Comparaison de fonctions

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Exercice 1 Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer si l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre au voisinage de 0 ou $+\infty$, ou si les fonctions sont équivalentes, ou si l'on n'est dans aucun de ces cas.

a) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\ln(x)$; b) $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\ln(x)$;

c) $f(x)=x^5+4x+1$, $g(x)=e^x[\ln(x)]^3$; d) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $g(x)=\mathrm{e}^{-2x}$;

e) $f(x)=\ln(x^2+1)$, $g(x)=\ln(x^3+1)$; f) $f(x)=e^x-1$, $g(x)=x[\ln(x)]^3$;

g) $f(x)=2+\mathrm{e}^x\sin(x)$, $g(x)=1+\mathrm{e}^x\cos(x)$; h) $f(x)=2\mathrm{e}^x+\sin(x)$, $g(x)=\mathrm{e}^x+\cos(x)$.

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{[\mathrm{ch}(x)-1]\,\mathrm{sh}(x)}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{\mathrm{sh}(x)[\arctan(x)]^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos(x)}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln[\cos(ax)]}{\ln[\cos(bx)]}$ $a,b\in\mathbb{R}^*$ étant fixés ; e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ $a\in\mathbb{R}$ étant fixé ;

f) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2^x+3^x-4)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$; g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^{1/x}+3^{1/x}+5^{1/x}}{3}\right)^x$.

Exercice 3

1. Déterminer des équivalents au voisinage de 0 de la forme Ax^n ($A\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{N}$) pour les fonctions définies par
   a) $f(x)=\mathrm{sh}\,x+a\,\mathrm{th}\,x$, $a\in\mathbb{R}$ étant fixé ;
   b) $f(x)=\dfrac{\arctan[x^p(\mathrm{e}^x-1)]}{\sqrt{\ln(x+1)+1}-1}$, $p\in\mathbb{N}$ étant fixé.
2. Déterminer des équivalents au voisinage de $1/2$ de la forme $A\left(x-\frac12\right)^n$ ($A\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{Z}$) pour les fonctions définies par
   a) $f(x)=(2\,x^2-3\,x+1)\tan^2(\pi x)$; b) $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\sqrt{\cos[\pi(2x-1)]}}{\cos(\pi x)}$.
3. Déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$ de la forme Ax^α ($A\in\mathbb{R}^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$) pour les fonctions définies par
   a) $f(x)=\sqrt{x^3+a\,x^2+b\,x+c}-d\,x\sqrt{x+2}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ étant fixés ;
   b) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+x^{1789}-x^{1515}\ln x}{x^{1957}+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\mathrm{ch}\,x}$.
4. Déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$ de la forme $A\mathrm{e}^{\alpha x}$ ($A\in\mathbb{R}^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$) pour les fonctions définies par
   a) $f(x)=1-\mathrm{th}^2\,x$; b) $f(x)=\dfrac{\mathrm{ch}(ax)+\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(bx)}$, $a,b\in]0,+\infty[$ étant fixés.

Pour les insatiables...

Exercice 4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=\ln(\mathrm{ch}\,x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Donner un équivalent simple de f en 0.
3. Montrer qu'en $+\infty$, on a $f(x)\sim ax^n$ où a est un réel et n un entier à déterminer.
4. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax^n)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
5. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f la fonction définie par $f(x)=\arccos(1-x^n)$.

1. Montrer que $\arccos y\underset{y\to1^-}{\sim}\sqrt2\sqrt{1-y}$ et $\pi-\arccos y\underset{y\to-1^+}{\sim}\sqrt2\sqrt{1+y}$. On pourra utiliser l'équivalent $1-\cos z\underset{z\to0^+}{\sim}\frac12 z^2$.
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
3. Donner les valeurs de l'entier n pour lesquelles la fonction f est dérivable en 0 à droite. Calculer la dérivée $f'(0)$ lorsqu'elle existe.
4. La fonction f est-elle dérivable en $2^{1/n}$?
5. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{f'}$ de f'. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}_{f'}\setminus\{0\}$.
6. Étudier les variations de f puis tracer son graphe pour $n\in\{1,2,3,4\}$.

Exercice 6

Soit n un entier. On définit l'application $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^n}{(x^2+1)\arctan(x)}$.

1. Donner des équivalents simples de f au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.
2. Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?
3. Pour quelles valeurs de n ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?
4. Pour quelles valeurs de n la courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Pour ces valeurs de n, préciser l'équation de l'asymptote correspondante. On rappelle que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\arctan(x)+\arctan(1/x)=\pi/2$.

Exercice 7

Soit a et b des réels tels que $a>b$. On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^4+4ax^3+1}-\sqrt{x^4+4bx^3+1}$.

1. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ de la forme Ax ($A\in\mathbb{R}^*$).
2. À l'aide de $\sqrt{x^4+4ax^3+1}-(x^2+2ax)=\dfrac{1-4a^2x^2}{\sqrt{x^4+4ax^3+1}+(x^2+2ax)}$, calculer la limite B de $f(x)-Ax$ lorsque $x\to+\infty$.
3. À l'aide de $\sqrt{x^4+4ax^3+1}-(x^2+2ax-2a^2)=\dfrac{8a^3x+(1-4a^4)}{\sqrt{x^4+4ax^3+1}+(x^2+2ax-2a^2)}$, trouver un équivalent de $f(x)-(Ax+B)$ au voisinage de $+\infty$ de la forme C/x ($C\in\mathbb{R}^*$).
4. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.