INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Exercices d'initiation à Maple

1 Prise en main

Exercice 1 **Commandes utiles :** simplify, root, evalf, sum, binomial...

1. Calculer en simplifiant éventuellement

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}\,; \qquad \frac{16\times 7^3-2\sqrt{2}}{4-\frac{10}{3}}\,; \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Donner une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)$ avec 20 chiffres significatifs.
3. Calculer $S_1=1+2+\cdots+50$ et $S_2=1^3+2^3+\cdots+50^3$. Comparer S_2 et S_1^2.
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et $T_n=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}$.

2 Résolution d'équations numériques

Commandes utiles : solve, fsolve, evalf, plot...

Exercice 2

1. Résoudre l'équation $x^2+x+2=0$ puis le systèmes

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1\\ 4x+y-z=0\\ x-z=2\end{cases} \quad\text{et}\quad \begin{cases} x+2y+z=1\\ 2ax+3y+2z=1+a\\ a^2x+y+z=a\end{cases} \quad \text{où } a \text{ est un réel fixé.}$$

2. Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-x>2,\\ \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}<-4.\end{cases}$

Exercice 3 On considère l'équation $x^3-10x+5=0$.

1. Résoudre formellement cette équation.
2. Simplifier les résultats obtenus.
3. Calculer une valeur approchée de chacune des solutions avec 20 chiffres significatifs. Que constate-t-on ?
4. Combien le polynôme $P(x)=x^3-10x+5$ a-t-il de racines réelles ? Le confirmer graphiquement en traçant le graphe de la fonction $x\mapsto P(x)$ sur l'intervalle $[-4,4]$.

3 Fonctions

Commandes utiles : int, diff, D, limit, plot...

Attention : pour Maple, une expression et une fonction sont deux choses différentes ! Par exemple, si `f` est une expression, la commande `f(2)` ne renvoie pas l'image de 2.

Pour créer une expression, on utilise une syntaxe du type `f:=3x+5`. Pour créer une fonction, on utilise une syntaxe du type `f:=x->3x+5`.

Par ailleurs, pour dériver une fonction f, il vaut mieux éviter de taper `f'(x)` (qui donne parfois des résultats faux) ; la commande correcte est la commande D : la fonction $D(f)$ est la fonction dérivée f'.

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-1,1]$.
2. Combien l'équation $f(x)=1$ a-t-elle de solutions sur cet intervalle ?
3. Demander à Maple de résoudre formellement l'équation précédente, puis de la résoudre numériquement.
4. En précisant à Maple sur quel intervalle il doit chercher, trouver une valeur approchée de la solution non nulle de cette équation.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+x+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Construire, sur un même graphique, $\mathcal{C}$ en rouge et la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 en bleu.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée x_0 à 10^{-1} près de l'unique zéro de f sur $[-1,1]$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\int_0^s f(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 **Nouvelles commandes utiles :** cosh, sinh

Soit $f : x\mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ et $g : x\mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

1. Représenter sur un même graphique (et sur un intervalle adapté) les fonctions f et sh, puis g et ch. Qu'observe-t-on ? Vérifier cette observation à l'aide de Maple.
2. Représenter la fonction $x\mapsto g(\mathrm{ch}(x))-x$ sur un intervalle adapté. Que pensez-vous du résultat ?

Exercice 7 **Nouvelle commande utile :** tanh

1. Représenter sur un même graphique $f : x\mapsto \dfrac{2\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$ et $g : x\mapsto \tan^2(x)$ sur un intervalle bien choisi. Conjecturer une relation entre f et g et la vérifier à l'aide de Maple.
2. Même travail avec $h : x\mapsto \dfrac{2\sin(2x)}{1-\sin(2x)}$ et $g : x\mapsto \tan^2(x)$.
3. Même travail avec $F : x\mapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{th}(x)}$ et $G : x\mapsto \mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 8

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $F : t \mapsto 3\cos(3t) + 2\sin(3t)$ et $G : t \mapsto \sqrt{13}\cos(3t)$. Qu'observe-t-on ?
2. (Question à faire à la main, sans maple...) On admet que toute fonction de la forme $f : t \mapsto A\cos(wt) + B\sin(wt)$ (avec $A, B \in \mathbb{R}^*$ et $w > 0$) peut s'écrire sous la forme $C\cos(wt + \varphi)$ avec $C > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
   En choisissant des valeurs judicieuses de t, exprimer alors A et B à l'aide de C et φ, puis en déduire la valeur de C en fonction de A et B, puis celles de $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ et $\tan(\varphi)$ en fonction de A et B.
3. Vérifier que les résultats obtenus sont cohérents avec l'exemple de la question 1, et déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de φ dans ce cas. On prendra $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
4. Qu'obtient-on pour la fonction $H : t \mapsto 4\cos(2t) - 3\sin(2t)$?

4 Courbes paramétrées

Commandes utiles : plot...

Le support d'une courbe paramétrée définie par $x = f(t), y = f(t), t \in [a, b]$ s'obtient par la commande plot([f(t),g(t),t=a..b]).

Attention : ne pas confondre avec la commande plot([f(t),g(t)],t=a..b) qui trace les courbes des fonctions f et g sur un même graphiques.

Exercice 9 À l'aide d'une représentation paramétrique, tracer :

1. le cercle centré à l'origine de rayon 3 ;
2. la droite passant par le point $A(-1, 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(3, 1)$;
3. l'ellipse centrée au point $B(2, 1)$ telle que $a = 3$ et $b = 2$.

Exercice 10 Tracer les courbes paramétrées ci-dessous ; étudier les symétries vérifiées par ces courbes.

1. $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \big(1 + \cos(t)\big)\sin(t) \end{cases}$, $t \in [-\pi, \pi]$; 2. $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin^3(t) + 2\cos^3(t) \end{cases}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Pour les insatiables...

Exercice 11 Commandes utiles : evalc, Re, Im, abs, polar, DotProduct, VectorNorm...

1. Donner les parties réelle et imaginaire, le module ainsi qu'un argument du complexe
$$z = \left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}}\right)^{20}.$$
2. Cette question est à traiter après le chargement de la librairie d'algèbre linéaire : commande with(LinearAlgebra). Calculer le produit scalaire ainsi que les normes des vecteurs $u = (1, -1, 3)$ et $v = (-5, -3, 2)$.

Exercice 12 Commandes utiles : is, coulditbe, assuming...

1. Que devrait dire Maple dans chacun des cas suivants ?
   (a) is($\sqrt{x^2} = x$) ?
   (b) coulditbe($\sqrt{x^2} = x$) ?
   (c) is($\ln(\exp(x))) = x$) ?
2. Le vérifier. Pour les assertions fausses, ajouter une condition la rendant juste à l'aide de la commande assuming.

Exercice 13 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^2 - 10x}{(x^2+1)(x-2)}\exp\left(\dfrac{|x|}{x+1}\right)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Définir la fonction f dans Maple.
2. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles qui composent le domaine de définition de f, noté D_f.
3. Montrer que la droite D_1 d'équation $y = 2\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ est asymptote $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
4. Représenter sur un même graphique et avec des couleurs différentes $\mathcal{C}$ ainsi que les asymptotes.

Exercice 14 Soit T la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $T(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

1. Définir la fonction T dans Maple.
2. Calculer $T(-x) + T(x)$. Conclusion ?
3. Calculer les limites de T en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Calculer la dérivée de T puis donner la valeur de $T'(2)$.
5. Donner une primitive de T.
6. Représenter graphiquement la fonction T sur l'intervalle $[-5, 5]$.
7. Tracer sur un même graphique la courbe représentant la fonction T en rouge et en trait plus épais, celle représentant la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en bleu ainsi que la droite d'équation $y = x$ en noir. Que remarque-t-on ? Le vérifier à l'aide de Maple.
   En fait la fonction T est la fonction « tangente hyperbolique », notée th et correspondant à la commande Maple tanh.

Exercice 15 Nouvelle commande utile : piecewise

Définir la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous à l'aide de Maple puis la faire tracer.