TP MAPLE n° 1 — Polynômes

Quelques commandes Maple utiles pour la manipulation des expressions polynomiales :

`coeffs(P,x)`	la séquence des coefficients de P
`degree(P,x)`	le degré de P
`rem(P,Q,x)`	reste de la division euclidienne de P par Q
`quo(P,Q,x)`	quotient de la même division
`diff(P,x)`	dérivée de P
`subs(x=a,P)`	évaluation de $P(a)$
`factor(P)`	factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$ si $P \in \mathbb{Q}[X]$
`factor(P,{I,sqrt(2)})`	factorisation de P si $P \in \mathbb{Q}[X]$ et si ses racines s'expriment à l'aide de rationnels et par exemple de i et $\sqrt{2}$
`factor(P,real/complex)`	Factorisation *approchée* de P dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
`solve(P,x)`	recherche des racines de P
`collect(expr,x)`	regroupe les termes de `expr` selon les puissances de x
`combine(expr)`	simplifie certaines expressions de même type
`expand(expr)`	développe `expr`

Ex. 1 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = aX^5 - (3a+1)X^4 + (a+3)X^3 - X^2 + 4aX - 4.$$

1. Démontrer de deux manières différentes que P est divisible par $X^2 + X + 1$.
2. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 2 de P ?
3. Effectuer la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Ex. 2 Montrer que pour tout entier naturel n, le polynôme

$$A_n = \sin(2a)X^n - \sin(na)X^2 + \sin((n-2)a)$$

est divisible par le polynôme $B = X^2 - 2X\cos a + 1$. On pourra commencer par vérifier cette assertion pour diverses valeurs de n.

Ex. 3 Pour quelles valeurs réelles de a et b le polynôme

$$P = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + X + b$$

admet-il $2 + 2\mathrm{i}$ comme racine ? Factoriser P sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Ex. 4 soit n un entier $\geqslant 1$. Trouver l'ordre de multiplicité de 1 dans le polynôme

$$X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1.$$

Ex. 5 Interpolation de Lagrange

Étant donné n points $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ du plan dont les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes distinctes, nous étudions le problème de l'existence d'un polynôme dont le graphe passe par ces points (problème dit d'interpolation).

Ce problème admet toujours unes solution ; elle est en outre unique si on impose au polynôme d'être de degré **inférieur ou égal à** $(n-1)$. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de **Lagrange**.

I. Les polynômes interpolateurs de Lagrange d'un nuage de points

Pour résoudre le problème, nous commençons par construire, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, un polynôme L_i tel que

$$L_i(x_i) = 1 \text{ et } L_i(x_j) = 0 \text{ dès que } i \neq j.$$

Le polynôme L_i devant s'annuler en $X = x_j$, nous cherchons une solution de la forme

$$\alpha_i \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)\,;$$

la relation $L_i(x_i) = 1$ impose alors $\alpha_i = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$.

Finalement nous obtenons l'expression suivante du polynôme L_i (noter que L_i est de degré $n-1$) :

$$L_i = \frac{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}.$$

La somme des polynômes $y_i L_i$ nous fournit alors une solution du problème, à savoir

$$L = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$$

1. Expliquer pourquoi le polynôme L est **la** solution du problème.
2. À l'aide de la fonction `interp`, trouver le polynôme d'interpolation P associé au nuage de points $N = \{(1, 2), (2, 1), (4, 5), (7, 8), (-1, -1)\}$ puis représenter sur un même graphique ce polynôme et l'ensemble N.

II. Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$ et $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. Le *polynôme de Lagrange* de f associé à cette subdivision est le polynôme de Lagrange associé à l'ensemble de points $\{A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)\}$ où $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$.

1. Écrire une fonction `EquiSub` qui reçoit comme paramètres deux réels a et b $(a < b)$, un entier $n \geqslant 2$, et renvoie une liste contenant les n points de la subdivision régulière (les points sont équi-répartis) de $[a, b]$, puis la tester.
2. Écrire une procédure `Lagrange_f` qui reçoit comme paramètres une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une liste $x = [x_1, \ldots, x_n]$ et qui retourne le polynôme de Lagrange $L(x)$ associé à la subdivision $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_n = b$, puis la tester.
3. Pour $f = \sin$ sur l'intervalle $[0, 4\pi]$, représenter sur un même graphique la fonction f et le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f en prenant des subdivisons régulières correspondant successivement à $n = 6$ puis à $n = 10$. Quelle remarque peut-on faire ?
4. Pour $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + 8x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, représenter sur un même graphique f et le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f en prenant des subdivisons régulières correspondant successivement à $n = 6, 10, 20$. Quelle remarque peut-on faire ?

   Le phénomène qu'on observe à la question 4 s'appelle phénomène de Runge ; il illustre le fait que l'approximation et l'interpolation sont des idées bien distinctes.