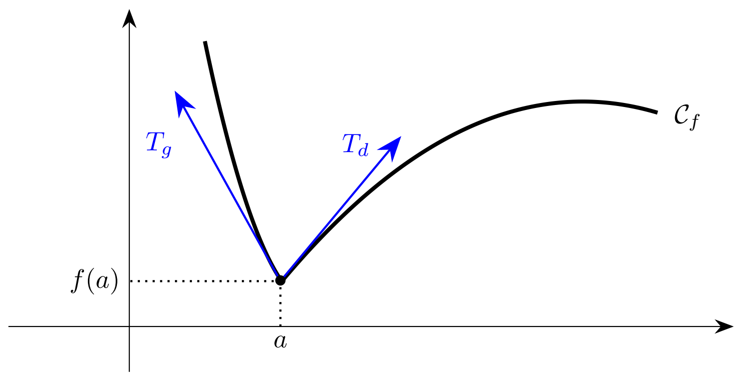
Exemple 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = |x|$. Alors $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(x) = -x$ si $x < 0$.

On a $\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } \ < 0 \end{cases}$. Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, $f'_g(0) = 1$ et $f'_d(0) = -1$. Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique

Lorsque f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet alors une **demi-tangente** de coefficient directeur $f'_d(a)$ à droite (resp. à gauche) en M_0.

Lorsque f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet un **point anguleux** en a.



Exercice 2 Étudier la dérivabilité à gauche et à droite en a des fonctions suivantes et interpréter les résultats graphiquement.

1. $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x)}$ en $a = 0$.
2. $f(x) = \left|(x-5)^3\right|$ en $a = 5$.
3. $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ en $a = 2$.
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^3)}{\mathrm{e}^{5x} - 1} \text{ si } x \in]-1, 0[\\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x + x^3}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

   en $a = 0$.

1.3 Lien avec la continuité

Propriété 2 Si f est **dérivable en** a, alors elle est **continue en** a.

Exercice 3 (Démonstration de la propriété 2)

1. Pour $x \in I \backslash \{a\}$, exprimer $f(x)$ à l'aide du taux d'accroissement $\varphi_a(x)$.
2. En déduire la limite de f en a et conclure.

Attention, la réciproque est fausse ! Par exemple, la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Cette propriété n'est généralement pas utile lorsqu'on veut montrer qu'une fonction est continue en un point. En revanche, la contraposée peut servir pour justifier qu'une fonction n'est pas dérivable.

Exemple 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction partie entière E n'est pas continue en n, donc elle n'est pas dérivable en n.

1.4 Lien avec les équivalents

Propriété 3

1. Soit $\boxed{\lambda \neq 0}$. Alors : $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} \lambda(x-a) \iff f$ est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$.
2. $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{=} o(x-a) \iff f$ est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Remarque. — On peut en déduire le résultat suivant, qui sera revu dans un chapitre ultérieur :

$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mu(x-a) + o(x-a)$ avec $\mu \in \mathbb{R} \iff f$ est dérivable en a et $f'(a) = \mu$.

Ainsi, lorsque f est dérivable en a, on a $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Cette relation s'appelle **développement limité d'ordre 1 de f en a.**

Exercice 4 Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit f telle que $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{(\mathrm{ch}(x) - 1)^k}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. Donner un équivalent de f en 0 de la forme ax^b avec a et b dans $\mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de k la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   On note alors g son prolongement.
3. Supposons $k \neq \dfrac{1}{2}$. Pour quelles valeurs de k ce prolongement g est-il dérivable en 0 ?
   Donner la valeur de $g'(0)$, s'il existe.

2 Dérivation et opérations

Théorème 1 Soit $a \in I$ et soit f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en a.

1. Linéarité :
   - $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
   - pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
2. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$.

Exercice 5 (Démonstration du 2. du théorème 1)

À l'aide du taux d'accroissement de fg en a, démontrer le 2. ci-dessus. (Indication : ajouter et soustraire $f(x)g(a)$ au numérateur.)

Propriété 4 (Dérivation d'une composée)

Soit I et J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$.

Si f est **dérivable en** a et g est **dérivable en** $f(a)$, alors $g \circ f$ est **dérivable en** a et :

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a)}.$$

Exemple 4 Soit h l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = |(x-5)^3|$. Sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, la fonction $x \longmapsto (x-5)^3$ est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, et la fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc on peut en déduire que sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, f est dérivable.

La propriété 4 ne nous permet pas de savoir si h est dérivable en 5. Mais l'impossibilité de l'utiliser ne signifie nullement que la fonction n'est pas dérivable en 5 ! On peut par exemple étudier le taux d'accroissement de h en 0 (voir exercice 2) et on trouve ici que h est dérivable en 5.

Exercice 6 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 7 Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp\big(3\,\mathrm{ch}(2x)\big)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$
3. $\forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = \sqrt{\sin(x)}$
4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^3\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
6. $\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

Réponses de l'exercice 7 :

1. $f'(x) = 6\,\mathrm{sh}(2x)\exp\big(3\,\mathrm{ch}(2x)\big)$
2. $f'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$
3. $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$
4. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)$
5. $f'(x) = 3x^2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
6. $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

TD

Exercice 8 Soit $f(x) = \sqrt{x^3 - x^4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Sur quel sous-ensemble D_0 de D peut-on dire que f est dérivable par opérations sur des fonctions dérivables ? Pour $x \in D_0$, calculer $f'(x)$.
3. Déterminer en quel(s) point(s) de $D\backslash D_0$ f est dérivable.
4. Étudier la continuité de f' sur son ensemble de définition.

Exercice 9 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2\,\mathrm{th}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Quelle est la parité de f ?
2. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$ et en déduire ses limites en $+\infty$ puis $-\infty$.
3. Justifier rapidement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
4. (a) Déterminer des équivalents simples de f en 0^+ et 0^-.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (d) Montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 On considère les fonctions $f_\lambda : x \longmapsto \dfrac{x-\lambda}{x^2+1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_\lambda$ en $x=0$ sont parallèles et que les tangentes en $x=1$ sont concourantes en un même point.

Exercice 11 (Calcul de valeurs approchées comme en OMNI)
Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0,\ f(x) = \ln(x)$.

1. (a) Donner l'équation de la tangente Δ à la courbe de f en $x=1$.
   (b) En déduire une valeur approchée de $\ln(1,02)$ et une valeur approchée de $\ln(0,97)$.
   Ces valeurs approchées sont-elles par excès, ou par défaut ?
2. En équations de tangentes, déterminer une valeur approchée de $e^{-0,03}$, puis de $\sqrt{9,3}$, et préciser si ces valeurs approchées sont par excès ou par défaut.

Réponses de l'exercice 11 :

1. (a) $y = x - 1$
   (b) $\ln(1,02) \simeq 0,02$ et $\ln(0,97) \simeq -0,03$. Ce sont des valeurs approchées par excès car Δ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.
2. La tangente à la courbe de $x \longmapsto e^x$ en $x=0$ a pour équation $y = 1+x$, donc $e^{-0,03} \simeq 0,97$ (valeur approchée par défaut). La tangente à la courbe de $x \longmapsto \sqrt{x}$ en $x=9$ a pour équation $y = \frac{1}{6}(x-9)+3$, donc $\sqrt{9,3} \simeq 3,05$ (valeur approchée par excès).

En complément...

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap03_Derivation_WEB.pdf

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lhopital/Lhopital0.html

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_fonctions_convexes.pdf

3 ANNEXE : Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	dérivable sur	Dérivée
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n $(n \in \mathbb{Z},\ n < 0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^n $(n \in \mathbb{R},\ n$ non entier$)$	$]0,+\infty[$	nx^{n-1}
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1-\mathrm{th}^2(x)$
$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \times a^x$